



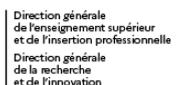
L'association *femmes et mathématiques*, en partenariat avec la Mission pour la place des femmes du CNRS, organise le

23ème Forum des jeunes mathématiciennes et mathématiciens

du 22 au 24 novembre 2023

à l'Université Libre de Bruxelles, Belgique

Analyse. Géométrie. Applications



Programme du Forum des jeunes mathématiciennes et mathématiciens

Mercredi 22 novembre 2023 (Atrium, bâtiment R, Campus du Solbosch)

14h : Ouverture par Annemie Schaus, rectrice de l'Université Libre de Bruxelles et Anne Boyé, présidente de femmes et mathématiques

14h30 : Elise Goujard, Institut Universitaire de France et Université de Bordeaux, médaille de bronze du CNRS 2023 :

Conférence inaugurale : Géométrie et dynamique des surfaces plates : un panorama des questions actuelles

Cet exposé passe en revue les principales questions liées à l'étude de la dynamique et la géométrie des surfaces plates et de leurs espaces de modules. Ces questions sont principalement motivées par des problèmes de dynamique pour les billards polygonaux rationnels ou pour les échanges d'intervalles.

15h30 : pause-café

16h : Catherine Dehon, Université Libre de Bruxelles

Conférence plénière : Biais de genre dans les évaluations comportant des questions fermées avec points négatifs

L'évaluation des étudiants au moyen de questions fermées, appelées questions à choix multiples (QCM), est devenue populaire dans l'enseignement supérieur au cours des 30 dernières années. Si la rapidité de correction des QCM est universellement admise, des débats existent quant à leur objectivité en raison des biais de genre qu'ils peuvent induire, du fait des différentes stratégies de réponse au hasard et de prise de risque des étudiantes par rapport aux étudiants.

17h : Laurence Broze, Université de Lille, responsable du Comité de programme du Forum des jeunes mathématiciennes et mathématiciens

Femmes et mathématiques : quels problèmes et quelles solutions ?

17h45 : présentation de l'exposition et cocktail

Jeudi 23 novembre 2023 (Salle Solvay, Département de mathématiques,
bâtiment NO, Campus de la Plaine)

9h : Introduction par Samuel Fiorini, président du département de mathématiques

9h10 : Session de communications courtes présidée par Isabelle Chalendar, Université Gustave Eiffel

- Ensembles K-spectraux et inégalités de type Kreiss, Maeva Ostermann, Université de Lille
- Construction d'approximations grossières pour un problème de Schrodinger à coefficients hautement oscillants, Simon Ruget, Université Gustave Eiffel
- Autour du problème du sous-espace invariant, Noémie Fougny, Université de Mons
- Domaines ouverts de discontinuité de la variété des caractères, Suzanne Schlich, Université Grenoble Alpes

11h : pause-café

11h15 : Anne-Sophie Libert, Université de Namur

Conférence plénière : Approche hamiltonienne pour la caractérisation des systèmes planétaires

De tout temps, l'être humain a été fasciné par le mouvement des astres. La question de la pluralité des mondes a taraudé les esprits humains jusqu'à la découverte en 1995 de la première exoplanète autour d'une étoile de type solaire. A ce jour, plus de 5500 exoplanètes, plus de 850 systèmes extrasolaires multi-planétaires aux caractéristiques souvent surprenantes ont été recensés. En raison des limites observationnelles, notre connaissance de ces systèmes est limitée. Cet exposé illustre en quoi la mécanique céleste et en particulier la théorie hamiltonienne contribuent à une meilleure caractérisation des systèmes extrasolaires et montre que les modèles mathématiques sont un atout pour contraindre les incertitudes observationnelles.

12h30 : pause

14h : Session de communications courtes présidée par Jasmin Raissy, Université de Bordeaux

- Non-Abelian Painlevé equations and their monodromy surfaces, Irina Bobrova, Max Planck Institute, Leipzig
- Sur la généralisation d'un théorème de Bryant, Nicolas Choueiry, Université de Marseille
- Structures réelles sur les surfaces de Hopf primaires, Zahraa Khaled, Université de Marseille
- Une inégalité isosystolique pour les tores de Finsler réversibles et l'aire de Busemann-Hausdorff, Teo Gil Moreno de Mora Sard, Université Paris-Est Créteil

16h : pause-café

16h15 : Julie Guerreiro, Chargée de mission égalité et lutte contre les violences sexistes et sexuelles, Ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche (France) :

Lutter contre les violences sexistes et sexuelles dans l'enseignement supérieur et la recherche.

17h : Colette Guillopé, université Paris-Est Créteil :

atelier mentorat : comment candidater sur les postes académiques en France ?

Diner (sur invitation)

Vendredi 24 novembre 2023 (Salle Solvay, Département de mathématiques,
bâtiment NO, Campus de la Plaine)

9h : Introduction par Cécile Moucheron, doyenne de la Faculté des sciences

9h10 : Session de communications courtes présidée par Sandrine Grellier, Université d'Orléans

- Approche du calcul pseudodifférentiel par les groupoides de Lie, Clément Cren, Georg-August-Universität Gottingen
- Généralisation supersymétrique de l'infini null, Noémie Parrini, Université de Mons
- Equivalence orbitale quantitative, Amandine Escalier, Université Paris-Saclay
- Représentations en string C-groups des groupes symétriques, Jessica Mulpas, Université Libre de Bruxelles

11h : pause-café 11h15 : Simone Gutt, Université Libre de Bruxelles

Conférence plénière : Structures (presque) complexes et structures symplectiques

12h30 : pause

13h45 : Natacha Portier, ENS Lyon

atelier mentorat : le syndrome de l'imposteur

15h45 : pause-café

16h : Session de communications courtes

- Procédure de test pour l'auto-calibration basée sur les courbes de Lorenz et de concentration, Julie Huyghe, Université Libre de Bruxelles
- Inférence basée sur les rangs pour l'ACP sous faible identifiabilité, Laura Peralvo Maroto, Université Libre de Bruxelles

17h : fin

Renseignements sur l'ensemble de la conférence : <https://forumbxl2023.sciencesconf.org/>

Le Forum est une initiative de l'association *femmes et mathématiques*. Il est organisé avec le soutien de la Mission pour la place des femmes du CNRS, de l'Institut des Sciences Mathématiques et leurs Interactions (INSMI), du Ministère de l'Enseignement Supérieur et la Recherche, du Département de Mathématiques de l'Université Libre de Bruxelles, de l'Ecole Doctorale Thématique Mathématiques, du Fonds de la Recherche Scientifique-FNRS et de la Solvay Brussels School of Economics and Management.

Table des matières

Sur la généralisation d'un théorème de Bryant, Al Choueiry Nicolas	1
Non-Abelian Painlevé equations and their monodromy surfaces, Bobrova Irina	6
Approche du calcul pseudodifférentiel par les groupoïdes de Lie, Cren Clément	11
Équivalence Orbitale Quantitative, Escalier Amandine	15
Autour du problème du sous-espace invariant, Fougnes Noémie	20
Une inégalité isosystolique pour les tores de Finsler réversibles et l'aire de Busemann-Hausdorff, Gil Moreno De Mora I Sardà Teo	23
Procédure de test pour l'auto-calibration basée sur les courbes de Lorenz et de concentration, Huyghe Julie [et al.]	27
Structures Réelles sur les surfaces de Hopf primaires, Khaled Zahraa	31
Représentations en string C-groups des groupes symétriques, Mulpas Jessica	36
Ensembles K-spectraux et inégalités de type Kreiss, Ostermann Maëva	41
Généralisation supersymétrique de l'infini null, Parrini Noémie [et al.]	45
Inférence basée sur les rangs pour l'ACP sous faible identifiabilité, Paindaveine	

Davy [et al.]	48
Construction d'approximations grossières pour un problème de Schrödinger à coefficients hautement oscillants, Ruget Simon	52
Open domains of discontinuity of the character variety, Schlich Suzanne	56
Liste des participants	61

Sur la généralisation d'un théorème de Bryant

Nicolas Choueiry

Département de Mathématiques, Aix-Marseille Université

30 octobre 2023

Liste de mots clés : Théorème de représentabilité de Weierstrass, correspondance de Bryant, surface minimales, immersions nulle-holomorphe space like (de type espace), immersion CMC1, métrique riemannienne, courbure moyenne vectorielle d'une immersions.

Définition 1. *Une surface lisse immergée $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ est dite minimale si sa courbure moyenne est identiquement nulle.*

Proposition 2. *Soit M une surface de Riemann (variété complexe de dimension un). Une immersion holomorphe $F = (F_1, F_2, F_3) : M \rightarrow \mathbb{C}^3$ est nulle holomorphe si elle est dirigée par la sous-variété quadratique*

$$\mathcal{U} = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3; z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0\},$$

c-à-d la dérivée $F' = (F'_1, F'_2, F'_3) : M \rightarrow \mathbb{C}^3$ par rapport à toute coordonnée local holomorphe sur M (dans une carte locale (U, φ) , $F'_i = (F \circ \varphi^{-1})'$) prend des valeurs dans $\mathcal{U} \setminus \{0\}$.

Théorème 3 (Théorème de représentation de Weierstrass). *La partie réelle et la partie imaginaire d'une immersion nul holomorphe $M \rightarrow \mathbb{C}^3$ sont des immersions $M \rightarrow \mathbb{R}^3$ minimales conformes (conservant les angles).*

Inversement, toute immersion minimale conforme $M \rightarrow \mathbb{R}^3$ est localement (sur tout domaine simplement connexe de M) la partie réelle d'une immersion nulle holomorphe.

Le théorème de représentabilité de Weierstrass établit donc une correspondance entre les surfaces minimales (de courbure moyenne nulle) dans \mathbb{R}^3 et les courbes nulles-holomorphes dans \mathbb{C}^3 . Une fameuse version hyperbolique de cette correspondance est due à Bryant [Br], qui a démontré en 1987 le résultat suivant.

Rappelons avant que :

-
1. l'espace hyperbolique \mathbb{H}^3 s'identifie au quotient $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/\mathrm{SU}(2)$.
 2. Si (Y, J) est une surface de Riemann et $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ variété riemannienne, on dit alors qu'une immersion $\varphi : Y \rightarrow M$ est dite conforme si : $\forall y \in Y, \forall v \in T_y Y$,

$$\|\varphi_*(v)\| = \|\varphi_*(Jv)\| \text{ et } \langle \varphi_*(v), \varphi_*(Jv) \rangle_{\varphi(y)} = 0.$$

Soit

$$\pi : \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/\mathrm{SU}(2) \simeq \mathbb{H}^3$$

la projection canonique et soit Y une surface de Riemann. Une immersion holomorphe $F : Y \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ est dite nulle-holomorphe si $\det(F^{-1}dF) = 0$.

Théorème 4 (Théorème de Bryant). *Soient $F : Y \rightarrow \mathrm{SL}(2; \mathbb{C})$ une immersion nulle-holomorphe. Alors $\pi \circ F : Y \rightarrow \mathbb{H}^3$ est une immersion conforme de courbure moyenne constante égale à 1.*

Si Y est simplement connexe, alors, réciproquement, toute immersion conforme $f : Y \rightarrow \mathbb{H}^3$ de courbure moyenne constante 1 est la projection d'une immersion nulle-holomorphe $F : Y \rightarrow \mathrm{SL}(2; \mathbb{C})$, qui est unique à translation à droite par un élément de $\mathrm{SU}(2)$ près.

Donc, si Y est simplement connexe, le théorème de Bryant établit une correspondance entre les immersions nulles-holomorphes de Y dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ et les immersions conformes à courbure moyenne constante 1 (les immersions CMC1) de Y dans l'espace hyperbolique \mathbb{H}^3 .

Cette présentation porte sur une généralisation commune de tous ces résultats.

Définition 5. *Un groupe de Lie réel (resp. complexe) est une variété différentiable (resp. analytique complexe) munie d'une structure de groupe, telle que les applications produit et inverse soient lisses (resp. analytiques). La dimension de la variété sous-jacente est constante, on l'appelle la dimension du groupe de Lie.*

Soit G un groupe de Lie. Pour un élément $g \in G$, on définit le C^∞ -difféomorphisme $Lg : G \rightarrow G; h \mapsto gh$.

Remarque 6. *L'espace tangent $T_e G$ est isomorphe à l'espace des champs de vecteurs invariants à gauche, c'est-à-dire des champs de vecteurs $X \in \Gamma(G)$ vérifiant*

$$\forall g \in G, (Lg)_* X = X.$$

On peut alors construire une structure d'algèbre de Lie sur $T_e G$.

Définition 7. *L'algèbre de Lie du groupe G noté \mathfrak{g} est l'espace tangent $T_e G$ muni de la structure d'algèbre de Lie.*

Définition 8 (Représentation adjointe). Soit G un group de lie, \mathfrak{g} son lie algèbre, on définit l'automorphisme intérieure :

$$i_g : G \rightarrow G; i_g(\gamma) = g\gamma g^{-1}.$$

On définit aussi l'application représentation adjointe de G par :

$$Ad : G \rightarrow GL(\mathfrak{g}) = Aut(\mathfrak{g}); Ad(g) = Ad_g = d_e(i_g).$$

Enfin on définit l'application représentation adjointe de g par :

$$\begin{aligned} ad : \mathfrak{g} &\longrightarrow gl(\mathfrak{g}) \\ X &\longmapsto ad_X : \mathfrak{g} \longrightarrow gl(\mathfrak{g}) \\ &Y \longmapsto ad_X Y = [X, Y] \end{aligned}$$

avec $ad = d_e(Ad)$.

Soit \mathfrak{g} une algèbre de lie réelle muni du crochet $[\cdot, \cdot]$. Sa complexification est une algèbre de lie complexe $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$ avec le crochet $[\cdot, \cdot]_{\mathbb{C}}$ défini par

$$[X_1 + iX_2, Y_1 + iY_2]_{\mathbb{C}} = [X_1, Y_1] - [X_2, Y_2] + i([X_1, Y_2] + [X_2, Y_1])$$

Définition 9. Soit \mathfrak{g} une algèbre de lie complexe, une forme réelle de \mathfrak{g} est une sous algèbre de lie réelle $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ telle que le morphisme $\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \rightarrow \mathfrak{g}$ induit par l'inclusion (En appliquant la propriétés universelle) est un isomorphisme.

Soit G un group de lie complexe connexe, $\mathfrak{g} = Lie(G)$ et $H \subset G$ un sous group de lie réelle de G tel que $\mathfrak{h} = Lie(H)$ est une forme réel de \mathfrak{g} , dans ce cas on dit que H est une forme réel de G .

Définition 10. Soient (X, g) une variété pseudo-riemannienne et Y variété différentielle. Une immersion $f : Y \rightarrow X$ est dite de type espace (space-like) si $f^*(g)$ est définie positive (i.e. si $f^*(g)$ est une métrique riemannienne sur Y).

L'object de départ est un espace pseudo-riemannien homogène de la forme $M := G/H$, où G est un groupe de Lie complexe, et H est une forme réelle de G munie d'une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée $\chi : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{R}$, Ad_H -invariante sur son algèbre de Lie \mathfrak{h} i.e.

$$\chi(Ad_h(u), Ad_h(v)) = \chi(u, v).$$

puis on va définir une condition de nulle holomorphie. Le résultat envisagé va établir une correspondance entre les immersions space-like (de type espace) nulle-holomorphes $f : Y \rightarrow$

G et les immersions space-like $\varphi : Y \rightarrow M$ dont la courbure moyenne vectorielle (le champ vectoriel courbure moyenne) est donnée par une formule explicite.

En particulier, ce théorème met en évidence une relation générale entre la courbure moyenne vectorielle d'une immersion space-like $\phi : Y \rightarrow M$ associée à une immersion space-like nulle-holomorphe, et la restriction à Y de la courbure riemannienne (en tant que 2-forme) de M ; cette relation générale devient très simple dans les cas particuliers classiques où M est un espace à courbure constante.

Références

- [AiAk] R. Aiyama, K. Akutagawa : Kenmotsu–Bryant Type Representation Formulas for Constant Mean Curvature Surfaces in $\mathbb{H}^3(-c^2)$ and $S_1^3(c^2)$, *Annals of Global Analysis and Geometry* 17 : 49–75 (1998).
- [Br] R. Bryant : Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space, *Astérisque*, tome 154-155, p. 321-347 (1987).
- [Fu] S. Fujimori : Spacelike CMC 1 surfaces with elliptic ends in de Sitter 3-Space, *Hokkaido Mathematical Journal* Vol. 35, 289–320 (2006).
- [KN] Kobayashi S., Nomizu, K. : *Foundations of Differential Geometry I*, Interscience Publ., New York, Vol. I (1963).
- [Le] S. Lee : Spacelike surfaces of constant curvature ± 1 in the de Sitter 3-space, *Illinois Journal of Mathematics* Volume 49, Number 1, 63–98 (2005).
- [Ze] R. Zentner : Integrable almost complex structures in principal bundles and holomorphic curves, *manuscripta math.* Vol. 141, Issue 1–2, 211–239 (2013) <https://doi.org/10.1007/s00229-012-0570-1>.

NON-ABELIAN PAINLEVÉ EQUATIONS AND THEIR MONODROMY SURFACES

Irina Bobrova ¹

¹ *Max Planck Institute for Mathematics, Inselstraße 22, 04103, Leipzig, Germany;
E-mail ia.bobrova94@gmail.com*

Abstract. We discuss a connection between different linearizations for non-abelian analogs of the second Painlevé equation. For one of the non-abelian analogs, we derive the corresponding non-abelian generalizations of the monodromy surfaces.

Keywords. Non-abelian ODEs, Painlevé equations, isomonodromic Lax pairs, monodromy surfaces.

Introduction

In recent years, quantum, or more generally, non-abelian extensions of various integrable systems have acquired considerable attention. It was motivated by problematics and needs of modern quantum physics as well as by a natural attempts of mathematicians to extend and to generalize the “classical” integrable structures and systems. In particular, the Painlevé transcendents provide a good example of this phenomena. Some examples of integrable non-abelian Painlevé systems are contained in [Kaw15], [BS98], [AS21], [BS22], [RR10], [Adl20], [AK22]. Some of them were found using the existence of special isomonodromy representations or the Painlevé-Kovalevskaya test while several of the systems have been derived from integrable PDEs and lattices by reductions.

The famous Painlevé equations have being studied in various branches of mathematics and mathematical physics and have important properties. It is natural to generalize these properties to the non-abelian case. Here we are interested in non-abelian generalizations of the well-known monodromy surfaces related to different linearizations of the non-commutative analogs for the second Painlevé equation, obtained in [AS21] and labeled by P_2^0 , P_2^1 , and P_2^2 . Below we will briefly present the results from the paper [Bob23]

Setting

We would like to work with an algebra $\hat{\mathcal{A}}$ formed by the generators $x_1^{\pm 1}, \dots, x_N^{\pm 1}$ that is a non-abelian generalization of the Laurent polynomials in the variables x_1, \dots, x_N depending on the variables $t_l, l \in \mathbb{N}$. All elements t_l belong to a center $\mathcal{Z}(\hat{\mathcal{A}})$ of the algebra.

One can define a derivation d_{t_l} on $\hat{\mathcal{A}}$. Note that for any element $F \in \hat{\mathcal{A}}$, the element $d_{t_l}(F)$ is uniquely determined by the Leibniz rule. We use the notation “ ’ ” instead of d_z . Consider the system of non-abelian ODEs

$$d_{t_l}(x_k) = F_k, \quad F_k \in \hat{\mathcal{A}}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (1)$$

If for some k the element F_k depends on t_l explicitly, the system is *non-autonomous*, otherwise – *autonomous*.

Results

In the commutative case, the P_2 equation has two monodromy surfaces of the FN-type and JM-types. The corresponding linearizations are related to each other by a generalized Laplace transformation [JKT09], while the FN-type and HTW-type pairs are just gauge-equivalent [KH99] by the Fabry-type map.

We extend the list of the HTW-type pairs by those obtained in the paper [BS22] by the limiting transitions of the corresponding Lax pairs for the matrix P_4 -type systems. They are given by the HTW $_2^0$ pair for P_2^0 , HTW $_2^1$ and HTW $_2^1$ for P_2^1 , and HTW $_2^2$ for the P_2^2 system. To derive the FN-type pairs from them, one is able to use the same Fabry-type map.

Note that the generalized Laplace transformation can be also extended to the non-abelian case, if we assume that one is able to eliminate terms which arise from the integration-by-parts. But, actually, that is an extra problem to prove that such a contour can be chosen. We leave this issue for a further research. Let all spectral parameters¹ be elements of $\mathcal{Z}(\hat{\mathcal{A}})$.

Proposition 1. *Let functions $W(\mu, z)$ and $Y(\lambda, z)$ be solutions of a linear problem of the form*

$$\begin{cases} \partial_\lambda \Phi(\lambda, z) = \mathbf{A}(\lambda, z) \Phi(\lambda, z), \\ \partial_z \Phi(\lambda, z) = \mathbf{B}(\lambda, z) \Phi(\lambda, z) \end{cases} \quad (2)$$

of the HTW-type and JM-type, respectively. Then the HTW-type pair is equivalent to the JM-type pair by a non-abelian analog of the generalized Laplace transformation:

$$W(\mu, z) = \int_L e^{\lambda \mu} Y(\lambda, z) d\lambda. \quad (3)$$

Thanks to the proposition above, we suggest a method how to construct in the non-abelian case the JM-type pairs from the HTW-pairs. It turns out that the P_2^0 system

¹ λ, μ, ζ .

has a polynomial JM-type pair, the JM_2^0 pair, which can be generalized to a fully non-commutative case. The P_2^1 system has polynomial and non-polynomial JM-type pairs (pairs JM_2^1 and JM_2^1 , respectively). In the case of the P_2^2 system, the JM-pair is degenerate² (see the JM_2^2 pair). As a result, we present for each of the non-abelian P_2 systems linearizations of the HTW, FN, and JM types.

Proposition 2. *The non-abelian P_2^0 , P_2^1 , and P_2^2 systems possess linearizations of the HTW, FN, and JM types.*

To proceed to the non-abelian monodromy surfaces, we need to present a formal solution near a singular point. The following proposition is derived for this purpose.

Proposition 3. *Set $r \geq 0^3$ and $\lambda \in \mathcal{Z}(\hat{\mathcal{A}})$. Let us consider $n \times n$ -matrices $A(\lambda)$, $F(\lambda)$, $D(\lambda)$, $T(\lambda)$ of the form*

$$A(\lambda) = \sum_{k \geq -r} A_k \lambda^{-k-1}, \quad A_{-r} = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad \alpha_i \neq \alpha_j, \quad i \neq j, \quad (4)$$

$$F(\lambda) = \mathbf{I} + \sum_{k \geq 1} F_k \lambda^{-k}, \quad D(\lambda) = \mathbf{I} + \sum_{k \geq 1} D_k \lambda^{-k}, \quad \partial_\lambda T(\lambda) = \sum_{k=-r}^0 T_k \lambda^{-k-1}, \quad (5)$$

where

- (a) $A(\lambda) \in \text{Mat}_n(\hat{\mathcal{A}})$ and $A_{-r} \in \text{Mat}_n(\mathcal{Z}(\hat{\mathcal{A}}))$;
- (b) $F_k \in \text{Mat}_n(\hat{\mathcal{A}})$, $k \geq 1$, are off-diagonal matrices;
- (c) $D_k \in \text{Mat}_n(\hat{\mathcal{A}})$, $k \geq 1$, are diagonal matrices;
- (d) $T_k \in \text{Mat}_n(\mathcal{Z}(\hat{\mathcal{A}}))$, $k = -r, \dots, 1$, and $T_0 \in \text{Mat}_n(\hat{\mathcal{A}})$ are both diagonal matrices;

and suppose that

- (e) the operator $(k\mathbf{I} + \text{ad}_{T_0}) : \text{Mat}_n(\hat{\mathcal{A}}) \rightarrow \text{Mat}_n(\hat{\mathcal{A}})$, $k \geq 1$, is invertible.

Then the system

$$\partial_\lambda \Phi(\lambda) = A(\lambda) \Phi(\lambda) \quad (6)$$

admits a unique⁴ formal solution near an irregular singular point $\lambda = \infty$ that can be written as

$$\Phi_{\text{form}}(\lambda) = F(\lambda) D(\lambda) \exp \left(\sum_{k=1}^r \frac{1}{k} T_{-k} \lambda^k + \ln(\lambda) T_0 \right) \quad \text{as } \lambda \rightarrow \infty. \quad (7)$$

²We follow the terminology suggested in [JKT07], [JKT09].

³ r is called the *Poincaré rank* of an irregular singular point. When $r = 0$, the singular point is Fuchsian.

⁴Up to a conjugation by a non-singular matrix $G \in \text{Mat}_n(\hat{\mathcal{A}})$.

The proposition generalizes Proposition 2.2 in [JM81] to the non-commutative case, whose particular case was discussed in the paper [BCR18]. As a result, the formal solutions of the HTW- and JM-types near infinity were constructed.

Regarding the case of the P_2^0 system, the monodromy surfaces related to the FN_2^0 and JM_2^0 pairs are given in the following

Proposition 4. *Let $x_i, i = 1, 2, 3$, and q belong to $\hat{\mathcal{A}}$, and $\alpha, \theta \in \mathbb{C}$. Then the monodromy surfaces related to the FN_2^0 and JM_2^0 pairs are given by the equations*

$$x_1 x_2 x_3 + x_1 + x_2 + x_3 - 2 \sin(\pi \theta) q^{-1} = 0, \quad (8)$$

$$x_1 x_2 x_3 - x_1 - x_2 (\alpha q^2) - x_3 + (1 + \alpha) q^2 = 0, \quad (9)$$

respectively.

In the commutative setting, $q = 1$ and, thus, the relations above become the well-known affine cubics for the second Painlevé equation. Note also that in the commutative case these equations are equivalent by a simple scaling that cannot be generalized to the non-abelian setting. Regarding the remaining systems P_2^1 and P_2^2 , the monodromy data are not isomonodromic and, thus, we cannot parameterize their solutions by the Stokes multipliers. But, in fact, one can ask about a gauge-transformation that makes the monodromy data isomonodromic. As far as we know, such a transformation does not exist.

References

- [Adl20] V. E. Adler. Painlevé type reductions for the non-Abelian Volterra lattices. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 54(3):035204, 2020. arXiv:2010.09021.
- [AK22] V. E. Adler and M. P. Kolesnikov. Non-Abelian Toda lattice and analogs of Painlevé III equation. *J. Math. Phys.*, 63:103504, 2022. arXiv:2203.09977.
- [AS21] V. E. Adler and V. V. Sokolov. On matrix Painlevé II equations. *Theoret. and Math. Phys.*, 207(2):188–201, 2021. arXiv:2012.05639.
- [BCR18] M. Bertola, M. Cafasso, and V. Rubtsov. Noncommutative Painlevé equations and systems of Calogero type. *Communications in Mathematical Physics*, 363(2):503–530, 2018. arXiv:1710.00736.
- [Bob23] I. Bobrova. Different linearizations of non-abelian second Painlevé systems and related monodromy surfaces. *arxiv preprint arXiv:2302.10694*, 2023.
- [BS98] S. P. Balandin and V. V. Sokolov. On the Painlevé test for non-Abelian equations. *Physics letters A*, 246(3-4):267–272, 1998.

-
- [BS22] I. A. Bobrova and V. V. Sokolov. On matrix Painlevé-4 equations. *Nonlinearity*, 35(12):6528, nov 2022. arXiv:2107.11680, arXiv:2110.12159.
- [JKT07] N. Joshi, A. V. Kitaev, and P. A. Treharne. On the linearization of the Painlevé III–VI equations and reductions of the three-wave resonant system. *Journal of Mathematical Physics*, 48(10):103512, 2007. arXiv:0706.1750v3.
- [JKT09] N. Joshi, A. V. Kitaev, and P. A. Treharne. On the linearization of the first and second Painlevé equations. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 42(5):055208, 2009. arXiv:0806.0271v1.
- [JM81] M. Jimbo and T. Miwa. Monodromy perserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. I. General theory and τ -function. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2(2):306–352, 1981.
- [Kaw15] H. Kawakami. Matrix Painlevé systems. *Journal of Mathematical Physics*, 56(3):033503, 2015.
- [KH99] A. A. Kapaev and E. Hubert. A note on the Lax pairs for Painlevé equations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 32(46):8145, 1999.
- [RR10] V. S. Retakh and V. N. Rubtsov. Noncommutative Toda Chains, Hankel Quasideterminants and Painlevé II Equation. *Journal of Physics. A, Mathematical and Theoretical*, 43(50):505204, 2010. arXiv:1007.4168.

Approche du calcul pseudodifférentiel par les groupoïdes de Lie

Clément Cren
Mathematisches Institut,
Georg-August-Universität Göttingen,
Bunsenstrasse 3-5, D-37073 Göttingen, Germany
clement.cren@u-pec.fr

Résumé

Cet exposé a pour but d'introduire à des travaux récents permettant de définir le calcul pseudodifférentiel sur une variété lisse de manière intrinsèque (i.e. en se passant de cartes locales) à l'aide du groupoïde tangent. Je décrirai principalement l'approche de Debord et Skandalis ayant donné un second souffle au sujet et permettant de définir le calcul pseudodifférentiel de manière intrinsèque et en se passant de distributions. Si le temps le permet, je parlerai d'une partie de mon travail de thèse étendant le résultat de Debord et Skandalis au cas des variétés filtrées et de leur calcul pseudodifférentiel (résultat préalablement obtenue par Ewert via d'autres méthodes). Une conséquence important de cette approche est la décomposition de l'algèbre des symboles dans le calcul filtré généralisant celle d'Epstein et Melrose pour les variétés de contact.

Mots-clefs : Groupoïdes de Lie, groupoïde tangent, calcul pseudodifférentiel, variétés filtrées.

Abstract

I will talk about recent work that allowed to define pseudodifferential calculus on a manifold intrinsically (i.e. without local charts) using the tangent groupoid. I will mainly describe the Debord-Skandalis approach as their definition doesn't use distributions. If time allows it I will talk about a part of my PhD extending the results of Debord and Skandalis to the case of filtered manifolds and their corresponding pseudodifferential calculus (previously obtained by Ewert using other methods). An important byproduct of our method is a generalization of Epstein and Melrose decomposition of the symbol algebra for contact manifolds to the filtered case.

Keywords: Lie groupoids, tangent groupoid, pseudodifferential calculus, filtered manifolds

1 Le groupoïde tangent

Les groupoïdes sont des objets généralisant la notion de groupe pour encoder des symétries de nature plus locale. La multiplication n'y est plus définie pour toute paire d'éléments. Elle est régie par deux applications "source" et "but", $s, r: G \mapsto G^{(0)}$, l'ensemble $G^{(0)}$ est l'ensemble des unités du groupoïde et peut être vu comme sous-ensemble de G . Une multiplication $\gamma_1\gamma_2$ n'est alors définie que si le but de γ_2 est égal à la source de γ_1 (la définition d'un groupoïde nécessite d'autres applications de structure permettant d'encoder aussi l'inversion et ses relations avec la multiplication). Un groupoïde est dit de Lie si G et $G^{(0)}$ et les applications de structure sont lisses et si la source, le but et la multiplication sont des submersions. Un exemple important est donné par le groupoïde des paires. Etant donné une variété M on peut définir une structure de groupoïde sur $M \times M$ avec M comme espace d'unités (vu comme la diagonale dans $M \times M$). Le but et la source sont respectivement la projection sur les premiers et second facteurs. La multiplication de deux couples (x, y) et (z, t) est alors définie lorsque $y = z$ et on a :

$$(x, y)(y, t) = (x, t).$$

Cet exemple est important pour la raison suivante : les groupoïdes de Lie induisent naturellement une opération de convolution sur l'algèbre des fonctions \mathcal{C}^∞ . Si $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M \times M)$ on pose :

$$f * g(x, z) = \int_y f(x, y)g(y, z).$$

Cette opération s'étend aux distributions à support propre et permet de réinterpréter le théorème des noyaux de Schwartz. Les opérateurs sur M sont des distributions sur des distributions sur $M \times M$ et la composition des opérateurs correspond à la convolution des distributions correspondantes.

Dans les années 80, Alain Connes introduit le groupoïde tangent d'une variété M [3]. C'est une déformation au cône normal du groupoïde des paires $M \times M$ le long de sa diagonale. Il s'écrit algébriquement comme :

$$\mathbb{T}M := M \times M \times \mathbb{R}^* \sqcup TM \times \{0\} \rightrightarrows M \times \mathbb{R}.$$

La structure de groupoïde pour $t \neq 0$ est donnée par le groupoïde des paires et la structure de groupoïde en $t = 0$ est donnée par la structure de fibrés en groupes abélien du fibré vectoriel $TM \rightarrow M$. Alain Connes se sert de ce groupoïde pour définir l'application d'indice analytique sans utiliser d'opérateurs (pseudo)différentiels. Ce groupoïde est muni d'une action de zoom : si $\lambda \neq 0$ on pose :

$$\begin{aligned} \alpha_\lambda : (x, y, t) &\mapsto (x, y, \lambda^{-1}t) \\ (x, \xi, 0) &\mapsto (x, \lambda\xi, 0) \end{aligned}$$

2 Algèbre de Schwartz et calcul pseudodifférentiel

Dans leur article [5], Debord et Skandalis utilisent le groupoïde tangent pour définir intrinsèquement les opérateurs pseudodifférentiels. Pour cela ils utilisent l'algèbre de Schwartz associée. C'est une sous-algèbre de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}M)$ telle que si $f = (f_t)_{t \in \mathbb{R}} \in \mathcal{S}(\mathbb{T}M)$ alors pour $t \neq 0$ $f_t \in \mathcal{C}_c^\infty(M \times M)$ et $t \mapsto f_t$ et ses dérivées ont une décroissance

rapide à l'infini. Pour $t = 0$ on a $f_0 \in \mathcal{S}(TM)$ (fibre à fibre la fonction est dans la classe de Schwartz). Debord et Skandalis définissent alors un idéal $\mathcal{J} \subset \mathcal{S}(TM)$ en considérant les fonctions dont la transformée de Fourier à $t = 0$ s'annule sur la section nulle de T^*M à tous les ordres. Ils montrent que si $f \in \mathcal{J}$ et $g \in \mathcal{C}_c^\infty(M \times M)$ alors $\int_0^{+\infty} t^m f_t * g \frac{dt}{t} \in \mathcal{C}_c^\infty(M \times M)$. De plus l'opérateur de convolution par $\int_0^{+\infty} t^{-m} f_t \frac{dt}{t}$ est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre m sur M . Ils montrent aussi une formule explicite pour le symbole principal. Si P_f désigne l'opérateur construit précédemment à partir de f alors on a $\sigma^m(P_f)(x, \xi) = \int_0^{+\infty} t^{-m} \hat{f}_0(x, t\xi) \frac{dt}{t}$.

3 Extension par van Erp-Yuncken et lien entre les constructions

L'idée d'utiliser le groupoïde tangent pour définir le calcul pseudodifférentiel a aussi été exploitée par van Erp et Yuncken d'une autre manière [9]. Ils montrent que les (noyaux des) opérateurs pseudodifférentiels sur M sont exactement les distributions à support propre sur $M \times M$ admettant un prolongement \mathbb{P} à TM qui soit quasi-homogène au sens suivant :

$$\forall \lambda > 0, \alpha_{\lambda*} \mathbb{P} - \lambda^m \mathbb{P} \in \mathcal{C}_p^\infty(TM).$$

Cette définition s'étend alors *mutatis mutandis* aux variétés filtrées. Une variété filtrée est une variété M munie d'une filtration de son fibré tangent :

$$\{0\} = H^0 \subset H^1 \subset \dots \subset H^r = TM,$$

compatible avec le crochet de Lie de champs de vecteurs :

$$\forall i, j \left[\Gamma(H^i), \Gamma(H^j) \right] \subset \Gamma(H^{i+j}).$$

Des exemples notables sont les variétés feuilletées, les variétés de contact et les variétés sous-riemanniennes (équirégulières). Dans ce contexte il est alors naturel de changer la notion d'ordre pour les opérateurs différentiels en considérant les sections de H^j comme étant d'ordre j (notamment pour l'étude des sous-laplaciens). Le symbole principal n'est alors plus une fonction sur l'espace cotangent mais un opérateur de convolution sur une famille naturelle de groupes de Lie nilpotents (gradués) simplement-connexes $T_H M$ associée à la filtration appelée groupoïde osculateur. La condition d'ellipticité est alors remplacée par une condition dite de Rockland portant sur les représentations irréductibles non-triviales de ces groupes osculateurs. Une version du groupoïde tangent pour les variétés filtrées a été développée par de nombreux auteurs. Elle correspond cette fois à déformer le groupoïde des paires sur le groupoïde osculateur (au lieu du fibré tangent). La définition du calcul pseudodifférentiel par van Erp et Yuncken étend alors le calcul de Heisenberg [1] ($r = 2$, i.e. les filtrations de profondeur 2) ou bien celui développé dans le cas où M est lui-même un groupe de Lie nilpotent gradué simplement connexe [2, 8].

Dans l'article [4] on définit une algèbre de Schwartz sur le groupoïde tangent d'une variété filtrée et une variante \mathcal{J}_H de l'idéal \mathcal{J} de Debord et Skandalis. On peut alors réconcilier les deux approches du calcul pseudodifférentiel :

Théorème 3.1 (Ewert [7], C. [4]). Soit $f = (f_t)_{t \in \mathbb{R}} \in \mathcal{J}_H$ alors $\int_0^{+\infty} t^{-m} f_t \frac{dt}{t}$ est un opérateur pseudodifférentiel au sens de van Erp-Yuncken. Son (co)-symbole principal est donné par $\int_0^{+\infty} t^{-m} \alpha_{\lambda^*} f_0 \frac{dt}{t}$.

Une conséquence importante de notre approche est l'obtention d'une décomposition de l'algèbre des symboles principaux. Si $\Sigma^m(T_H M)$ désigne les symboles principaux des opérateurs d'ordre m alors $\Sigma^0(T_H M)$ se prolonge naturellement en une C^* -algèbre (non-commutative) $\Sigma(T_H M)$. Nous en obtenons la décomposition suivante :

Théorème 3.2 (C. [4]). Soit G un groupe de Lie nilpotent simplement connexe. L'algèbre $\Sigma(G)$ se décompose en une suite d'idéaux imbriqués :

$$\{0\} = \Sigma_0 \triangleleft \Sigma_1 \triangleleft \cdots \triangleleft \Sigma_r = \Sigma(G),$$

où

$$\forall i \geq 1, \Sigma_i / \Sigma_{i-1} \cong \mathcal{C}_0 \left(\Lambda_i / \mathbb{R}_+^*, \mathcal{K}_i \right).$$

Ici Λ_i est un sous-ensemble des représentations irréductibles non-triviales de G (muni de la topologie de Jacobson) tel que les $\Lambda_i / \mathbb{R}_+^*$ soient localement compacts (séparés). Les \mathcal{K}_i correspondent aux algèbres des opérateurs compacts sur des espaces de Hilbert séparables (de dimension infinie pour $i < r$ et de dimension 1 pour $i = d$).

Références

- [1] Richard Beals and Peter Greiner. *Calculus on Heisenberg Manifolds*. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, 1988.
- [2] Michael Christ, Daryl Geller, Paweł Głowacki, and Larry Polin. Pseudodifferential operators on groups with dilations. *Duke Mathematical Journal*, 68(1) :31 – 65, 1992.
- [3] Alain Connes. *Noncommutative Geometry*. Elsevier Science, 1994.
- [4] Clément Cren. Filtered calculus and crossed products by R-actions, 2023.
- [5] Claire Debord and Georges Skandalis. Adiabatic groupoid, crossed product by \mathbb{R}_+^* and pseudodifferential calculus. *Advances in Mathematics*, 257 :66 – 91, 2014.
- [6] Charles Epstein and Richard Melrose. The Heisenberg algebra, index theory and homology. Unpublished manuscript, available at <https://math.mit.edu/~rbm/book.html>.
- [7] Eske Ewert. Pseudodifferential operators on filtered manifolds as generalized fixed points. *J. Noncommut. Geom.*, 17(1) :333–383, 2023.
- [8] Clotilde Fermanian-Kammerer and Véronique Fischer. Defect measures on graded Lie groups. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 21 :207–291, 2020.
- [9] Erik van Erp and Robert Yuncken. A groupoid approach to pseudodifferential operators. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 756(6) :151–182, Nov 2019.

ÉQUIVALENCE ORBITALE QUANTITATIVE

Amandine Escalier¹

¹ *Institut de Mathématique d'Orsay*

Bâtiment 307

Faculté des Sciences d'Orsay

Université Paris-Saclay

F-91405 Orsay Cedex

France

amandine.escalier@universite-paris-saclay.fr

Résumé. On dit que deux groupes sont orbitalement équivalents si tous deux agissent sur un même espace de probabilité en partageant les mêmes orbites. Un célèbre résultat d'Ornstein et Weiss stipule que tout groupe moyennable infini, de type fini est orbitalement équivalent à \mathbb{Z} . Autrement dit : l'équivalence orbitale ne tient pas compte de la géométrie des groupes. C'est pourquoi dans un récent article Delabie, Koivisto, Le Maître et Tessera proposent d'affiner cette relation avec une version quantitative de l'équivalence orbitale. Ils obtiennent en outre des obstructions à l'existence de telles équivalences à l'aide du profil isopérimétrique.

Après avoir présenté la version quantitative de l'équivalence orbitale, nous nous intéresserons dans cet exposé au problème inverse de la quantification, à savoir : peut-on trouver un groupe qui est orbitalement équivalent à un groupe prescrit avec quantification prescrite ? Nous proposerons une réponse dans le cas d'une équivalence orbitale avec \mathbb{Z} et discuterons l'optimalité des résultats.

Mots-clés. Théorie mesurée des groupes, théorie géométrique des groupes, théorie ergodique, dynamique, équivalence orbitale, profil isopérimétrique, groupes d'allumeurs de réverbères.

Abstract. We say that two groups are orbit equivalent if they both act on a same probability space with the same orbits. A famous result of Ornstein and Weiss states that all infinite amenable groups are orbit equivalent to \mathbb{Z} . In other words : orbit equivalence does not take into account the geometry of groups. For this reason Delabie, Koivisto, Le Maître and Tessera offer in a recent article to refine this relations with a quantitative version of orbit equivalence. They obtain obstructions to the existence of such equivalence using isoperimetric profile.

After defining the quantitative version of orbit equivalence we will focus in this talk on the "inverse problem", namely : can we find a group that is orbit equivalent to a prescribed group with prescribed quantification ? We will answer this question in the case of a prescribed equivalence with \mathbb{Z} and discuss the optimality of the results.

Keywords. Measured group theory, geometric group theory, ergodic theory, dynamics, orbit equivalence, isoperimetric profile, lamplighter group.

Dans cet exposé, nous étudierons les liens entre la géométrie des groupes et leur comportement du point de vue de la dynamique mesurée et plus spécifiquement d'une notion d'équivalence appelée équivalence orbitale. Les résultats présentés sont ceux démontrés dans Escalier (2022).

1 Équivalence orbitale

Nous étudions ici une notion de théorie ergodique appelée *équivalence orbitale*. Cette notion s'intéresse à la structure des orbites sous l'action d'un groupe donnée, plus précisément à la *partition* en orbite de l'espace sur lequel un groupe agit.

Pour le dire plus formellement, deux groupes de type fini G et H sont dits **orbitalement équivalents** s'il existe un espace de probabilité (X, μ) et des actions libres de G et H sur X préservant la mesure qui ont les mêmes orbites, *i.e.* telles que pour presque tout $x \in X$ on ait $G \cdot x = H \cdot x$.

Les exemples auxquels nous nous intéressons dans cet exposé font partie de la famille des groupes dits *moyennables*.

Le cas des groupes moyennable On dira qu'un groupe de type fini G engendré par une partie finie S est **moyennable** s'il existe une suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-ensembles finis de G tels que la proportion d'éléments au bord¹ de F_n tend vers 0, *i.e.* $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\partial_S F_n|/|F_n| = 0$. On dit alors que $(F_n)_n$ est une **suite de Følner**. On peut par exemple penser à la suite d'intervalles $F_n := [0, n]$ dans \mathbb{Z} .

Il existe de nombreuses autres définitions équivalentes de la moyennabilité, mais ce qui est important ici n'est pas tant la définition de cette notion que la **diversité** géométrique de la famille des groupes moyennables infinis. Par exemple, on y trouve aussi bien des groupes à croissances polynomiales — tels que \mathbb{Z}^d ou le groupe de Heisenberg — que des groupes à croissance exponentielle — comme par exemple les groupes d'allumeur de réverbères.

À l'inverse, du point de vue de l'équivalence orbitale, cette famille se compose d'une et une seule classe d'équivalence. En effet un célèbre théorème d'Ornstein et Weiss (1987) stipule que tout groupe infini moyennable est orbitalement équivalent au groupe des entiers. Ainsi la relation d'équivalence orbitale ne distingue-t-elle pas les groupes moyennables : cette relation n'est pas sensible à la géométrie. Il est dès lors naturel de se demander si l'on peut *affiner* cette relation afin de *distinguer* les groupes moyennables.

1. Le bord relativement à la partie génératrice S est $\partial_S F_n = \{x \in F_n \mid \exists s \in S, sx \notin F_n\}$.

2 Quantification et géométrie

Lorsque deux groupes agissent sur un même espace X avec les mêmes orbites nous pouvons, en menant le niveau d'étude un peu plus loin, comparer ces deux groupes : en comparant la manière qu'ils ont d'agir à l'intérieur d'une même orbite nous pouvons faire un lien entre leurs géométries respectives. C'est ce que l'on dénomme « équivalence orbitale quantitative ».

Équivalence orbitale quantitative Pour formaliser cette quantification on munit d'une **distance** l'espace sur lesquels nos groupes agissent. Ainsi, étant donné un groupe de type fini $G = \langle S_G \rangle$ agissant sur un espace X , on définit le **graphe de Schreier** associé à l'action comme étant le graphe dont les sommets sont les éléments de X et les arêtes sont données par $\{(x, s \cdot x) \mid x \in X, s \in S_G\}$. Deux exemples sont représentés en figure 1. Un autre exemple classique est donné par le graphe de Cayley de G : c'est le graphe de Schreier correspondant à l'action de G sur lui-même par translation. En munissant le graphe de Schreier de la distance usuelle fixant à 1 la longueur d'une arête on obtient donc une distance sur X notée d_{S_G} . De cette manière l'information *dynamique* donnée par l'action est traduite en une information *géométrique* : la représentation de l'action sous forme de graphe.

Si $G = \langle S_G \rangle$ et $H = \langle S_H \rangle$ sont orbitalement équivalents nous pouvons alors considérer les graphes de Schreier (X, S_G) et (X, S_H) associés à chacune des actions. L'idée derrière la quantification est la suivante : si un générateur h de H agit sur un sommet x , alors $h \cdot x$ sera un voisin de x dans (X, S_H) (par définition de (X, S_H)). En revanche, dans (X, S_G) la distance entre ces deux mêmes sommets peut-être plus grande (cf. figure 1).

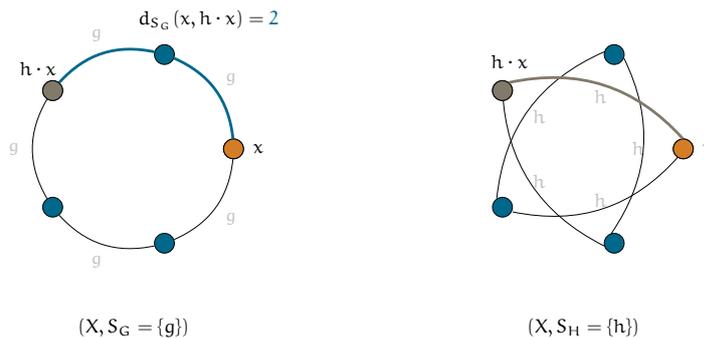


FIGURE 1 – Graphes de Schreier et comparaison de distances

C'est l'étude de cette distance qui va nous permettre de quantifier l'équivalence orbitale. Lorsque G et H sont orbitalement équivalents, ces distances sont à valeurs finies. Pour affiner cette relation on considère les *applications* distances données par $x \mapsto d_{S_G}(x, h \cdot x)$ où $h \in S_H$ et $x \mapsto d_{S_H}(x, g \cdot x)$ où $g \in S_G$ et cherchons à quantifier leur intégrabilité. C'est

ainsi qu'apparaît une première notion d'équivalence orbitale quantitative : lorsque les deux applications distances sont dans L^p , on dit que l'équivalence orbitale est **L^p -intégrable**.

Delabie, Koivisto, Le Maître et Tessera (2020) étendent cette notion de quantification à un plus large panel d'intégrabilités.

Soient G et H deux groupes de types finis orbitalement équivalents sur un espace de probabilité (X, μ) et $\varphi, \psi : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ deux fonctions croissantes non-bornées. On dit que l'équivalence orbitale est **(φ, ψ) -intégrable** si pour tout $g \in S_G$ et tout $h \in S_H$

$$\int_X \varphi(d_{S_H}(x, g \cdot x)) d\mu(x) < +\infty \quad \int_X \psi(d_{S_G}(x, h \cdot x)) d\mu(x) < +\infty.$$

Par exemple, Delabie, Koivisto, Le Maître et Tessera (2020) montrent que pour tout $n \geq 2$, le groupe d'allumeur de réverbères $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ et le groupe de Baumslag-Solitar $BS(1, n)$ admette une équivalence orbitale (L^∞, \exp) -intégrable. Autrement dit : nous avons ici deux groupes géométriquement très proches qui produisent une équivalence orbitale à l'intégrabilité excellente. Ceci est une première illustration du bon comportement de l'équivalence orbitale quantitative vis-à-vis de la géométrie. Mais ceci se traduit aussi à travers d'autres résultats, par exemple la monotonie du profil isopérimétrique.

Profil Isopérimétrique Rappelons que le but originel était de rendre l'équivalence orbitale sensible à la géométrie. Un exemple d'une telle sensibilité est donné par l'étude du comportement du profil isopérimétrique. Le **profil isopérimétrique** d'un groupe $G = \langle S \rangle$, noté I_G , est défini comme

$$I_G(n) := \sup_{|A| \leq n} |A|/|\partial_S A|.$$

Delabie, Koivisto, le Maître et Tessera (2020) montrent que s'il existe une équivalence orbitale (φ, L^0) -intégrable de G vers H et si φ et $x \mapsto x/\varphi(x)$ sont croissantes alors $\varphi \circ I_H \preceq I_G$.

Ainsi, l'équivalence orbitale quantitative est sensible à la donnée géométrique qu'est le profil isopérimétrique : si les profils de nos deux groupes sont très différents alors l'intégrabilité ne peut être excellente. En particulier, dès lors que les profils de nos deux groupes G et H sont connus, nous disposons d'une borne supérieure à l'intégrabilité possible d'une équivalence orbitale entre G et H .

Par exemple, le profil isopérimétrique de \mathbb{Z} vérifie $I_{\mathbb{Z}}(x) \simeq x$ et celui de \mathbb{Z}^2 vérifie $I_{\mathbb{Z}^2}(x) \simeq x^{1/2}$. Ainsi le théorème précédent nous dit que toute équivalence orbitale (φ, L^0) -intégrable de \mathbb{Z}^2 vers \mathbb{Z} doit vérifier $\varphi(x) \preceq x^{1/2}$. Plus généralement, si l'on a une équivalence orbitale (φ, L^0) -intégrable d'un groupe G vers \mathbb{Z} alors φ doit croître moins vite que I_G .

Delabie et al. (2020) posent ainsi la question suivante : existe-t-il un groupe G tel que l'on ait une équivalence orbitale (I_G, L^0) -intégrable de G vers \mathbb{Z} ?

3 Problème inverse

Le problème au cœur des résultats présentés ici est le problème dit « inverse » de la quantification c'est à dire : étant donné un groupe H et une fonction croissante φ , existe-t-il un groupe G admettant un couplage (φ, L^0) -intégrable avec H ? Autrement dit, peut-on *prescrire* le degré de ressemblance des deux actions ? Enfin, le théorème sur les profils isopérimétrique susmentionné soulève la question de l'optimalité suivante :

Existe-t-il un groupe G admettant un couplage (φ, L^0) -intégrable avec H et vérifiant $I_G = \varphi \circ I_H$?

Nous proposons dans cet exposé de répondre au problème inverse dans le cadre d'équivalence avec le groupe des entiers en présentant le résultat suivant. Notons que l'équivalence orbitale donnée par ce théorème est optimale (à un facteur logarithmique près).

Théorème [Escalier (2022)] Pour toute fonction croissante non-bornée $\varphi : [1, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$ telle que $\log(x)/\varphi(x)$ est croissante il existe un groupe G tel que

- $I_G \simeq \varphi$
- Il existe une équivalence orbitale de G vers \mathbb{Z} qui est $(\varphi_\varepsilon, L^0)$ -intégrable pour tout $\varepsilon > 0$, où $\varphi_\varepsilon(x) := \varphi(x)/(\log \circ \varphi(x))^{1+\varepsilon}$.

Bibliographie

Delabie, T. and Koivisto, J and Le Maître, F. and Tessera, R. (2020) *Quantitative measure equivalence*, arXiv :2002.00719.

Escalier, A. (2022), *Building prescribed quantitative orbit equivalence with the group of integers*, arxiv :2202.10312 (À paraître dans Groups, Geometry and dynamics).

Ornstein, D.S. and Weiss, B. (1987) Entropy and isomorphism theorems for actions of amenable groups, *Journal d'Analyse Mathématique*, 48(1), pp. 1–141.

Autour du problème du sous-espace invariant

Noémie Fougnes (Université de Mons)

Résumé Ayant commencé ma thèse cette année académique 2023-2024, j'aborderai principalement lors de cet exposé les travaux que j'ai effectués durant mon mémoire de Master. Ce dernier concerne le problème du sous-espace invariant. C'est un problème bien connu en théorie des opérateurs. Il s'énonce de la manière suivante : si X est un espace de Banach complexe séparable de dimension infinie réflexif, un opérateur linéaire borné T défini sur X possède-t-il toujours un sous-espace fermé invariant non trivial ? Rappelons qu'un sous-espace M est dit invariant pour un opérateur T si $T(M) \subseteq M$. De plus, on dit qu'il est non trivial si $M \neq \{0\}$ et si $M \neq X$. Notons que si X est un espace non séparable ou de dimension finie plus grande ou égale à deux, il existe pour chaque opérateur T linéaire borné défini sur X , un sous-espace invariant fermé non trivial. De plus, on sait qu'il existe des opérateurs étant définis sur des espaces non réflexifs et ne possédant aucun sous-espace invariant fermé non trivial. C'est par exemple le cas pour l'espace ℓ^1 ([2]). Le problème actuel se restreint donc à l'énoncé ci-dessus.

Un des résultats les plus importants concernant le problème du sous-espace invariant est le théorème de Lomonosov. Celui-ci affirme que s'il existe un opérateur compact non nul commutant avec un opérateur linéaire borné T , alors ce dernier possède un sous-espace fermé hyperinvariant non trivial. On dit d'un sous-espace qu'il est hyperinvariant pour un opérateur T s'il est invariant pour tous les opérateurs commutant avec T . Ce théorème a été démontré par Lomonosov en 1973 ([1]). Ce résultat a été un grand tournant dans l'histoire du problème du sous-espace invariant. Il a permis d'introduire une nouvelle technique de preuve basée sur un théorème de point fixe : le théorème du point fixe de Schauder. Il a également amené un grand nombre d'extensions dont les preuves reposent sur des méthodes similaires.

Dans cet exposé, nous abordons également une nouvelle question proche du problème classique du sous-espace invariant. Elle concerne les sous-espaces presque invariants. Tout d'abord, on dit qu'un sous-espace M est presque invariant pour T s'il existe un opérateur F de rang fini tel que M est invariant pour $T + F$. L'idée de ce nouveau problème est de laisser plus de liberté au problème classique du sous-espace invariant. Cette liberté implique assez facilement que tout sous-espace de dimension finie ou de codimension finie est presque invariant. On peut cependant se demander si tout opérateur linéaire borné défini sur un espace de Banach complexe de dimension infinie possède un sous-espace presque invariant

qui soit à la fois de dimension et de codimension infinies. Ce problème a été résolu par Tcaciuc en 2019 ([3]). La preuve de ce résultat se découpe en trois parties. Le théorème est d'abord démontré dans le cas où $\partial\sigma(T)\setminus\sigma_p(T)$ est non vide et ensuite dans le cas où $\partial\sigma(T^*)\setminus\sigma_p(T^*)$ est non vide. La preuve se conclut avec le cas où on suppose que $\sigma(T)$ et $\sigma(T^*)$ ne possèdent que des valeurs propres.

Durant ma thèse, un des objectifs est d'essayer d'étendre le résultat obtenu par Tcaciuc aux espaces de Fréchet. Pour rappel, les espaces de Fréchet généralisent les espaces de Banach en permettant à la topologie d'être induite par une suite de seminormes et pas juste par une unique norme. Étant donné que les preuves de Tcaciuc reposent sur des arguments de théorie spectrale qui ne passent pas aux espaces de Fréchet, il ne sera pas immédiat d'obtenir cette extension.

Mots clés Sous-espace invariant, Analyse fonctionnelle, Théorie des opérateurs, Espace de Banach complexe

References

- [1] V. J. Lomonosov. “Invariant subspaces for operators commuting with compact operators”. In: *Functional Analysis and Its Applications* 7 (1973), pp. 55–56.
- [2] C. J. Read. “A solution to the invariant subspace problem on the space ℓ^1 ”. In: *Bulletin of the London Mathematical Society* 17 (1985), pp. 305–317.
- [3] A. Tcaciuc. “The invariant subspace problem for rank-one perturbations”. In: *Duke Mathematical Journal* 168 (2019), pp. 1539–1550.

UNE INÉGALITÉ ISOSYSTOLIQUE POUR LES TORES DE FINSLER RÉVERSIBLES ET L'AIRE DE BUSEMANN-HAUSDORFF

Florent Balacheff¹ & Teo Gil Moreno de Mora Sardà²

¹ *Departament de Matemàtiques, Facultat de Ciències,
Universitat Autònoma de Barcelona, 08193 Bellaterra, Espanya*
florent.balacheff@uab.cat

² *Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées,
Université Paris-Est Créteil,
61 avenue du Général de Gaulle 94010 Créteil, France*
teo.gil-moreno-de-mora-i-sarda@u-pec.fr

Résumé. En 1949, Loewner prouva une célèbre inégalité : la systole de tout tore riemannien de dimension 2 est contrôlée par son aire. La généralisation de cette inégalité au cadre de la géométrie de Finsler conduit à une grande variété de résultats. Dans cet exposé je présenterai les différentes inégalités isosystoliques connues pour les tores de Finsler bidimensionnels impliquant les deux principales notions d'aire en géométrie de Finsler : l'aire de Busemann-Hausdorff et l'aire de Holmes-Thompson. Je compléterai également le tableau en présentant une nouvelle inégalité isosystolique pour les tores de Finsler réversibles et pour l'aire de Busemann-Hausdorff.

Mots-clés. Aire de Busemann-Hausdorff, aire de Holmes-Thompson, inégalité isosystolique, métrique de Finsler, systole.

Abstract. In 1949, Loewner discovered a much celebrated inequality: the systole of any Riemannian torus of dimension 2 is controlled by its area. The generalization of this inequality to the Finsler framework results in a wide variety of results. In this talk I will survey the different known isosystolic inequalities on two-dimensional Finsler tori involving the two main notions of area in Finsler geometry: the Busemann-Hausdorff area and the Holmes-Thompson area. I will also complete the picture by presenting a new isosystolic inequality on reversible Finsler 2-tori for the Busemann-Hausdorff area.

Keywords. Busemann-Hausdorff area, Holmes-Thompson area, isosystolic inequality, Finsler metric, systole.

1 L'inégalité de Loewner

Soit Σ une surface fermée et non simplement connexe munie d'une métrique riemannienne g . La systole de Σ désigne la plus petite longueur d'une courbe fermée non contractile, et on la note par $\text{sys}(\Sigma, g)$.

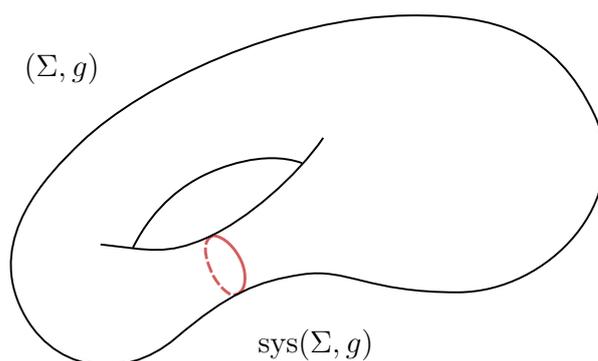


Figure 1: La systole sur une surface (Σ, g) (d'un tore, plus précisément).

Loewner en 1949 (non publié, voir [Gromov 1996] pour une preuve) démontra une propriété des tores riemanniens : la systole de tout tore riemannien (\mathbb{T}^2, g) est toujours contrôlée par son aire $A(\mathbb{T}^2, g)$. Plus précisément, il prouva que pour toute métrique g sur \mathbb{T}^2

$$A(\mathbb{T}^2, g) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sys}^2(\mathbb{T}^2, g), \quad (1)$$

où l'on a égalité si et seulement si (\mathbb{T}^2, g) est un tore plat obtenu comme le quotient du plan euclidien par un réseau hexagonal.

Cette inégalité fut le premier exemple d'inégalité isosystolique (que l'on peut interpréter comme une borne inférieure strictement positive pour le quotient A / sys^2 , souvent appelé aire systolique), et donna naissance à la géométrie systolique, qui vise à généraliser ce type d'inégalités. Une possibilité consiste à étudier si une inégalité de ce type existe lorsque l'on considère une classe plus large de métriques sur le tore, plus précisément, les métriques de Finsler sur \mathbb{T}^2 .

2 Métriques de Finsler

Rappelons qu'une métrique de Finsler F sur \mathbb{T}^2 est la donnée d'une norme¹ $\|\cdot\|_x$ sur chaque espace tangent $T_x\mathbb{T}^2$, de la même façon qu'une métrique riemannienne le munit

¹Contrairement à la convention standard, nous entendons par norme une fonction positive en dehors de l'origine, convexe et positivement homogène, et nous n'exigeons donc pas qu'elle soit symétrique.

d'un produit scalaire. Lorsque chacune de ces normes $\|\cdot\|_x$ est symétrique, on dira que F est réversible.

Comme on pouvait s'y attendre, une métrique de Finsler F continue d'être un objet de nature géométrique. Notamment, elle nous permet de mesurer des longueurs de courbes, et en particulier induit de manière naturelle une notion de systole $\text{sys}(\mathbb{T}^2, F)$. D'autre part, et contrairement au cas riemannien, il n'existe pas de notion d'aire canonique pour les surfaces de Finsler. Nous nous intéresserons à deux des notions d'aire les plus utilisées en géométrie de Finsler : l'aire de Busemann-Hausdorff (qui coïncide avec la mesure de Hausdorff dans le cas réversible) et l'aire de Holmes-Thompson (liée au volume de Liouville), que l'on note respectivement A_{BH} et A_{HT} .

3 Inégalités isosystoliques pour les tores de Finsler

Nous nous intéressons donc à la question suivante : pour une certaine classe \mathcal{F} de métriques de Finsler sur le \mathbb{T}^2 , existe-t-il une constante positive C telle que pour toute métrique F dans \mathcal{F} l'aire systolique vérifie l'inégalité isosystolique suivante

$$\frac{A_*}{\text{sys}^2}(\mathbb{T}^2, F) \geq C \quad (2)$$

où $*$ = BH ou HT?

Si on a égalité pour une certaine métrique de Finsler dans \mathcal{F} , alors on dit que l'inégalité isosystolique est optimale. Si une telle C n'existe pas, on dit que la classe de métriques \mathcal{F} est systoliquement souple. \mathcal{F} pourrait être, par exemple, la classe de métriques de Finsler réversibles sur \mathbb{T}^2 , ou encore la classe de métriques plates.

Table 1: Constantes isosystoliques optimales pour des différentes classes de métriques de Finsler.

	Réversibles	Possiblement non réversibles
Métriques riemanniennes	Loewner 1949 (non publ.) $\sqrt{3}/2$	\times
Métriques Finsler A_{BH}	Ouvert ?	Souplesse systolique 0
Métriques Finsler A_{HT}	[Sabourau 2010] $2/\pi$	[Alvarez - Balacheff - Tzanev 2016] $3/2\pi$

La Table 1 résume les constantes optimales connues pour certaines classes de métriques. Chacune des trois inégalités isystoliques présentées est en fait obtenue par réduction au cas plat, où l'inégalité était préalablement connue.

Nous complétons ensuite le tableau avec le résultat suivant.

Theorem 1 ([Balacheff - S 2023]) *Soit F une métrique de Finsler réversible sur \mathbb{T}^2 . Alors on a l'inégalité isosystolique optimale suivante:*

$$A_{\text{BH}}(\mathbb{T}^2, F) \geq \frac{\pi}{4} \text{sys}^2(\mathbb{T}^2, F) \quad (3)$$

pour laquelle on a égalité si (\mathbb{T}^2, F) est obtenu comme le quotient de \mathbb{R}^2 muni de la norme infini $\|\cdot\|_\infty$ par l'action par des translations de \mathbb{Z}^2 .

Bibliographie

- [Alvarez - Balacheff - Tzanev 2016] J.C. Alvarez Paiva, F. Balacheff and K. Tzanev: *Isosystolic inequalities for optical hypersurfaces*. Advances in Mathematics **301** (2016), 934-972.
- [Balacheff - S 2023] F. Balacheff and T. G. M. M. Sardà: *Isosystolic inequalities on Finsler 2-tori*. arXiv preprint (2023) arXiv:2201.05010v2
- [Gromov 1996] M. Gromov: *Systoles and intersystolic inequalities*. Seminaires et Congrès, Soc. Math. France **1** (1996), 291-362.
- [Sabourau 2010] S. Sabourau: *Local extremality of the Calabi-Croke sphere for the length of the shortest closed geodesic*. Journal of the London Math. Soc. **82** (2010), 549-562.

PROCÉDURE DE TEST POUR L'AUTO-CALIBRATION BASÉE SUR LES COURBES DE LORENZ ET DE CONCENTRATION

Huyghe Julie¹ & Julien Trufin² & Thomas Verdebout³

¹ *Department of Mathematics Université Libre de Bruxelles (ULB) Brussels, Belgium - julie.huyghe@ulb.be*

² *Department of Mathematics Université Libre de Bruxelles (ULB) Brussels, Belgium - julien.trufin@ulb.be*

² *Department of Mathematics Université Libre de Bruxelles (ULB) Brussels, Belgium - thomas.verdebout@ulb.be*

1 Courbes de Lorentz, de concentration et auto-calibration.

Nous considérons dans ce travail un contexte de régression classique dans lequel on a (i) une variable aléatoire **réponse** Y à valeurs réelles et (ii) un ensemble de **caractéristiques** X_1, \dots, X_p regroupées dans un vecteur aléatoire \mathbf{X} à valeurs dans \mathbb{R}^p . La structure de dépendance à l'intérieur du vecteur aléatoire (Y, X_1, \dots, X_p) est ici exploitée pour extraire l'information contenue dans \mathbf{X} à propos de Y . Soit

$$\mu(\mathbf{X}) = \mathbb{E}[Y|\mathbf{X}]$$

l'espérance conditionnelle de Y sachant \mathbf{X} et soit

$$\begin{aligned} \hat{m} : \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &\rightarrow \hat{m}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

un estimateur de $\mathbb{E}[Y|\mathbf{X} = \mathbf{x}]$. On peut associer à cet estimateur \hat{m} , deux courbes qui seront importantes ici:

- la **courbe de concentration** de $\mu(\mathbf{X})$ par rapport à $\hat{m}(\mathbf{X})$ définie par

$$\alpha \mapsto \text{CC}[\mu(\mathbf{X}), \hat{m}(\mathbf{X}); \alpha] = \frac{\mathbb{E}[\mu(\mathbf{X})I[\hat{m}(\mathbf{X}) \leq F_{\hat{m}}^{-1}(\alpha)]]}{\mathbb{E}[\mu(\mathbf{X})]}, \quad \alpha \in (0, 1),$$

où $F_{\hat{m}}^{-1}$ est la fonction quantile associée à $\hat{m}(\mathbf{X})$ et

- la **courbe de Lorenz** associée à $\hat{m}(\mathbf{X})$ définie par

$$\begin{aligned} \alpha \mapsto \text{LC}[\hat{m}(\mathbf{X}); \alpha] &= \text{CC}[\hat{m}(\mathbf{X}), \hat{m}(\mathbf{X}); \alpha] \\ &= \frac{\mathbb{E}[\hat{m}(\mathbf{X})I[\hat{m}(\mathbf{X}) \leq F_{\hat{m}}^{-1}(\alpha)]]}{\mathbb{E}[\hat{m}(\mathbf{X})]}, \quad \alpha \in (0, 1). \end{aligned}$$

En assurance, L'estimateur \hat{m} de la fonction de régression a pour objectif d'être utilisée comme un prime et il est donc naturel que la somme des primes correspondent le plus possible a la somme des pertes réelles. Ceci conduit naturellement au concept d'autocalibration. L'estimateur \hat{m} est dit auto-calibré si et seulement si

$$E[Y|\hat{m}(\mathbf{X}) = m] = m$$

pour tout $m \in \mathbb{R}$. Comme nous allons le décrire dans la prochaine Section, les courbes de concentration et de Lorenz vont être utilisée pour tester l'auto-calibration. Plus précisément, nous fournissons ci-dessous un test fondé sur la comparaison de fonctions aléatoires.

1.1 Procédure de test pour l'auto-calibration

Nous avons que

$$CC[\mu(\mathbf{X}), \hat{m}(\mathbf{X}); \alpha] = LC[\hat{m}(\mathbf{X}); \alpha] \text{ pour tout } \alpha$$

si et seulement si la version non-biaisée de \hat{m} donnée par $\hat{m}_{\text{unbiased}}(\mathbf{X}) := \frac{E[Y]}{E[\hat{m}(\mathbf{X})]} \hat{m}(\mathbf{X})$ est auto-calibrée. Nous utilisons ci-dessous cette caractérisation en comparant des version empirique des courbes de concentration et de Lorenz. Cette caractérisation de l'auto-calibration via les courbes de performance nous permet de proposer une procédure de test pour l'auto-calibration à partir de n copies i.i.d. $(Y_1, \mathbf{X}_1), \dots, (Y_n, \mathbf{X}_n)$ de (Y, \mathbf{X}) . Plus précisément, nous souhaitons tester l'hypothèse nulle :

$$\mathcal{H}_0 : CC[\mu(\mathbf{X}), \hat{m}(\mathbf{X}); \alpha] = LC[\hat{m}(\mathbf{X}); \alpha] \text{ pour tout } \alpha \in (0, 1)$$

contre l'hypothèse alternative :

$$\mathcal{H}_1 : CC[\mu(\mathbf{X}), \hat{m}(\mathbf{X}); \alpha] \neq LC[\hat{m}(\mathbf{X}); \alpha] \text{ pour un } \alpha \in (0, 1).$$

La procédure de test est donc naturellement basée sur la différence entre les versions empiriques des courbes de Lorenz et de concentration, définies comme suit :

$$\widehat{CC}[\mu(\mathbf{X}), \hat{m}(\mathbf{X}); \alpha] = \frac{1}{n\bar{Y}} \sum_{i=1}^n Y_i I[\hat{m}(\mathbf{X}_i) \leq F_{\hat{m}}^{-1}(\alpha)], \quad \alpha \in (0, 1),$$

et

$$\widehat{LC}[\hat{m}(\mathbf{X}); \alpha] = \frac{1}{n\bar{m}} \sum_{i=1}^n \hat{m}(\mathbf{X}_i) I[\hat{m}(\mathbf{X}_i) \leq F_{\hat{m}}^{-1}(\alpha)], \quad \alpha \in (0, 1).$$

Plus précisément, l'hypothèse nulle est rejetée pour de grandes valeurs de la statistique de test suivante :

$$\mathcal{T} = \sup_{\alpha \in (0,1)} |T_n(\alpha)|,$$

où

$$\begin{aligned} T_n(\alpha) &= \sqrt{n} \left(\widehat{\text{CC}}[\mu(\mathbf{X}), \widehat{m}(\mathbf{X}); \alpha] - \widehat{\text{LC}}[\widehat{m}(\mathbf{X}); \alpha] \right) \\ &= n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{Y_i}{\bar{Y}} - \frac{\widehat{m}(\mathbf{X}_i)}{\bar{m}} \right) I[\widehat{m}(\mathbf{X}_i) \leq F_{\bar{m}}^{-1}(\alpha)] \end{aligned}$$

On peut ensuite dériver le comportement asymptotique du processus $T_n(\alpha)$. En supposant que $(Y_i, \widehat{m}(\mathbf{X}_i))$, $i = 1, 2, \dots, n$, sont tels que : $E[Y_i] \neq 0$, $E[\widehat{m}(\mathbf{X}_i)] \neq 0$, $E[\widehat{m}^2(\mathbf{X}_i)] < \infty$ et $E[Y_i^2] < \infty$. Alors sous l'hypothèse nulle, $T_n(\alpha)$ converge vers un processus gaussien de moyenne zero et de covariance

$$\mathcal{C}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{v}'(\alpha_1, \alpha_2) \boldsymbol{\Sigma}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{v}(\alpha_1, \alpha_2).$$

avec (en supposant que toutes ces quantités existent et sont finies) :

$$Z_i(\alpha) = Y_i I[\widehat{m}(\mathbf{X}_i) \leq F_{\bar{m}}^{-1}(\alpha)] \text{ and } W_i(\alpha) = \widehat{m}(\mathbf{X}_i) I[\widehat{m}(\mathbf{X}_i) \leq F_{\bar{m}}^{-1}(\alpha)].$$

$\boldsymbol{\Sigma}(\alpha_1, \alpha_2)$ la matrice de covariance du vecteur aléatoire

$$(\widehat{m}(\mathbf{X}_i), Y_i, Z_i(\alpha_1), W_i(\alpha_1), Z_i(\alpha_2), W_i(\alpha_2))'$$

pour $(\alpha_1, \alpha_2) \in (0, 1)^2$, et enfin

$$\mathbf{v}(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{pmatrix} -\frac{e_w(\alpha_1)}{e_m^2} & -\frac{e_z(\alpha_1)}{e_y^2} & e_y^{-1} & e_m^{-1} & 0 & 0 \\ -\frac{e_w(\alpha_2)}{e_m^2} & -\frac{e_z(\alpha_2)}{e_y^2} & 0 & 0 & e_y^{-1} & e_m^{-1} \end{pmatrix}' ,$$

où

$$e_y = E[Y_i], \quad e_m = E[\widehat{m}(\mathbf{X}_i)], \quad e_z(\alpha) = E[Z_i(\alpha)] \text{ and } e_w(\alpha) = E[W_i(\alpha)].$$

La procédure de test rejette donc l'hypothèse nulle si $\mathcal{T} > c_\beta$ où β est un niveau de confiance fixé tel que $P[\sup_{\alpha \in (0,1)} |T_n(\alpha)| > c_\beta] = \beta$ sous l'hypothèse nulle. On ne peut pas calculer c_β car la distribution de $(Y_i, \widehat{m}(\mathbf{X}_i))$ reste inconnue. Nous utilisons néanmoins ce résultat pour fournir une procédure bootstrap.

Bibliographie

Yitzhaki, S., Schechtman, E. (2013). The Gini Methodology: A Primer on Statistical Methodology. Springer.

Krüger, F., Ziegel, J.F. (2021). Generic conditions for forecast dominance. *Journal of Business & Economic Statistics* 39, 972-983.

Frees, E.W., Meyers, G., Cummings, A.D. (2011). Summarizing insurance scores using a Gini index. *Journal of the American Statistical Association* 106, 1085-1098.

Denuit, M., Sznajder, D., Trufin, J. (2019). Model selection based on Lorenz and Concentration curves, Gini indices and convex order. *Insurance: Mathematics and Economics* 89, 128-139.

STRUCTURES RÉELLES SUR LES SURFACES DE HOPF PRIMAIRES

ZAHRAA KHALED

RÉSUMÉ. Le premier objectif est de donner une classification complète (à bi-holomorphismes Réels) des surfaces de Hopf primaires Réelles (H, s) , et, pour chaque paire de ce type, de décrire en détail le groupe $\text{Aut}_h(H, s)$ des automorphismes holomorphes Réels.

Notre deuxième objectif est la classification des surfaces de Hopf primaires Réelles à difféomorphismes équivariants, ce qui nous permettra de décrire explicitement dans chaque cas le lieu réel $H(\mathbb{R}) = H^s$ et le quotient $H/\langle s \rangle$.

Définition 0.1. *Soit V un espace vectoriel réel. Une structure presque complexe sur V est un endomorphisme $J \in \text{End}(V)$, vérifiant $J^2 = -id_V$.*

Soit (V, J) un espace vectoriel réel muni d'une structure presque complexe. La multiplication $\mathbb{C} \times V \rightarrow V$ définie par

$$(x + iy).v = xv + yJ(v)$$

donne une structure de \mathbb{C} -espace vectoriel sur V . Réciproquement, si V est un \mathbb{C} -espace vectoriel, alors l'endomorphisme $J \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ défini par $J(v) = iv$ définit une structure presque complexe. En conclusion

Remarque 0.2. *Soit V un espace vectoriel réel. Les données suivantes sont équivalentes :*

- (1) *Une structure d'espace vectoriel complexe qui étend sa structure d'espace vectoriel réel.*
- (2) *Une structure presque complexe sur V .*

Définition 0.3. *Soit M une variété différentiable réelle de dimension $2n$. Une structure presque complexe sur M est la donnée d'une application différentiable J , qui à chaque point $x \in M$ associe une structure presque complexe $J_x \in \text{End}(T_x M)$. Une variété presque complexe est une paire (M, J) , où J est une structure presque complexe sur M .*

La condition de différentiabilité peut être formulée de la manière suivante : une carte locale $f : U_f \rightarrow V_f \subset \mathbb{R}^{2n}$ induit une famille de champs tangents (ξ_1, \dots, ξ_{2n}) sur U_f telle que pour tout $x \in U_f$, la famille $(\xi_1(x), \dots, \xi_{2n}(x))$ est une base de $T_x U_f$. En exprimant $T_x U_f$ dans cette base, on obtient une matrice carrée $\mathbb{J}^f(x) \in M_{2n, 2n}(\mathbb{R})$. La différentiabilité de J est équivalente à la différentiabilité de l'application

$$\mathbb{J}^f \circ f^{-1} : V_f \rightarrow M_{2n, 2n}(\mathbb{R})$$

pour toute carte f de M .

Une question naturelle se pose : Soit (M, J) une variété presque complexe. Est ce que J est associée à une structure complexe (donc à un atlas maximal holomorphe) sur M ? La réponse est donnée dans le théorème fondamental suivant :

1

Théorème 0.4. *Soit (M, J) une variété presque complexe. La structure presque complexe J est associée à une structure complexe (donc à un atlas maximal holomorphe) sur M ssi le tenseur de Neijenhuis $N_J : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ de J définit par*

$$N_J(X, Y) = 2([JX, JY] - [X, Y] - J[X, JY] - J[JX, Y])$$

est nul. Dans ce cas, J est une structure presque complexe intégrable.

Ici on a noté par $\chi(M)$ l'espace des champs tangents sur M , i.e. l'espace des sections du fibré tangent $T_M \rightarrow M$.

Réciproquement, on a :

Toute variété complexe (X, A) où A est un atlas holomorphe maximal sur X est naturellement munie d'une structure presque complexe sur X . En effet, soient $x \in X$ et $f : U_f \rightarrow V_f \in A$ une carte de X tel que $x \in U_f$. L'application tangente $f_{*x} : T_x X \rightarrow \mathbb{C}^n$ induit une structure d'espace vectoriel complexe (donc une structure presque complexe) sur $T_x X$ qui ne dépend pas de choix de f .

Définition 0.5. *Soient X, X' deux variétés complexes, et J, J' les structures presque complexes associées.*

- (1) *Une application $\phi : X \rightarrow X'$ est dite holomorphe si $\forall x \in X$ et $\forall v \in T_x X$, on a $\phi_*(J(v)) = J'(\phi_*(v))$.*
- (2) *Une application $\phi : X \rightarrow X'$ est dite anti-holomorphe si $\forall x \in X$ et $\forall v \in T_x X$, on a $\phi_*(J(v)) = -J'(\phi_*(v))$.*

Soit X une variété complexe, et soit J la structure presque complexe holomorphe (intégrable) sur sa variété différentiable sous-jacente X , définissant sa structure complexe. On va noter par \bar{X} la variété complexe définie par $-J$. Remarquons que la donnée d'un isomorphisme anti-holomorphe $X \rightarrow X$ est équivalente à la donnée d'un biholomorphisme $X \rightarrow \bar{X}$.

On introduit maintenant la notion fondamentale de cette présentation :

Définition 0.6. *Une structure Réelle sur X est une involution anti-holomorphe sur X . Une variété complexe Réelle est une paire (X, s) composée d'une variété complexe et d'une structure Réelle sur celle-ci.*

Le lieu réel d'une variété complexe Réelle (X, s) est simplement le lieu fixe $X^s = \{x \in X / s(x) = x\}$ de sa structure Réelle.

Exemple 0.1. *Comme exemples des variétés complexes Réelles, on a*

- (1) \mathbb{C}^n muni de la conjugaison complexe c .
- (2) *Pour la droite projective complexe $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, nous avons deux classes d'isomorphismes :*
 - (a) $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ muni de la structure Réelle standard $\phi : [Z_0, Z_1] \rightarrow [\bar{Z}_0, \bar{Z}_1]$, donc $X(\mathbb{R}) = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ est un cercle.
 - (b) $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ muni de la structure Réelle quaternionique $\phi : [Z_0, Z_1] \rightarrow [-\bar{Z}_1, \bar{Z}_0]$, donc $X(\mathbb{R}) = \emptyset$.

Définition 0.7. *Soient $(X, s), (Y, \sigma)$ deux variétés complexes Réelles. Un isomorphisme $(X, s) \rightarrow (Y, \sigma)$ est un biholomorphisme $g : X \rightarrow Y$ qui est compatible avec la paire (s, σ) , i.e. tel que $\sigma \circ g = g \circ s$.*

Le problème fondamental de la théorie est la classification des variétés complexes Réelles à biholomorphismes Réels.

Le groupe des biholomorphismes Réels d'une variété complexe Réelle (X, s) est le sous-groupe

$$\text{Aut}(X, s) := \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ est un biholomorphisme et } f \circ s = s \circ f\}$$

du groupe de biholomorphismes $\text{Aut}_h(X)$.

Les objectifs de cette présentation sont les suivants :

- (O1) Donner une classification complète des surfaces de Hopf primaires Réelles (à biholomorphismes Réels) avec une description explicite de l'ensemble des classes d'isomorphismes.
- (O2) Décrire explicitement, pour toute surface de Hopf primaire Réelle (H, s) , son groupe des automorphismes holomorphes Réels $\text{Aut}(H, s) \subset \text{Aut}_h(H)$.
- (O3) Classifier topologiquement les surfaces de Hopf primaires Réelles et, pour toute surface de Hopf primaire Réelle (H, s) , décrire explicitement le lieu des points fixes (réels) H^s et le quotient $H/\langle s \rangle$.

Pour (O1), rappelons tout d'abord que [BHPV] :

Définition 0.8. *Une surface de Hopf primaire est une surface complexe compacte H dont le revêtement universel est biholomorphe à $W := \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ et dont le groupe fondamental est isomorphe à \mathbb{Z} .*

D'après un théorème fondamental de Kodaira [Ko1], il en résulte que toute surface de Hopf primaire est biholomorphe à $W/\langle f \rangle$ où f est un biholomorphisme de la forme

$$f(z, w) = (\alpha z + \lambda w^n, \beta w)$$

où

$$0 < |\alpha| \leq |\beta| < 1, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \lambda(\alpha - \beta^n) = 0.$$

Si les coefficients de f sont réels, la conjugaison standard $c : W \rightarrow W$ induit évidemment une structure Réelle sur H_f . Nous verrons qu'il existe des classes intéressantes des surfaces de Hopf primaires Réelles qui ne sont pas de ce type. De plus, il existe des surfaces de Hopf primaires Réelles définies par des contractions holomorphes f dont les coefficients ne sont pas réels.

Remarquons tout d'abord que le théorème de Kodaira ne donne pas une classification précise des surfaces de Hopf primaires, car il n'est pas clair sous quelles conditions les surfaces associées à deux 4-uplets $(\alpha, \beta, \lambda, n)$, $(\alpha', \beta', \lambda', n')$ comme ci-dessus sont biholomorphes.

D'après [We], nous introduisons cinq classes de contractions holomorphes :

$$\begin{aligned} IV &:= \left\{ f : W \rightarrow W \mid f \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha z \\ \alpha w \end{pmatrix} \mid 0 < |\alpha| < 1 \right\}, \\ III &:= \left\{ f : W \rightarrow W \mid f \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta^r z \\ \delta w \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{N}_{\geq 2}, 0 < |\delta| < 1 \right\}, \\ II_a &:= \left\{ f : W \rightarrow W \mid f \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta^r z + w^r \\ \delta w \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{N}_{\geq 2}, 0 < |\delta| < 1 \right\}, \\ II_b &:= \left\{ f : W \rightarrow W \mid f \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha z + w \\ \alpha w \end{pmatrix} \mid 0 < |\alpha| < 1 \right\}, \\ II_c &:= \left\{ f : W \rightarrow W \mid f \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha z \\ \delta w \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 0 < |\alpha| < 1 \\ 0 < |\delta| < 1 \end{array}, \alpha \neq \delta^r \forall r \in \mathbb{N} \right\}. \end{aligned} \quad (1)$$

L'application

$$IV \cup III \cup II_a \cup II_b \cup II_c \ni f \mapsto [H_f] \quad (2)$$

qui associe à une contraction holomorphe f la classe de biholomorphisme de la surface de Hopf correspondante H_f est surjective, mais *pas* injective. En effet, les contractions $f, f' \in II_c$ associées aux paires (α, δ) , $(\alpha', \delta') = (\delta, \alpha)$ sont biholomorphes. Notez que cette exception à l'injectivité n'est pas mentionnée dans [We]. En fait, dans [We], la classe II_c est définie en imposant la condition $|\alpha| < |\delta|$.

Malheureusement, avec cette définition restrictive de II_c , on perd la surjectivité de l'application (2), car les types de biholomorphismes des surfaces de Hopf associées aux paires (α, δ) satisfaisant

$$0 < |\alpha| = |\delta| < 1, \alpha \neq \delta^r \forall r \in \mathbb{N} \quad (3)$$

n'appartiennent pas à son image. Cette remarque est importante pour nos buts, car c'est précisément dans la sous-classe de II_c définie dans (3) - la sous-classe omise dans [We] - que nous trouverons des contractions f pour lesquelles H_f admet des structures Réelles bien que les coefficients de f ne sont pas réels.

Notre première étape dans la classification des structures Réelles sur les surfaces de Hopf primaires est de les diviser en deux classes : une structure Réelle ϕ sur H_f sera appelée *paire (impaire)* si elle admet un relevé $\hat{\phi} : W \rightarrow W$ tel que $\phi^2 = \text{id}_W$ (respectivement $\phi^2 = f$).

En ce qui concerne (O2), nous donnerons des descriptions explicites du groupe des automorphismes $\text{Aut}(X, s)$ de toutes les surfaces de Hopf primaires Réelles. Par exemple, lorsque $f \in IV$ avec un coefficient négatif α , nous obtenons $\text{Aut}(H_f, \mathfrak{s}_f) \simeq \text{Spin}^c(3)$, où \mathfrak{s}_f désigne la structure Réelle impaire canonique sur H_f .

Nos résultats pour l'objectif (O3) donnent une classification différentielle complète des surfaces de Hopf primaires Réelles. Le résultat final est le suivant :

- Toute surface de Hopf primaire Réelle paire (X, s) est difféomorphe d'une manière équivariante soit à

$$(S^1 \times S^3, (\zeta, (u, v)) \mapsto (\zeta, (\bar{u}, \bar{v}))),$$

soit à

$$(S^1 \times S^3, (\zeta, (u, v)) \mapsto (\zeta, (\bar{u}, \zeta \bar{v}))).$$

- Toute surface de Hopf primaire Réelle impaire (X, s) est difféomorphe d'une manière équivariante à

$$(S^1 \times S^3, (\zeta, Z) \mapsto (-\zeta, Z)).$$

L'idée principale de la démonstration de ce résultat de classification est la suivante : pour une contraction $f \in IV \cup III \cup II_a \cup II_b \cup II_c$ avec des coefficients réels et des coefficients diagonaux positifs, nous construisons un groupe de difféomorphismes à 1-paramètre $(f^t)_{t \in \mathbb{R}}$ de W agissant librement sur W de telle sorte que $f = f^1$. De plus, nous construisons également une sous-variété compacte $\Sigma \subset W$ de dimension 3 qui est transversale aux trajectoires de ce groupe et peut être identifiée à S^3 via un difféomorphisme qui commute avec la conjugaison et les involutions $(z, w) \mapsto (\pm z, \pm w)$.

Enfin, nous montrons que :

- Le lieu réel X^s d'une surface de Hopf primaire Réelle paire (X, s) est soit un tore, soit une bouteille de Klein, tandis que le lieu réel d'une surface de Hopf primaire Réelle impaire est toujours vide.
- Le quotient $X/\langle s \rangle$ associé à une surface de Hopf primaire Réelle (X, s) est toujours homéomorphe à $S^1 \times S^3$, et nous décrivons la position du lieu des points fixes X^s dans ce quotient.

D'après le théorème équivariante de la tranche, pour toute surface complexe Réelle (X, s) , le quotient $X/\langle s \rangle$ est une variété topologique de dimension 4.

RÉFÉRENCES

- [At] M. Atiyah, *K-theory*, W.A. Benjamin, New York (1967).
 [BHPV] W. Barth, K. Hulek, Ch. Peters, A. Van de Ven : *Compact Complex Surfaces*, Springer (2004).

- [GH] B. Gross and J. Harris, Real algebraic curves, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4^e série 14, 157–182 (1981).
- [Ko1] K. Kodaira, On the structure of compact complex analytic surfaces. *American Journal of Mathematics*, The Johns Hopkins University Press, 88 (3), 682-721 (1966).
- [OT] Ch. Okonek, A. Teleman, Abelian Yang-Mills Theory on Real Tori and Theta Divisors of Klein Surfaces, *Commun. Math. Phys.* 323, 813–858 (2013).
- [S] R. Silhol : Real Algebraic Surfaces, *Lecture Notes in Math.* 1392, Springer-Verlag, Berlin (1989).
- [Te] A. Teleman, Non-Kählerian compact complex surfaces, In : Angella, D., Arosio, L., Di Nezza, E. (eds) *Complex Non-Kähler Geometry*. *Lecture Notes in Mathematics*, vol 2246 (2019), Springer, Cham.
- [TTD] Tammo tom Dieck, *Transformation Groups*, de Gruyter, Berlin-New York (1987).
- [We] J. Wehler, Versal deformation of Hopf surfaces, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Vol. 328, 22-32 (1981).

AIX MARSEILLE UNIV, CNRS, I2M, MARSEILLE, FRANCE.
Email address: `zahraa.khaled@univ-amu.fr`

REPRÉSENTATIONS EN *STRING C*-GROUPS DES GROUPES SYMÉTRIQUES

Jessica Mulpas ¹, Julie De Saedeleer ² et Dimitri Leemans ³

¹ *Département de Mathématique, Université libre de Bruxelles, C.P.216*

Boulevard du Triomphe

1050 Bruxelles

jessica.mulpas@ulb.be

² *Département de Mathématique, Université libre de Bruxelles, C.P.216*

Boulevard du Triomphe

1050 Bruxelles

leemans.dimitri@ulb.be

³ *Département de Mathématique, Université libre de Bruxelles, C.P.216*

Boulevard du Triomphe

1050 Bruxelles

julie.de.saedeleer@ulb.be

Résumé. Les représentations en *string C*-groups sont des paires constituées d'un groupe et d'une séquence de ses générateurs (dont la longueur est appelée rang) satisfaisant certaines propriétés que nous définirons précisément. Comme nous le verrons, pour un groupe donné, ces représentations sont en correspondance directe avec les polytopes abstraits réguliers (abstractions des polytopes convexes, riches en symétries) dont le groupe en question est le groupe d'automorphismes. Déterminer une représentation en *string C*-group d'un groupe donné, c'est donc en spécifier l'action sur un objet géométrique et en déterminer une présentation.

La recherche de ces représentations des groupes symétriques a commencé en 2006, avec des avancées nettement accélérées depuis 2010, particulièrement au niveau des rangs élevés.

Nous présentons ici des manipulations possibles sur les graphes de permutations des groupes symétriques représentés comme *string C*-groups (appelés graphes CPR). Ces manipulations permettent d'obtenir de nouvelles représentations en *string C*-groups à partir de représentations connues.

Mots-clés. Polytopes abstraits réguliers, *string C*-group representations, groupes de permutations, groupes symétriques, graphes CPR

1 Prérequis

1.1 Polytopes abstraits réguliers

Un n -polytope abstrait est un ensemble partiellement ordonné (\mathcal{P}, \leq) possédant quatre propriétés (P1), (P2), (P3) and (P4) telles qu'explicitées ci-dessous. On nommera les éléments de \mathcal{P} faces. Pour deux faces F et G de \mathcal{P} tels que $F \leq G$, on définira également la section G/F comme étant l'ensemble des faces H de \mathcal{P} telles que $F \leq H \leq G$. Notons que chaque section d'un polytope abstrait est en elle-même un polytope abstrait.

(P1) \mathcal{P} a deux faces *impropres* : une plus petite face F_{-1} de rang -1 et une plus grande face F_n de rang n .

(P2) Chaque *drapeau* (à savoir sous-ensemble totalement ordonné maximal) de \mathcal{P} contient $n + 2$ faces (en incluant les deux faces impropres).

(P3) \mathcal{P} est *fortement connexe*, c'est-à-dire que chaque section de \mathcal{P} (y compris \mathcal{P} lui-même) est connexe (dans le sens donné ci-dessous).

(P4) \mathcal{P} satisfait la *condition diamant*, autrement dit : pour toute paire de faces (F, G) de \mathcal{P} telle que $F < G$ et $\text{rang}(G) = \text{rang}(F) + 2$, il y a exactement deux faces H, H' telles que $F < H < G$ et $F < H' < G$.

Un ensemble partiellement ordonné \mathcal{P} de rang d possédant les propriétés (P1) et (P2) est dit *connexe* si $d \leq 1$ ou si $d \geq 2$ et pour toutes faces propres $F = H_0, H_1, \dots, H_{k-1}, H_k = G$ telle que $H_i \leq H_{i+1}$ pour $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$.

Un polytope abstrait est dit *régulier* lorsque son groupe d'automorphismes est transitif sur ses drapeaux.

1.2 Représentations en *string C-groups*

Soit G un groupe de permutations. Une représentation en *string C-group* de rang r de G est une paire (G, S) , où $S = \{\rho_0, \dots, \rho_{r-1}\}$ est un ensemble d'involutions (c'est-à-dire élément d'ordre deux) génératrices de G de cardinalité r , satisfaisant les deux propriétés suivantes :

(SP) La propriété *string*, à savoir que $(\rho_i \rho_j)^2 = 1_G$ pour tous $i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ tels que $|i - j| \geq 2$;

(IP) La propriété d'intersection, à savoir que $\langle \rho_i \mid i \in I \rangle \cap \langle \rho_j \mid j \in J \rangle = \langle \rho_k \mid k \in I \cap J \rangle$ pour tous $I, J \subseteq \{0, 1, \dots, n-1\}$.

On notera souvent G_k pour $\langle \rho_i \mid i \neq k \rangle$ et $G_{k,l}$ pour $\langle \rho_i \mid i \neq k, l \rangle$.

Comme démontré par McMullen et Schulte (2002), les représentations en *string C-group* de G sont en correspondance bijective avec les polytopes abstraits réguliers dont G est le groupe d'automorphismes. Rechercher les polytopes abstraits réguliers dont G est le groupe d'automorphismes revient donc à lister ses représentations en *string C-group*.

1.3 Graphes CPR

Tout groupe fini peut être vu comme groupe de permutations. On peut donc considérer un ensemble fini non-vide Ω (de cardinalité n) sur lequel G agit comme groupe de permutations. Lorsque G possède un ensemble d'involutions génératrices $\{\rho_0, \dots, \rho_{r-1}\}$, nous pouvons construire un graphe simple non-orienté possédant n sommets, un pour chaque élément de Ω , et une arête d'indice $i \in \{0, \dots, r-1\}$ entre les sommets représentant les éléments a et b de Ω lorsque $\rho_i(a) = b$ (et donc, a fortiori, $\rho_i(b) = a$).

Lorsque $(G, \{\rho_0, \dots, \rho_{r-1}\})$ s'avère être un *string C-group*, le graphe de représentation permutante décrit ci-dessus est appelé *graphe CPR*.

Le lemme suivant de Pellicer (2008), indiquant la forme générale d'un graphe CPR, est relativement intuitif sur base de la propriété *string* :

Lemme. *Toutes les composantes connexes du sous-graphe d'un graphe CPR \mathcal{G} induites par les arêtes de labels i et j pour $|i - j| \geq 2$ (c'est-à-dire de labels i et j où ρ_i et ρ_j commutent) sont d'une des formes suivantes: un sommet isolé, une arête isolée, une double arête isolée ou un carré alterné.*

2 De la complexité de la réduction de rang

Brooksbank et Leemans (2019) ont démontré le théorème de réduction de rang suivant, permettant d'obtenir un représentation en *string C-group* de rang $r - 1$ de tout groupe G à partir de l'une de ses représentation de rang r .

Théorème. *(Théorème de réduction de rang) Soit $(G, \{\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{r-1}\})$ un *string C-group* de rang $r \geq 4$ tel que deux générateurs adjacents ne commutent jamais. Si $\rho_2\rho_3$ a ordre impair alors $(G, \{\rho_1, \rho_0\rho_2, \rho_3, \dots, \rho_{r-1}\})$ est un *string C-group* de rang $r - 1$.*

Il apparaît, comme nous le verrons, que la procédure inverse d'augmentation de rang est complexe. Nous donnerons quelques exemples illustrant les difficultés qui peuvent être rencontrées et justifierons donc des hypothèses du théorème suivant, permettant d'augmenter le rang de certaines représentations en *string C-group* du groupe symétrique du rang 3 vers le rang 4.

Théorème. *Soient $n \geq 5$ et $\Gamma \cong S_n$ la représentation permutante canonique de S_n sur n points. Soit $(\Gamma, \{\rho_0, \tilde{\rho}_1, \rho_2\})$ une représentation en *string C-group* de rang 3 du groupe*

symétrique Γ et soit \mathcal{G} son graphe CPR. Supposons que $\tilde{\rho}_1$ n'est pas une transposition. Soit \mathcal{G}' le graphe de représentation permutante obtenu en remplaçant, dans \mathcal{G} , une arête 1 qui n'est adjacente à aucune arête 2 par une arête (-1) . Soit $(\Gamma, \{\rho_{-1}, \rho_0, \rho_1, \rho_2\})$ le groupe représenté par \mathcal{G}' (où $\rho_{-1}\rho_1 = \tilde{\rho}_1$). Supposons que les orbites de $\Gamma_{-1,2}$ sont de tailles au plus 3 et supposons, de plus, que l'une de ces trois propositions est satisfaite :

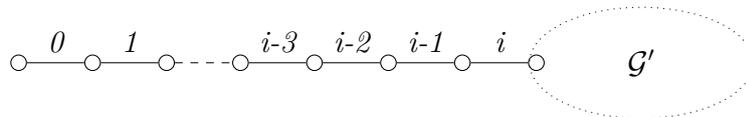
1. Γ_2 a une orbite de taille 4 et Γ_{-1} agit imprimitivement sur les composantes connexes de \mathcal{G}_{-1} qui contiennent plus d'une composante connexe de $\mathcal{G}_{-1,2}$ sur 3 sommets;
2. Γ_2 a une orbite de taille 5, ρ_0, ρ_1 et ρ_2 sont toutes des permutations paires et Γ_{-1} agit imprimitivement sur les composantes connexes de \mathcal{G}_{-1} qui contiennent plus d'une composante connexe de $\mathcal{G}_{-1,2}$ sur 3 sommets;
3. Γ_2 a une orbite de taille 6.

Alors $(\Gamma, \{\rho_{-1}, \rho_0, \rho_1, \rho_2\})$ est une représentation en string C-group de S_n .

3 Composer deux graphes CPR pour un former un nouveau, état actuel de notre recherche

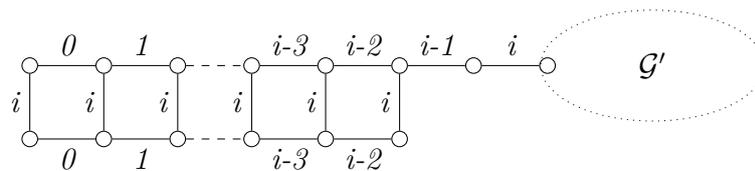
L'article de Cameron, Leemans et Fernandes (2022) propose une liste de graphes de permutations possibles pour les groupes symétriques. Leurs profils, ainsi qu'une analyse empirique à l'aide de MAGMA (Bosma, Cannon et Playoust (1997)), un logiciel de calcul compatible avec les banques de données de représentations en *string C-groups* existantes, nous ont permis de rédiger la conjecture et le théorème suivants, présentant deux manières de composer des graphes CPR entre eux :

Conjecture. Soit $i \geq 2$. Soit \mathcal{G} un graphe CPR



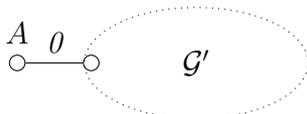
où \mathcal{G}' est un sous-graphe de \mathcal{G} qui, lorsqu'il n'est pas réduit à un seul sommet, n'a que des arêtes de labels au moins i .

Alors

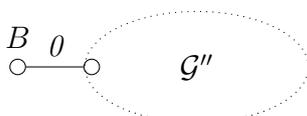


est un graphe CPR.

Théorème. *Si*

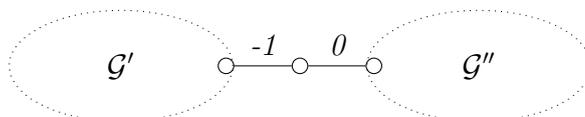


et



sont des graphes CPR tels que \mathcal{G}' et \mathcal{G}'' en sont des sous-graphes dont toutes les arêtes (s'ils en ont) ont labels au moins 1.

Alors identifier A à B et relabelliser les arêtes du premier graphe en transformant tout l en $-(l + 1)$ donne un graphe CPR.



Nous donnerons quelques exemples et les grandes lignes de la démonstration de la seconde proposition.

Bibliographie

- Leemans D. et Vauthier L. (2006), *An atlas of abstract regular polytopes for small groups*, Aequationes Mathematicae, 72(3), pp.313 à 320 McMullen P. et Schulte E. (2002), *Abstract regular polytopes*, volume 92. Cambridge University Press
- Pellicer D. (2008), *CPR graphs and regular polytopes*, European Journal of Combinatorics, 29(1), pp.59 à 71
- Brooksbank P. et Leemans D. (2019), *Rank Reduction of string C-group representation*, Proceedings of the American Mathematical Society, 147(12), pp.5421 à 5426
- Cameron P., Fernandes M.-E. et Leemans D. (2022), *The number of string C-groups of high rank*, arXiv preprint arXiv:2212.12723
- Bosma W., Cannon J. et Playoust C. (1997), The Magma Algebra System I: the user language, Journal of Symbolic Computation (3/4), pp. 235-265

ENSEMBLES K-SPECTRAUX ET INÉGALITÉS DE TYPE KREISS

Maëva Ostermann ¹

¹ *Laboratoire Paul Painlevé, Université de Lille,
maeva.ostermann@gmail.com*

Résumé. Introduits par von Neumann en 1951, les ensembles K-spectraux permettent d'estimer la norme des fonctions de matrices grâce au supremum de ces fonctions. Au cours de cet exposé, je parlerai d'exemples classiques d'ensembles K-spectraux et du rôle que joue la constante de Kreiss dans l'étude des ensembles K-spectraux.

Mots-clés. Ensembles K-spectraux, constante de Kreiss.

Abstract. Introduced by von Neumann in 1951, K-spectral sets allow us to estimate the norm of the functions of matrices with the help of the sup norm of these functions. In this presentation, I will talk about classical examples of K-spectral sets and the role that the Kreiss constant plays in the study of K-spectral sets.

Keywords. K-spectral sets, Kreiss constant.

Estimer la norme des fonctions de matrices ou opérateurs joue un rôle essentiel dans de nombreux domaines des Mathématiques pures et appliquées, tels que l'Algèbre Linéaire (numérique), l'Analyse Fonctionnelle et l'Analyse Numérique. Pour les opérateurs normaux, le spectre fournit de précieuses informations sur la norme du calcul fonctionnel. Cependant, la situation est très différente pour les opérateurs non normaux. Introduits par von Neumann en 1951, les ensembles K-spectraux permettent d'estimer la norme des fonctions de matrices grâce au supremum de ces fonctions. Précisément, on dira qu'un ensemble $\Omega \subset \mathbb{C}$ est un ensemble K-spectral pour une matrice T si $\sigma(T) \subset \overline{\Omega}$ et si pour toute fonction rationnelle f bornée sur Ω , on a

$$\|f(T)\| \leq K \sup_{z \in \Omega} |f(z)|.$$

Lorsque cette égalité est vraie pour $K = 1$, on dira simplement que Ω est un ensemble spectral pour T .

Un exemple très classique d'ensemble spectral est fourni par l'inégalité de von Neumann qui stipule que si une matrice T est une contraction (i.e. $\|T\| \leq 1$), alors pour tout polynôme p , on a

$$\|p(T)\| \leq \sup_{z \in \mathbb{D}} |p(z)|.$$

Autrement dit, $\overline{\mathbb{D}}$ est un ensemble spectral pour toute matrice de contraction (et plus généralement pour toute contraction agissant sur un espace de Hilbert). Plus généralement, on sait que $\overline{\mathbb{D}}$ est un ensemble 2-spectral pour une matrice T dès que son image numérique, définie par $W(T) = \{\langle Tx, x \rangle, \|x\| = 1\}$, satisfait $W(T) \subset \overline{\mathbb{D}}$. Ce résultat est une conséquence de deux résultats: un théorème de dilatation de Berger et d'une conséquence directe d'un résultat d'Okubo et Ando.

Lorsque le disque unité est un ensemble K-spectral pour une matrice ou un opérateur T , il est assez simple de constater que T va satisfaire deux propriétés: T est à puissance bornée, c'est-à-dire $\sup_{n \geq 0} \|T^n\| < \infty$ et T est Kreiss bornée, c'est-à-dire que sa constante de Kreiss, définie par

$$\mathcal{K}_T(\mathbb{D}) = \sup_{|w| > 1} (|w| - 1) \|(wI - T)^{-1}\|,$$

vérifie $\mathcal{K}_T(\mathbb{D}) < \infty$. En 1962, Kreiss a montré que, pour une matrice, ces deux propriétés sont en fait équivalentes. Une estimation entre le suprémum des puissances et la constante de Kreiss peut être déduite de la preuve de Kreiss et celle-ci a été améliorée au cours des années qui ont suivi jusqu'à donner celle qu'on connaît sous le nom de théorème matriciel de Kreiss dû à Spijker. Cette dernière stipule que pour une matrice T de taille $N \times N$, on a

$$\mathcal{K}_T(\mathbb{D}) \leq \sup_{n \geq 0} \|T^n\| \leq eN\mathcal{K}_T(\mathbb{D}).$$

En 2005, Vitse a montré que, dans le cas matriciel, une matrice Kreiss bornée avait toujours le disque comme ensemble K-spectral en montrant que pour une matrice T Kreiss bornée de taille $N \times N$ et pour toute fonction $f \in A(\mathbb{D})$, on a que

$$\|f(T)\| \leq \frac{16N}{\pi} \mathcal{K}_T(\mathbb{D}) \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)|.$$

Mais qu'en est-il pour des domaines généraux?

Une généralisation géométrique naturelle de la constante de Kreiss pour un domaine Ω est définie par

$$\mathcal{K}_T(\Omega) = \sup_{z \notin \overline{\Omega}} \text{dist}(z, \Omega) \|(zI - T)^{-1}\|.$$

Il est facile de voir que si Ω est un ensemble K-spectral pour T , alors $\mathcal{K}_T(\Omega) < \infty$. Étant donné que dans le cas où Ω est un disque, cette condition implique qu'il s'agit d'un ensemble K-spectral pour la matrice T , il est naturel de se poser la question suivante: Sous quelle(s) condition(s) sur Ω a-t-on que pour toute matrice T telle que $\mathcal{K}_T(\Omega) < \infty$, il existe une constante K telle que Ω soit K-spectral pour T ?

Dans un papier publié en 1999, Toh et Trefethen ont obtenu des estimations sur les polynômes similaire au théorème de Kreiss mais faisant apparaître le degré des polynômes dans la majoration. Dans un article publié en 2022, j'ai obtenu une inégalité similaire à celle de Toh et Trefethen pour les fonctions rationnelles. Précisément, si $\partial\Omega$ est \mathcal{C}^2 , il

existe une constante C_Ω ne dépendant que de Ω telle que pour toute fonctions rationnelles f bornée sur Ω , on a que

$$\|f(T)\| \leq (1 + \deg f)C_\Omega \mathcal{K}_T(\Omega) \sup_{\Omega} |f|.$$

Bien que cela ne permet pas de déduire que Ω est K-spectral pour une matrice T , une adaptation de la méthode pour l'obtenir permet de montrer que, sous certaines conditions supplémentaires sur Ω , une inégalité de la même forme est vérifiée où le terme $(1 + \deg f)$ est remplacé par la taille de la matrice. Précisément, sous certaines conditions supplémentaires sur Ω , il existe une constante \tilde{C}_Ω telle que, pour toute fonction $f \in H^\infty(\Omega)$ et toutes matrices $T \in M_N(\mathbb{C})$, on a

$$\|f(T)\| \leq N\tilde{C}_\Omega \mathcal{K}_T(\Omega) \sup_{\Omega} |f|.$$

Je terminerai mon exposé par expliquer brièvement comment les obtenir, quelles adaptations faire pour obtenir la dernière inégalité ainsi que les contraintes sur Ω que cela donne.

Bibliographie

- C.A. Berger (1965). A strange dilation theorem, *Notices Amer. Math. Soc* 12, p. 590.
- R. Clouâtre, M. Ostermann, T. Ransford (2023). An abstract approach to the Crouzeix conjecture, *J. Operator Theory* 90.1, pp. 209–221.
- M. Crouzeix (2004). Bounds for analytical functions of matrices, *Integral Equations Operator Theory*, 48(4) :461–477.
- M. Crouzeix (2007). Numerical range and functional calculus in Hilbert space, *J. Funct. Anal.*, 244(2) :668–690.
- M. Crouzeix, C. Palencia (2017). The numerical range is a $(1 + \sqrt{2})$ -spectral set, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 38(2) :649–655.
- B. Delyon, F. Delyon (1999). Generalization of von Neumann's spectral sets and integral representation of operators, *Bull. Soc. Math. France*, 127(1) :25–41.
- H.-O. Kreiss (1962). Über die Stabilitätsdefinition für Differenzgleichungen die partielle Differentialgleichungen approximieren, *Nordisk Tidskr. Informationsbehandling (BIT)*, 2 :153– 181.
- K. Okubo, T. Ando (1975). Constants related to operators of class C_ρ , *Manuscripta Math.*, 16(4) :385–394.
- Maëva Ostermann (2022). A Kreiss type inequality for rational functions on general domains, *Complex Anal. Oper. Theory* 16.4, Paper No. 54, 24. issn: 1661-8254.
- M. N. Spijker (1991). On a conjecture by LeVeque and Trefethen related to the Kreiss matrix theorem, *BIT*, 31(3) :551–555.

-
- B. Sz.-Nagy (1953). Sur les contractions de l'espace de Hilbert, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 15 :87–92.
- K.-C. Toh, L.N. Trefethen (1999). The Kreiss matrix theorem on a general complex domain, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 21(1) :145–165.
- P. Vitse (2005). Functional calculus under Kreiss type conditions, *Math. Nachr.*, 278(15) :1811–1822.
- J. von Neumann (1951). Eine Spektraltheorie für allgemeine Operatoren eines unitären Raumes, *Math. Nachr.*, 4 :258–281.

GÉNÉRALISATION SUPERSYMETRIQUE DE L'INFINI NULL

Noémie Parrini ¹ & Nicolas Boulanger ² & Yannick Herfray ³

¹ *Service de Physique de l'Univers, Champs et Gravitation, Université de Mons 20 place du Parc, 7000 Mons, Belgium, noemie.parrini@umons.ac.be*

² *Service de Physique de l'Univers, Champs et Gravitation, Université de Mons 20 place du Parc, 7000 Mons, Belgium, nicolas.boulanger@umons.ac.be*

³ *Institut Denis Poisson UMR 7013, Université de Tours, Parc de Grandmont, 37200 Tours, France, yannick.herfray@univ-tours.fr*

Résumé. Dans cet exposé, nous étudions la compactification conforme de l'espace de super Minkowski, qui est une généralisation du cas usuel de compactification conforme de Minkowski. Nous proposons une décomposition de ce super espace compactifié en sous-espaces invariants sous l'action du groupe de super Poincaré. Ceci mènera à une description géométrique du "super infini nul" comme sous-espace du bord de super Minkowski.

Mots-clés. Physique mathématique, géométrie asymptotique, supergéométrie

Abstract. In this talk, we review the conformal compactification for the super Minkowski space, which is a generalisation of the usual case of the conformal compactification of Minkowski. We propose a decomposition of the compactified superspace in subspaces invariant under the action of the super Poincaré group. This will lead to a geometric description of the super null infinity as a subspace of the boundary of super Minkowski.

Keywords. Mathematical physics, asymptotic geometry, supergeometry

1 Résumé long de la communication

Depuis les travaux précurseurs de R. Penrose (1963), l'holographie est un concept qui a pris une place très importante en physique théorique. Le cas des espaces-temps asymptotiquement plats est particulièrement intéressant à étudier puisqu'il permet de modéliser toutes sortes de phénomènes physiques, comme les systèmes isolés. L'idée très générale de l'holographie est d'obtenir des informations sur l'espace-temps à partir de l'étude du "bord" de celui-ci. Une manière efficace de travailler sur ce "bord" est de réaliser une compactification conforme de l'espace-temps, permettant ainsi de traiter l'infini comme un simple sous-espace de l'espace compactifié. Un sous-ensemble de ce bord est appelé infini de genre lumière, c'est une hypersurface nulle de la variété compactifiée, appelé \mathcal{I} .

Il a été montré dans un article de Bondi, Van der Burg, Metzner (1962) et Sachs (1962) que le groupe de symétries asymptotique de tels espaces était un groupe infini

dimensionnel, contenant le groupe de Poincaré, qui fut dès lors nommé groupe BMS. Plus récemment, le groupe BMS a été réalisé dans un contexte plus géométrique par Duval, Gibbons et Horvathy (2014), ce qui lui a redonné une certaine popularité en physique. En effet, le groupe BMS peut également être vu comme le groupe d'automorphismes de la structure géométrique à l'infini null.

D'autre part, le rôle important de la supersymétrie en physique n'est plus à prouver. En théorie quantique des champs, les champs de Fermi obéissent non pas à des règles de commutation mais d'anticommutation, nécessitant l'introduction d'éléments de l'algèbre de Grassmann.

L'étude de la géométrie des espaces supersymétriques, la supergéométrie, a été développée en mathématiques par exemple par F. A. Berezin (1987), B. De Witt (1992) ou encore Yu. Manin (1988). La subtilité de la supergéométrie en fait un sujet difficile à appliquer en pratique.

Il nous semble donc naturel, pour des raisons physiques et géométriques, d'essayer de généraliser les travaux sur les espaces asymptotiquement plats dans un contexte supergéométrique, et de voir jusqu'où nos intuitions du cas usuel peuvent être étendues au cas supersymétrique.

Pour cela et pour faire le lien avec les applications physiques, nous commençons par construire des exemples concrets de super-espaces asymptotiquement plats. Le cas de l'espace de super-Minkowski en quatre dimensions $M^{1,3|N}$ est traité. Une définition de la compactification conforme de super-Minkowski est proposée, en accord avec par exemple Yu. Manin (1988). Cette définition généralise la définition de la compactification conforme de (la complexification de) Minkowski en termes de twisteurs.

Nous avons décomposé cette compactification de super-Minkowski en sous-espaces invariants sous le groupe de super Poincaré. Cela permet de repérer le candidat pour une généralisation supersymétrique naturelle de \mathcal{S} , vu comme hypersurface de la compactification et invariante sous super Poincaré. Une description de super \mathcal{S} comme espace homogène pour super Poincaré est également obtenue et permet d'aborder cette partie du bord de façon géométrique.

D'autre part, notons que certains travaux de Awada, Gibbons et Shaw (1986) existent déjà sur la généralisation super symétrique de BMS. Il s'agirait de retrouver ces résultats par des considérations plus globales de géométrie, et en commençant par des exemples concrets, en étudiant la supergéométrie sur ce super \mathcal{S} . Ceci fait partie d'un travail toujours en cours actuellement.

Bibliographie

- R. Penrose. (1963). *Asymptotic properties of fields and space-times* Phys. Rev. Lett. 10, 6668.
Bondi, H.; Van der Burg, M.G.J.; Metzner, A. (1962), *Gravitational waves in general rela-*

tivity: VII. Waves from axisymmetric isolated systems, Proceedings of the Royal Society of London A. 269 (1336): 2152.

C. Duval, G. W. Gibbons, P. A. Horvathy (2014) *Conformal Carroll groups and BMS symmetry*. Class.Quant.Grav. 31, 092001.

Sachs, R. (1962). *Asymptotic symmetries in gravitational theory* Physical Review. 128 (6): 28512864.

Berezin, F. A. (1987), *Introduction to Superanalysis*, D. Reidel.

DeWitt, B. (1992). *Supermanifolds* (2nd ed., Cambridge Monographs on Mathematical Physics). Cambridge: Cambridge University Press.

Manin, Yu. (1988), *Gauge Field Theory and Complex Geometry*, Springer Verlag.

M.A. Awada, G.W. Gibbons, W.T. Shaw.(1986) *Conformal supergravity, twistors and the super-bms group*, Annals Phys. 171, 52.

INFÉRENCE BASÉE SUR LES RANGS POUR L'ACP SOUS FAIBLE IDENTIFIABILITÉ

Davy Paindaveine ¹ & Laura Peralvo Maroto ² & Thomas Verdebout ³

¹ *ECARES et Département de Mathématique, Université Libre de Bruxelles, Belgique, davy.paindaveine@ulb.be*

² *ECARES et Département de Mathématique, Université Libre de Bruxelles, Belgique, laura.peralvo.maroto@ulb.be*

³ *ECARES et Département de Mathématique, Université Libre de Bruxelles, Belgique, thomas.verdebout@ulb.be*

Résumé. Sur base d'un échantillon aléatoire elliptique p -dimensionnel de matrice de forme \mathbf{V}_n , on considère le problème testant l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$ contre la contre-hypothèse $\mathcal{H}_1 : \boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}_0$, où $\boldsymbol{\theta}$ est le « premier » vecteur propre de la matrice de forme \mathbf{V}_n et $\boldsymbol{\theta}_0$ est un p -vecteur unitaire fixé. Nous montrons que le test des rangs signés, obtenu par Hallin, Paindaveine et Verdebout (2010) pour les vecteurs propres, s'avère plus performant que le test pseudo-gaussien classique, même dans des conditions d'identifiabilité faible de $\boldsymbol{\theta}$. Plus précisément, même lorsque le rapport des deux plus grandes valeurs propres $\lambda_{n1}/\lambda_{n2}$ de \mathbf{V}_n converge vers un, le test basé sur les rangs de van der Waerden domine uniformément le test pseudo-gaussien sous l'hypothèse d'ellipticité. Pour obtenir nos résultats, nous dérivons des résultats généraux pour le comportement asymptotique du rapport de vraisemblances de tableaux triangulaires d'observations et fournissons une représentation asymptotique de la statistique du test des rangs signés sous faible identifiabilité. Nos résultats sont confirmés par des simulations de Monte-Carlo.

Mots-clés. Densités elliptiques, normalité locale asymptotique, rangs et signes multivariés, analyse en composantes principales, matrices de diffusion à pointes, matrices de forme à pointes, faible identifiabilité.

Abstract. On the basis of a p -dimensional elliptical random sample with shape matrix \mathbf{V}_n , we consider the problem of testing the null hypothesis $\mathcal{H}_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$ against the alternative $\mathcal{H}_1 : \boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}_0$, where $\boldsymbol{\theta}$ is the “first” eigenvector of the shape matrix \mathbf{V}_n and $\boldsymbol{\theta}_0$ is a fixed unit p -vector. We show that the signed-rank test, obtained by Hallin, Paindaveine and Verdebout (2010) for the eigenvectors, outperforms classical pseudo-Gaussian tests even under weak identifiability of $\boldsymbol{\theta}$. More precisely, even if the ratio of the two largest eigenvalues $\lambda_{n1}/\lambda_{n2}$ of \mathbf{V}_n converges to one, the van der Waerden rank test uniformly dominates the pseudo-Gaussian test under the assumption of ellipticity. To obtain our results, we derive general results for the asymptotic behavior of likelihood ratio of triangular arrays of observations and provide an asymptotic representation of signed-rank test statistics under weak identifiability. Our results are confirmed by Monte-Carlo simulations.

Keywords. Elliptical densities, local asymptotic normality, multivariate ranks and signs, principal component analysis, spiked scatter matrices, spiked shape matrices, weak identifiability.

1 Objectifs et résultats de la communication

L'un des outils statistiques les plus largement utilisés dans l'analyse statistique multivariée est l'analyse en composantes principales (ACP) dont l'objectif est la réduction de la dimension d'un p -vecteur aléatoire \mathbf{X} en le projetant dans un nouvel espace de dimension inférieure. Cette projection géométrique permet de représenter les données de manière plus compacte, ce qui est essentiel pour la visualisation et la compréhension. Cette réduction de la dimension de \mathbf{X} s'effectue tout en préservant l'essentiel de sa variabilité totale, typiquement capturée dans la matrice de covariance. Soit Σ_{cov} la matrice de covariance de \mathbf{X} admettant la décomposition spectrale $\Sigma_{\text{cov}} = \sum_{j=1}^p \lambda_j \boldsymbol{\theta}_j \boldsymbol{\theta}_j'$ ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$). La j^{e} composante principale est $\boldsymbol{\theta}_j' \mathbf{X}$ et est de variance λ_j . Les composantes principales obtenues par l'ACP sont linéairement indépendantes et orthogonales les unes aux autres. Géométriquement, cela signifie qu'elles forment un ensemble d'axes principaux perpendiculaires dans l'espace des composantes principales. La matrice Σ_{cov} étant généralement inconnue dans la pratique, il est naturel d'effectuer de l'inférence sur celle-ci, et plus particulièrement sur ses vecteurs propres.

Bien que les problèmes d'inférence traditionnels s'expriment à partir de la matrice de covariance Σ_{cov} , ceux-ci peuvent s'étendre naturellement à des modèles elliptiques arbitraires caractérisés par un vecteur de *position* $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$, un paramètre d'*échelle* $\sigma \in \mathbb{R}_0^+$, une matrice réelle de taille $p \times p$ symétrique définie positive \mathbf{V} appelée matrice de *forme*, et une *densité radiale standardisée* f_1 . Lorsque cette densité elliptique admet des moments finis d'ordre deux, la matrice de forme \mathbf{V} et la matrice de covariance Σ_{cov} sont proportionnelles et partagent donc la même collection de vecteurs propres ainsi, qu'à un facteur positif près, la même collection de valeurs propres.

Notre intérêt réside plus précisément ici dans le problème de tester l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$ contre la contre-hypothèse $\mathcal{H}_1 : \boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}_0$, où $\boldsymbol{\theta}_0$ est un vecteur unitaire fixé de \mathbb{R}^p . Ce problème a été traité par Hallin, Paindaveine et Verdebout (2010) sur base d'un n -uplet $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ de p -vecteurs elliptiques de position $\boldsymbol{\mu}$ et de matrice de forme \mathbf{V} . Plus précisément, en notant $\mathbf{Z}_i := \mathbf{V}^{-1/2}(\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})$ la version sphérique de \mathbf{X}_i ($\mathbf{A}^{1/2}$ représente la racine symétrique définie positive de la matrice symétrique définie positive \mathbf{A}), par $\mathbf{U}_i = \mathbf{U}_i(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V}) := \mathbf{Z}_i / \|\mathbf{Z}_i\|$ les signes multivariés correspondants et par $R_i^{(n)} = R_i^{(n)}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$ les rangs des normes $\|\mathbf{Z}_i\|$, $i = 1, \dots, n$, le test basé sur les rangs de Hallin, Paindaveine et Verdebout (2010) $\underset{\sim}{\phi}_K^{(n)}$ rejette l'hypothèse nulle (au niveau asymptotique α) lorsque

$$\underset{\sim}{Q}_K^{(n)} := \frac{np(p+2)}{\mathcal{J}_p(K)} \sum_{j=2}^p (\tilde{\boldsymbol{\theta}}_j' \underset{\sim}{\mathbf{S}}_K^{(n)} \boldsymbol{\theta}_0)^2 \quad (1)$$

dépasse le quantile supérieur d'ordre α de la distribution chi-carré à $(p-1)$ degrés de liberté, où $\mathcal{J}_p(K)$ est une constante de normalisation, $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_j$ représente un estimateur contraint du j^{e} vecteur propre de \mathbf{V} et la matrice de covariance de rangs signés est de la forme

$$\underset{\sim}{\mathbf{S}}_K^{(n)} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K \left(\frac{R_i^{(n)}}{n+1} \right) \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i'$$

avec $K : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ une *fonction de score*, et $\mathbf{U}_i = \mathbf{U}_i(\hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\mathbf{V}})$ et $R_i^{(n)} = R_i^{(n)}(\hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\mathbf{V}})$ sont calculés à partir d'estimateurs appropriés $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ et $\hat{\mathbf{V}}$ de $\boldsymbol{\mu}$ et \mathbf{V} . En plus d'être robuste en termes de validité, Hallin, Paindaveine et Verdebout (2010) ont montré que ce test est, pour une fonction de score bien particulière $K = K_{f_1}$, *localement et asymptotiquement optimal* au sens de Le Cam) sous toute densité radiale régulière f_1 .

Notre objectif est l'étude des propriétés asymptotiques de ce test dans un contexte d'*identifiabilité faible* introduit par Paindaveine, Remy et Verdebout (2020), en ce sens que le premier vecteur propre $\boldsymbol{\theta}$ n'est pas correctement identifié à la limite. En d'autres termes, nous considérons un cadre asymptotique non standard dans lequel les valeurs propres peuvent dépendre de n et où $\lambda_{n1}/\lambda_{n2}$ converge vers 1 lorsque n diverge vers l'infini. Nous nous limitons aux spectres de la forme $\lambda_{n1} > \lambda_{n2} = \dots = \lambda_{np}$ en considérant des tableaux triangulaires d'observations à symétrie elliptique \mathbf{X}_{ni} , $i = 1, \dots, n$, $n = 1, 2, \dots$, où $\mathbf{X}_{n1}, \dots, \mathbf{X}_{nn}$ forment un n -uple de p -vecteurs aléatoires mutuellement indépendants issu d'une distribution elliptique caractérisée par un paramètre de position $\boldsymbol{\mu}$, une matrice de forme définie positive

$$\mathbf{V}_n := (1 + r_n v)^{-1/p} (\mathbf{I}_p + r_n v \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}'),$$

où v est un nombre réel positif, (r_n) est une suite réelle positive bornée, \mathbf{I}_ℓ désigne la matrice identité de dimension ℓ et pour une certaine fonction f_1 . Les valeurs propres de la matrice de forme \mathbf{V}_n sont alors $\lambda_{n1} = (1 + r_n v)^{(p-1)/p}$ (de vecteur propre correspondant $\boldsymbol{\theta}$) et $\lambda_{n2} = \dots = \lambda_{np, \mathbf{V}_n} = (1 + r_n v)^{-1/p}$ (l'espace propre correspondant étant le complément orthogonal de $\boldsymbol{\theta}$ dans \mathbb{R}^p). Lorsque $r_n \equiv 1$, le rapport des deux premières valeurs propres valant $1 + v$, le premier vecteur propre reste bien identifié à la limite. Il en est de même dans le cas plus général où r_n reste éloigné de 0 quand n diverge vers l'infini. Par contre, si la suite r_n converge vers zéro lorsque n diverge vers l'infini, le premier vecteur propre $\boldsymbol{\theta}$ n'est plus correctement identifié à la limite. Ce concept d'identifiabilité faible rend donc le problème de test consistant à tester $\mathcal{H}_0^{(n)} : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$ contre $\mathcal{H}_1^{(n)} : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$ de plus en plus difficile lorsque n diverge vers l'infini.

Dans un premier temps, nous construisons un résultat de représentation asymptotique de la statistique du test des rangs signés $\phi_K^{(n)}$ de Hallin, Paindaveine et Verdebout (2010), valable sous faible identifiabilité du paramètre $\boldsymbol{\theta}$ qui simplifie grandement l'étude du comportement asymptotique de ce test sous faible identifiabilité. A partir de ce résultat, nous montrons que le test des rangs signés $\phi_K^{(n)}$ est robuste en termes de validité à l'identifiabilité faible en ce sens qu'il respectera asymptotiquement la contrainte de niveau nominal dans des scénarios arbitrairement proches du cas sphérique, sans aucune hypothèse requise sur la densité sous-jacente au-delà de l'ellipticité.

Dans un second temps, nous souhaitons étudier des propriétés d'optimalité sur le test basé sur les rangs $\phi_K^{(n)}$ de Hallin, Paindaveine et Verdebout (2010). Dans ce sens, nous construisons un résultat général sur le comportement asymptotique du rapport de vraisemblances dans une configuration de tableaux triangulaires. En particulier, nous généralisons un résultat bien connu dans Van der Vaart (1998) aux tableaux triangulaires d'observations à savoir que la différentiabilité en moyenne quadratique d'une suite d'expériences implique que cette même suite est localement et asymptotiquement normale. Cette généralisation aux tableaux triangulaires nous permet par suite de dériver le comportement asymptotique du rapport de

vraisemblances elliptiques (avec une potentielle identifiabilité faible) et d'obtenir le comportement asymptotique du test basé sur les rangs sous des alternatives locales. On montre ainsi que ce test bénéficie encore de fortes propriétés d'optimalité sous faible identifiabilité.

Finalement, nous comparons le test basé sur les rangs $\phi_K^{(n)}$ au test pseudo-gaussien classique obtenu par Hallin, Paindaveine et Verdebout (2010) en calculant l'efficacité relative asymptotique du test basé sur les rangs par rapport au test pseudo-gaussien. On montre que celle-ci n'est pas impactée par l'identifiabilité faible de θ .

Les différents résultats obtenus sont finalement illustrés à travers plusieurs exercices de Monte-Carlo.

Bibliographie

Hallin, M., Paindaveine, D. et Verdebout, T. (2010), Optimal rank-based testing for principal components, *Annals of Statistics*, 38, pp. 3245-3299.

Paindaveine, D., Remy, J. et Verdebout, T. (2020), Testing for principal component directions under weak identifiability, *Annals of Statistics*, 48, pp. 324-345.

Van der Vaart, A. W. (1998), *Asymptotic Statistics*. Cambridge University Press, United States of America.

CONSTRUCTION D'APPROXIMATIONS GROSSIÈRES POUR UN PROBLÈME DE SCHRÖDINGER À COEFFICIENTS HAUTEMENT OSCILLANTS

Simon Ruget^{1,2,3}, Frédéric Legoll^{1,2} & Claude Le Bris^{1,3}

¹ *Inria Paris, équipe MATHERIALS, Paris, France*

² *École des Ponts ParisTech, Laboratoire Navier, Marne-la-Vallée, France.*

³ *École des Ponts ParisTech, CERMICS, Marne-la-Vallée, France.*

Contact : *simon.ruget@enpc.fr, frederic.legoll@enpc.fr, claude.le-bris@enpc.fr*

Résumé. Cet exposé aborde la thématique des problèmes inverses dans un cadre multiéchelle. Pour un problème donné, on se propose de reconstruire certaines grandeurs caractéristiques du point de vue de l'homogénéisation (coefficient homogénéisé, correcteur, etc.) à partir de la connaissance des solutions du-dit problème. Notre méthode s'affranchit des hypothèses classiques de l'homogénéisation qui peuvent être restrictives en pratique (la périodicité par exemple), et est valide dans des cas plus généraux, y compris en dehors du cas limite où les échelles sont très séparées. Dans un premier temps, on justifiera théoriquement cette méthode, puis nous l'illustrerons avec des résultats numériques.

Mots-clés. Problème Inverse, Homogénéisation, Approximations Grossières

1 Positionnement du problème

Cet exposé aborde la thématique des problèmes inverses dans un cadre multiéchelle. Considérons l'équation de Schrödinger suivante :

$$-\Delta u_\varepsilon + \mathcal{V}_\varepsilon u_\varepsilon = f \quad \text{dans } \Omega, \quad u_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (1)$$

avec un potentiel hautement oscillant $\mathcal{V}_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}V\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)$ (dérivant d'un potentiel originel V) c'est à dire un potentiel dont la distance caractéristique d'évolution est petite.

Dans le cas où ce potentiel V est périodique et à moyenne nulle, la théorie de l'homogénéisation (voir Bensoussan-Lions-Papanicolaou (1978)) indique que la limite homogénéisée du problème (1) est encore une équation de Schrödinger :

$$-\Delta u_\star + V_\star u_\star = f \quad \text{dans } \Omega, \quad u_\star = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (2)$$

avec un potentiel homogénéisé V_\star constant, qui peut se calculer en fonction du potentiel périodique du problème de départ et d'un correcteur (comme il est classique en homogénéisation).

Au cours de cet exposé, notre objectif est de développer une méthode, utilisant des solutions du problème oscillant (1) pour plusieurs seconds membres, afin de définir le potentiel effectif constant permettant d’approcher au mieux le problème oscillant. Cette méthodologie est inspirée du résultat d’homogénéisation ci-dessus, ainsi que de résultats préliminaires (voir Le Bris-Legoll-Li (2013)). Il s’agit de calculer une approximation de V_\star sans utiliser les ingrédients classiques de l’homogénéisation (qui repose souvent sur des hypothèses géométriques sur le potentiel, comme la périodicité) qui peuvent être restrictives en pratique. Du fait que la stratégie ainsi développée ne fasse pas appel aux outils usuels de l’homogénéisation, nous montrerons qu’elle possède un champ d’applications très large.

Notre approche, qui est donc reliée à la problématique des problèmes inverses en présence d’échelles multiples, se traduit sous la forme d’un problème d’optimisation (voir section 2). Les liens entre le meilleur potentiel effectif constant obtenu par notre approche et le potentiel homogénéisé V_\star sont étudiés (voir section 3). Nous présentons également une démarche permettant, une fois une bonne approximation de V_\star calculée, de récupérer une bonne approximation du correcteur. Notre présentation sera illustrée par des résultats numériques (voir section 4).

Des nombreuses extensions de ces travaux (non abordées dans cet exposé) sont envisageables : question de sensibilité aux données, choix des espaces d’approximations pour les grandeurs considérées, reconstruction du potentiel oscillant \mathcal{V}_ε , ...

2 Un algorithme d’optimisation

Notre approche se traduit sous la forme de problèmes d’optimisation.

Dans un premier temps, on cherche à obtenir une description du système à l’échelle *macroscopique* via la reconstruction d’un potentiel effectif constant \bar{V} . Le système est ainsi correctement décrit (i.e. au sens L^2) au travers des solutions \bar{u} du problème de Schrödinger associé au potentiel \bar{V} . Pour définir ce potentiel, l’idée consiste à considérer l’erreur maximale liée à l’approximation des solutions u_ε du problème (1) par les solutions \bar{u} du problème de Schrödinger associé au potentiel \bar{V} . On veut **minimiser** ce **scénario du pire des cas** vis à vis du potentiel \bar{V} . On en déduit la formulation suivante :

$$\inf_{\bar{V} \in \mathbb{R}} \sup_{f \in L^2_n(\Omega)} \|u_\varepsilon(f) - \bar{u}(f)\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (3)$$

où $L^2_n(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega), \|f\|_{L^2(\Omega)} = 1\}$, et où $\bar{u}(f)$ est la solution de Schrödinger pour un potentiel constant \bar{V} :

$$-\Delta \bar{u} + \bar{V} \bar{u} = f \quad \text{dans } \Omega, \quad \bar{u} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (4)$$

Inspiré par Le Bris-Legoll-Lemaire (2018), la fonction de coût est en réalité légèrement modifiée afin d’obtenir **un problème quadratique** en \bar{V} , et ainsi de faciliter

l'implémentation numérique. On applique en effet l'opérateur d'ordre 0 $(-\Delta)^{-1}(-\Delta + \bar{V})$ à la différence $u_\varepsilon(f) - \bar{u}(f)$, et on s'intéresse donc en pratique au problème (6) ci-dessous.

Dans un second temps, on peut chercher à définir un terme d'ordre 1 en ε permettant de *corriger* les solutions \bar{u} , afin de proposer une description plus fine du système, c'est à dire proche de u_ε en norme H^1 . Pour se faire, on s'inspire du résultat d'homogénéisation suivant (dans le cadre périodique) : il existe un correcteur w tel que les solutions $u_\varepsilon(f)$ sont bien approximées en norme H^1 par la solution corrigée :

$$u_{\varepsilon,1}(f) = u_\star(f) (1 + \varepsilon w(\varepsilon^{-1}\cdot)).$$

L'étude du gradient de cette approximation suggère de considérer le problème (5) dans le but de définir notre terme correcteur:

$$\inf_{C \in (L^\infty(\Omega))^2} \sup_{f \in L_n^2(\Omega)} \|\nabla u_\varepsilon(f) - \nabla \bar{u}(f) - \bar{u}(f)C\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (5)$$

Nous noterons \bar{C}_ε le minimiseur de (5).

3 Un résultat de consistance

Le résultat de consistance suivant justifie notre méthode :

Proposition 1 (Consistance asymptotique, cas périodique) *Considérons le problème*

$$I_\varepsilon = \inf_{\bar{V} \in \mathbb{R}} \sup_{f \in L_n^2(\Omega)} \left\| (-\Delta)^{-1}(-\Delta + \bar{V})(u_\varepsilon(f) - \bar{u}(f)) \right\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (6)$$

Sous les hypothèses classiques d'homogénéisation pour (1), on a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon = 0$.

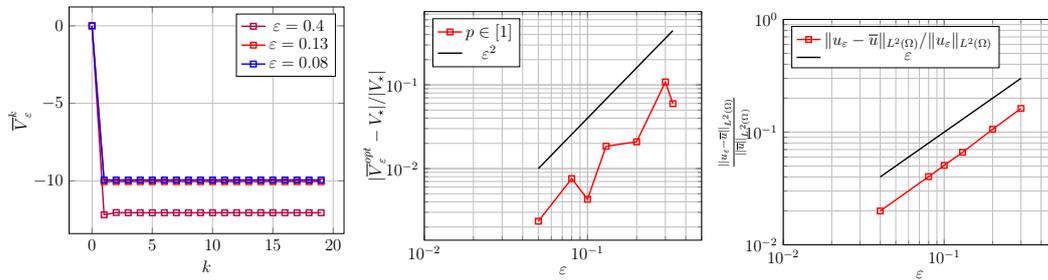
Pour $\varepsilon > 0$ fixé et suffisamment petit, il existe un unique minimiseur $\bar{V}_\varepsilon^{opt} \in \mathbb{R}$. On a de plus la convergence suivante $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{V}_\varepsilon^{opt} = V_\star$.

En pratique, il ne sera pas possible d'optimiser sur tous les seconds membres dans $L_n^2(\Omega)$ dans (6). Dans nos expérimentations numériques, nous réaliserons une approximation de ce supremum par un maximum sur un ensemble de seconds membres bien choisis.

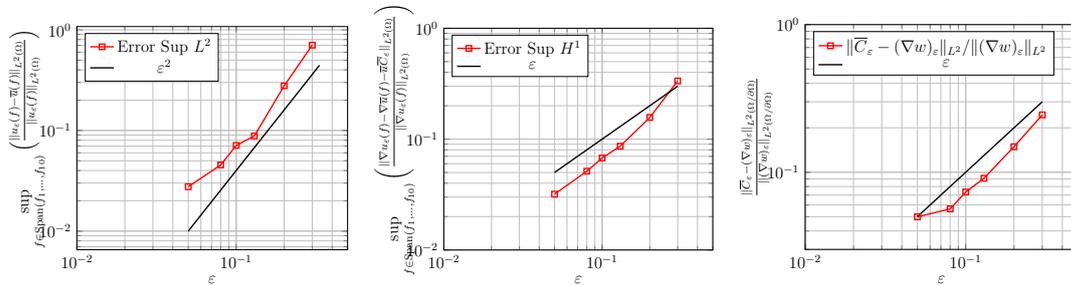
4 Résultats numériques

Notre méthodologie a été mise en oeuvre sur un cas test en dimension 2.

Concernant la reconstruction des grandeurs macroscopiques (i.e. le potentiel homogénéisé, et les solutions associées), l'algorithme s'est avéré avoir des performances très satisfaisantes en terme de coût de calculs (voir figure 1a) et de précision (voir figures 1b



(a) Valeurs de \bar{V}_ε^k au cours des itérations k . (b) Erreur relative entre $\bar{V}_\varepsilon^{opt}$ et V_\star . (c) Erreur relative L^2 entre u_ε et \bar{u} .



(d) Erreur relative L^2 sur de nouveaux seconds membres. (e) Approximation de ∇u_ε par $\nabla \bar{u} + \bar{u}C_\varepsilon$. (f) Approximation de $(\nabla w)_\varepsilon$ par C_ε .

et 1c). De plus, la versatilité de notre stratégie peut se lire dans la figure 1d. On y voit en effet qu'on parvient à définir un potentiel effectif satisfaisant (i.e. générant des taux d'erreur de l'ordre de la dizaine de pourcents pour un critère pertinent) y compris en dehors du régime de l'homogénéisation.

Concernant la reconstruction du terme correcteur, les résultats numériques sont également satisfaisants (voir figures 1e et 1f). L'étude des résultats montre en effet que la correction est optimale puisque les taux d'erreur sont exactement ceux de l'erreur de troncature du développement à deux échelles.

Bibliographie

Bensoussan, A. et Lions, J.-L. et Papanicolaou, G. (1978), *Asymptotic analysis for periodic structures*, 374, American Mathematical Society.

Le Bris, C. et Legoll, F. et Li, K. (2013), Approximation grossière d'un problème elliptique à coefficients hautement oscillants, *Comptes Rendus Mathématique*, 351, pp. 265-270.

Le Bris, C. et Legoll, F. et Lemaire, S. (2018), On the best constant matrix approximating an oscillatory matrix-valued coefficient in divergence-form operators, *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 24, pp. 1345-1380.

OPEN DOMAINS OF DISCONTINUITY OF THE CHARACTER VARIETY

Suzanne Schlich ¹

¹ *Université Grenoble Alpes
Institut Fourier
100 Rue des Mathématiques
38610 Gières France
suzanne.schlich@unistra.fr*

Résumé. Dans cet exposé, on introduira la variété des caractères et l'action du groupe des automorphismes extérieurs sur celle-ci. On s'intéressera à la question de la dynamique de cette action et on cherchera des exemples d'ouverts de propre-discontinuité. Ainsi on commencera par donner deux exemples de tels ouverts motivés par la géométrie : l'espace de Teichmüller et les représentations convexes-cocompactes. Ensuite, on définira les représentations primitives-stables et les représentations de Bowditch qui donnent encore d'autres exemples et on présentera l'équivalence entre ces deux classes de représentations.

Mots-clés. Variété des caractères, ouverts de propre-discontinuité, géométrie hyperbolique, espace de Teichmüller, représentation de Bowditch, représentations primitives-stables

Abstract. In this talk, we will introduce the character variety and the action of the outer automorphism group on it. Understanding the dynamics of this action is a central issue, and thus finding open domains of discontinuity for this action is particularly interesting. We will start by giving two geometrically motivated examples of such open sets : the Teichmüller space and the set of convex-cocompact representations. Next, we will define primitive-stable representations and Bowditch representations, which give yet more examples, and we will present the equivalence between these two classes of representations.

Keywords. Character variety, open domains of discontinuity, hyperbolic geometry, Teichmüller space, Bowditch representations, primitive-stable representations

1 Ouverts de discontinuité de la variété des caractères

1.1 La variété des caractères

Dans ce qui suit, on fixe Γ un groupe de type fini et G un groupe topologique (en général G un groupe de Lie ou plus généralement G le groupe des isométries d'un espace métrique).

On s'intéresse à l'espace $\text{Hom}(\Gamma, G)$ des représentations de Γ dans G muni de la topologie compacte-ouverte. Cet espace, bien trop gros d'un point de vue géométrique, admet un quotient par l'action de G par conjugaison que l'on appelle la *variété des caractères* (en fait on rend le quotient séparé en considérant l'"Hausdorffisation" de $\text{Hom}(\Gamma, G)/G$, c'est à dire son plus grand quotient séparé). On note cet espace $\chi(\Gamma, G) = \text{Hom}(\Gamma, G)//G$. Comme nous le verrons plus tard, la variété des caractères est particulièrement intéressante car dans bien des contextes, elle encode des structures géométriques.

On considère également le groupe des automorphismes extérieurs $\text{Out}(\Gamma) = \text{Aut}(\Gamma)/\text{Inn}(\Gamma)$, c'est à dire le quotient du groupe des automorphismes du groupe Γ par les automorphismes intérieurs. Le groupe des automorphismes extérieurs interagit naturellement avec la variété des caractères. En effet, il y a une action de $\text{Out}(\Gamma)$ sur $\chi(\Gamma, G)$ par précomposition :

$$\begin{aligned} \text{Out}(\Gamma) \times \chi(\Gamma, G) &\longrightarrow \chi(\Gamma, G) \\ ([\phi], [\rho]) &\longmapsto [\phi].[\rho] = [\rho \circ \phi^{-1}] \end{aligned}$$

Remarque 1. Bien que l'élément $\rho \circ \phi^{-1}$ ne soit pas bien défini puisque ϕ est uniquement défini aux automorphismes intérieurs près, sa classe $[\rho \circ \phi^{-1}]$, elle, est bien définie.

Comprendre la dynamique de cette action et trouver des sous-espaces de la variété des caractères sur lesquels l'action est géométriquement "sympathique" est une question centrale et très active dans le domaine. Plus précisément, on recherche des ouverts de discontinuité, c'est à dire des sous-ensembles ouverts sur lesquels l'action est proprement discontinue. On rappelle que l'action d'un groupe \mathcal{G} sur un espace topologique \mathcal{X} est dite *proprement discontinue* si, pour tout compact K de \mathcal{X} , l'ensemble $\{g \in \mathcal{G} \mid (gK) \cap K \neq \emptyset\}$ est fini.

1.2 Premier exemple : l'espace de Teichmüller

Dans cet exemple $\Gamma = \pi_1(S)$ et $G = \text{PSL}(2, \mathbb{R})$.

L'exemple de départ qui motive l'étude des ouverts de discontinuité de la variété des caractères est l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(S)$.

On se donne S une surface compacte orientée de caractéristique d'Euler $\chi(S) < 0$ et on note $\pi_1(S)$ son groupe fondamental. L'espace $\mathcal{T}(S)$ est l'espace des métriques hyperboliques vues à isotopies près sur S . C'est un fait classique que l'espace de Teichmüller s'identifie à une composante connexe de la variété des caractères $\chi(\pi_1(S), \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$.

Le groupe modulaire $\text{MCG}(S)$ de la surface S est le groupe des classes d'homotopies d'homéomorphismes de S préservant l'orientation. Il s'identifie à un sous-groupe d'indice deux du groupe $\text{Out}(\pi_1(S))$ et agit sur l'espace de Teichmüller. La dynamique de l'action du groupe modulaire sur l'espace de Teichmüller est donnée par le Théorème de Fricke :

Théorème 1 (Fricke). *L'action de $\text{MCG}(S)$ sur $\mathcal{T}(S)$ est proprement discontinue.*

1.3 Deuxième exemple : Les représentations convexes-cocompactes

Dans cet exemple Γ est hyperbolique et $G = \text{SO}_0(n, 1)$.

Un autre exemple central d'ouverts de discontinuité de la variété des caractères est l'espace des représentations convexes-cocompactes. Soit Γ un groupe hyperbolique et $G = \text{SO}_0(n, 1)$ le groupe des isométries de \mathbb{H}^n , l'espace hyperbolique usuel de dimension n . On définit $\text{CC}(\Gamma, G)$ le sous-espace de la variété des caractères constitué des représentations qui préservent un convexe non-vide de \mathbb{H}^n sur lequel l'action est proprement discontinue et cocompacte. Cette condition est équivalente à demander que l'application orbitale soit un plongement quasi-isométrique. En particulier $\text{CC}(\Gamma, G)$ est uniquement constitué de représentations discrètes. On peut montrer que $\text{CC}(\Gamma, G)$ est ouvert et que l'action du groupe des automorphismes extérieurs $\text{Out}(\Gamma)$ agit proprement discontinuement sur $\text{CC}(\Gamma, G)$.

Ainsi on peut naturellement se demander s'il existe d'autres exemples d'ouverts de propre-discontinuité pour l'action de $\text{Out}(\Gamma)$. Ces exemples sont-ils maximaux ou en existe-t-il de plus gros ? Peuvent-ils contenir des représentations non-discrètes ?

Les représentations de Bowditch et primitives-stables vont répondre à ces questions.

2 Représentations de Bowditch et primitives-stables

2.1 Représentations de Bowditch

En 1998, Bowditch a introduit dans [Bow98] une classe de représentations du groupe $\Gamma = \mathbb{F}_2$ (le groupe libre de rang deux) dans $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$, ensuite généralisé par Tan, Wong, Zhang dans [TWZ08]. Ces représentations sont définies par des conditions sur les traces des images des éléments primitifs de \mathbb{F}_2 . (On rappelle qu'un élément de \mathbb{F}_k est dit *primitif* s'il appartient à une base de \mathbb{F}_k .) On note $\mathcal{P}(\mathbb{F}_2)$ l'ensemble des éléments primitifs de \mathbb{F}_2 . En particulier, ils montrent que cet ensemble de représentations, noté \mathcal{BQ} , est ouvert et que le groupe des automorphismes extérieurs de \mathbb{F}_2 agit proprement discontinuement dessus. De plus, ils montrent que les conditions qu'ils introduisent sur une représentation ρ sont équivalentes à l'existence $C > 0$ telle que pour tout élément primitif γ de \mathbb{F}_2 , on a l'inégalité : $\frac{1}{C} \|\gamma\| \leq l(\rho(\gamma))$. Ici $\|\gamma\|$ désigne la longueur de mot cycliquement réduite de γ dans \mathbb{F}_2 , et $l(\rho(\gamma))$ la longueur de translation de l'élément $\rho(\gamma)$ vu comme une isométrie de \mathbb{H}^3 (on rappelle que $\text{PSL}(2, \mathbb{C}) = \text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$). Cette dernière inégalité, qui n'utilise plus les traces dans $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ se généralise directement à n'importe quel groupe

G des isométries d'un espace métrique. En particulier, dans ce travail on s'intéressera particulièrement à $G = \text{Isom}(X)$, avec X un espace δ -hyperbolique (géodésique, propre). Cela motive la définition suivante pour les représentations de Bowditch dans le contexte plus général d'un groupe G d'isométries d'un espace métrique (hyperbolique) :

Définition 1. Soit $\rho : \mathbb{F}_2 \rightarrow \text{Isom}(X)$ une représentation. On dit que ρ est une *représentation de Bowditch* s'il existe deux constantes $C \geq 1, D \geq 0$ telles que :

$$\forall \gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_2), \quad \frac{1}{C} \|\gamma\| - D \leq l(\rho(\gamma))$$

On note $\mathcal{BQ}(\mathbb{F}_2, \text{Isom}(X))$ l'ensemble des représentations de Bowditch de \mathbb{F}_2 dans $\text{Isom}(X)$.

2.2 Représentations primitives-stables

Par ailleurs, Minsky a introduit en 2010 dans [Min13] les représentations primitives-stables d'un groupe libre \mathbb{F}_n à valeurs dans $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$. Il s'agit de représentations pour lesquels l'application orbitale réalise des plongements quasi-isométriques uniformes sur les axes des éléments primitifs dans le graphe de Cayley de \mathbb{F}_n . Cette définition, bien qu'initialement introduite dans $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ par Minsky, se généralise directement aux groupes $\text{Isom}(X)$ d'isométries d'espaces métriques (hyperboliques).

Définition 2. Soit $\rho : \mathbb{F}_n \rightarrow \text{Isom}(X)$ une représentation. On dit que ρ est *primitive-stable* s'il existe deux constantes $C \geq 1$ et $D \geq 0$ telles que pour tout élément primitif $\gamma \in \mathbb{F}_n$, l'application orbitale τ_ρ restreinte à l'axe de γ dans le graphe de Cayley, est un (C, D) plongement quasi-isométrique.

On note $\mathcal{PS}(\mathbb{F}_n, \text{Isom}(X))$ l'ensemble des représentations primitives-stables de \mathbb{F}_n dans $\text{Isom}(X)$. Minsky montre que l'ensemble des représentations primitives-stables de \mathbb{F}_n dans $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ forme un ouvert de propre discontinuité pour l'action de $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$. De plus, il montre que cet ensemble contient strictement les représentations convexes-cocompactes, et contient en particulier des représentations non-discrètes.

2.3 Équivalence

Il n'est pas très difficile de remarquer que les représentations primitives-stables sont en particulier des représentations de Bowditch. En revanche, l'autre inclusion est bien plus difficile.

Lee et Xu d'une part (dans [LX19]), et Series indépendamment (dans [Ser20]), ont montré que l'ensemble des représentations de Bowditch et l'ensemble des représentations primitives-stables de \mathbb{F}_2 à valeurs dans $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ sont égales.

On s'est intéressé au cas où le groupe G est remplacé plus généralement par un groupe d'isométries d'un espace δ -hyperbolique (géodésique, propre). Nos méthodes sont indépendantes de celles de Lee-Xu et Series pour le cas $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$.

Théorème 2 (S. '22). *Soit X un espace δ -hyperbolique, géodésique, propre.*

$$\mathcal{BQ}(\mathbb{F}_2, \mathrm{Isom}(X)) = \mathcal{PS}(\mathbb{F}_2, \mathrm{Isom}(X))$$

Il n'est pas dur de montrer que les représentations primitives-stables forment un ouvert de propre-discontinuité de $\chi(\mathbb{F}_2, \mathrm{Isom}(X))$. On en déduit donc le corollaire suivant :

Corollaire 3. *L'ensemble $\mathcal{BQ}(\mathbb{F}_2, X)$ est un ouvert de propre-discontinuité pour l'action de $\mathrm{Out}(\mathbb{F}_2)$ sur $\chi(\mathbb{F}_2, \mathrm{Isom}(X))$.*

References

- [Bow98] B.H. Bowditch. “Markoff triples and quasifuchsian groups”. en. In: *Proceedings of the London Mathematical Society* 77.3 (Nov. 1998), pp. 697–736.
- [LX19] Jaejeong Lee and Binbin Xu. “Bowditch’s Q-conditions and Minsky’s primitive stability”. en. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 373.2 (Oct. 2019), pp. 1265–1305.
- [Min13] Yair N. Minsky. “On dynamics of $\mathrm{Out}(F_n)$ on $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ characters”. en. In: *Israel J. Math.* 193 (2013), pp. 47–70.
- [Ser20] Caroline Series. “Primitive stability and the Bowditch conditions revisited”. en. In: *arXiv:2006.10403 [math]* (June 2020).
- [TWZ08] Ser Peow Tan, Yan Loi Wong, and Ying Zhang. “Generalized Markoff maps and McShane’s identity”. en. In: *Advances in Mathematics* 217.2 (Jan. 2008), pp. 761–813.

Liste des participants

- Al Choueiry Nicolas
- Alonso García Jennifer
- Ayuso Ventura Irene
- Basset Estelle
- Belrhazi Malika
- Bertelson Mélanie
- Bertrand-Mathis Anne
- Bissot Rémi
- Bobrova Irina
- Boyé Anne
- Broze Laurence
- Chalendar Isabelle
- Conrado Jackeline
- Cren Clément
- De Mol Christine
- De Saedeleer Julie
- Dehon Catherine
- Escalier Amandine
- Fournies Noémie
- Fovelle Audrey
- Gil Moreno De Mora I Sardà Teo
- Goujard Elise
- Grandmont Celine
- Grellier Sandrine
- Guillopé Colette

- Gutt Simone
- Huyghe Julie
- Khaled Zahraa
- Lecomte Florence
- Maxime Boucher
- Mehidi Lilia
- Mélard Guy
- Menet Quentin
- Mol Louan
- Mulpas Jessica
- Ostermann Maëva
- Paindaveine Davy
- Parrini Noémie
- Patriarca Clara
- Peralvo Maroto Laura
- Pierron Thomas
- Portier Natacha
- Premoselli Bruno
- Raissy Jasmin
- Rivière Christian
- Roig Sanchis Anna
- Ruget Simon
- Salem Eliane
- Schlich Suzanne
- Swan Yvik
- Van Bever Germain
- Vancraeynest Matthias
- Verdebout Thomas
- Yasaka Kenzo