

Forum des jeunes mathématicien-nes
Analyse, géométrie et applications
Bruxelles, 22-24 novembre 2023

Approche hamiltonienne pour la caractérisation des systèmes planétaires

Anne-Sophie Libert
naXys Research Institute
Département de Mathématique
Université de Namur



UNIVERSITÉ
DE NAMUR

naxys
Namur Institute
for Complex Systems

Notre expertise

Etude des systèmes complexes au moyen de l'analyse de données réelles, la modélisation des systèmes via les mathématiques et les simulations numériques ainsi que leur contrôle et optimisation



**Expertise dans les outils adéquats
de modélisation, analyse et
simulations numériques**

**Expertise dans
les disciplines
scientifiques**

6 pôles de recherche



SPACE

Dynamical astronomy,
cosmology and astrobiology



BIO

Mathematical biology



OPTI

Optical engineering
and quantum optics



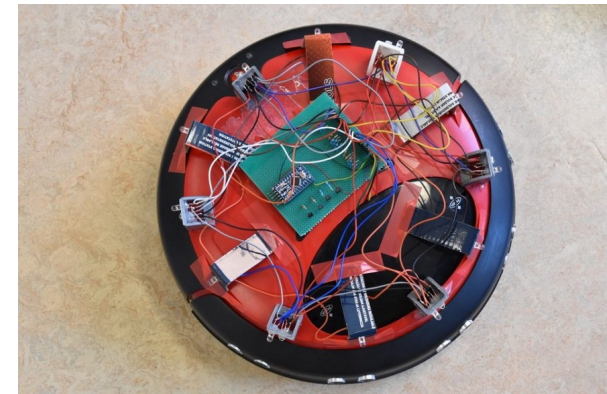
ROBUST

Stability and robustness



ECO

Socio-economic complexity



AI

Optimization algorithms,
artificial intelligence & robotics



SPACE

Dynamical astronomy,
cosmology and astrobiology



ROBUST

Stability and robustness

Objectif

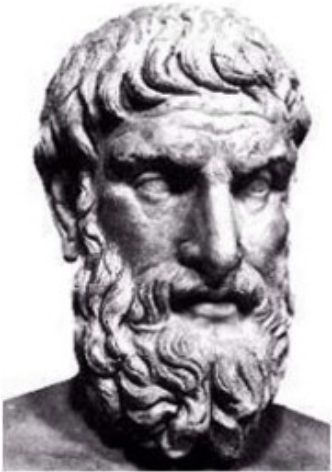
Les modèles mathématiques sont un atout pour contraindre les incertitudes observationnelles des systèmes planétaires.

Table des matières

- Contexte
- Approche hamiltonienne pour l'évolution dynamique des systèmes extrasolaires
- Applications aux observations

Contexte

LA PLURALITE DES MONDES



Epicure (341-270 ACN)

“ L’Univers est infini. (...) De même, les mondes sont en nombre infini, aussi bien ceux qui ressemblent au nôtre que ceux qui en diffèrent. ”

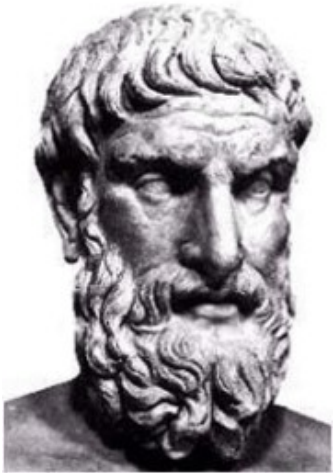


Aristote (384-322 ACN)

Géocentrisme

La Terre est
LE centre
de l’Univers

LA PLURALITE DES MONDES



Epicure (341-270 ACN)

“ L’Univers est infini. (...) De même, les mondes sont en nombre infini, aussi bien ceux qui ressemblent au nôtre que ceux qui en diffèrent. ”



Aristote (384-322 ACN)

Géocentrisme

La Terre est
LE centre
de l’Univers



Copernic (1473-1543)

“ Tous les mouvements apparents que l’on constate au firmament sont dus aux mouvements de la Terre et non du firmament. ”

UNE DES PLUS GRANDES DECOUVERTES DU XXe SIECLE

1995 : Découverte de la 1ere **exoplanète**
autour d'une étoile de type solaire
(51Peg, OHP, Mayor et Queloz)



OHP



NOBELPRISET I FYSIK 2019
THE NOBEL PRIZE IN PHYSICS 2019



KUNGL.
VETENSKAPS-
AKADEMIEN
THE ROYAL SWEDISH ACADEMY OF SCIENCES

"för bidrag till vår förståelse av universums utveckling och jordens plats i universum"

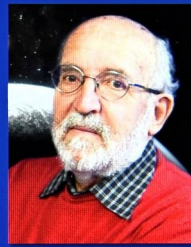
"for contributions to our understanding of the evolution of the universe and Earth's place in the cosmos"



James Peebles

"för teoretiska upptäckter inom fysikalisk kosmologi"

"for theoretical discoveries in physical cosmology"



Michel Mayor

"för upptäckten av en exoplanet i bana kring en solliknande stjärna"

"for the discovery of an exoplanet orbiting a solar-type star"



Didier Queloz

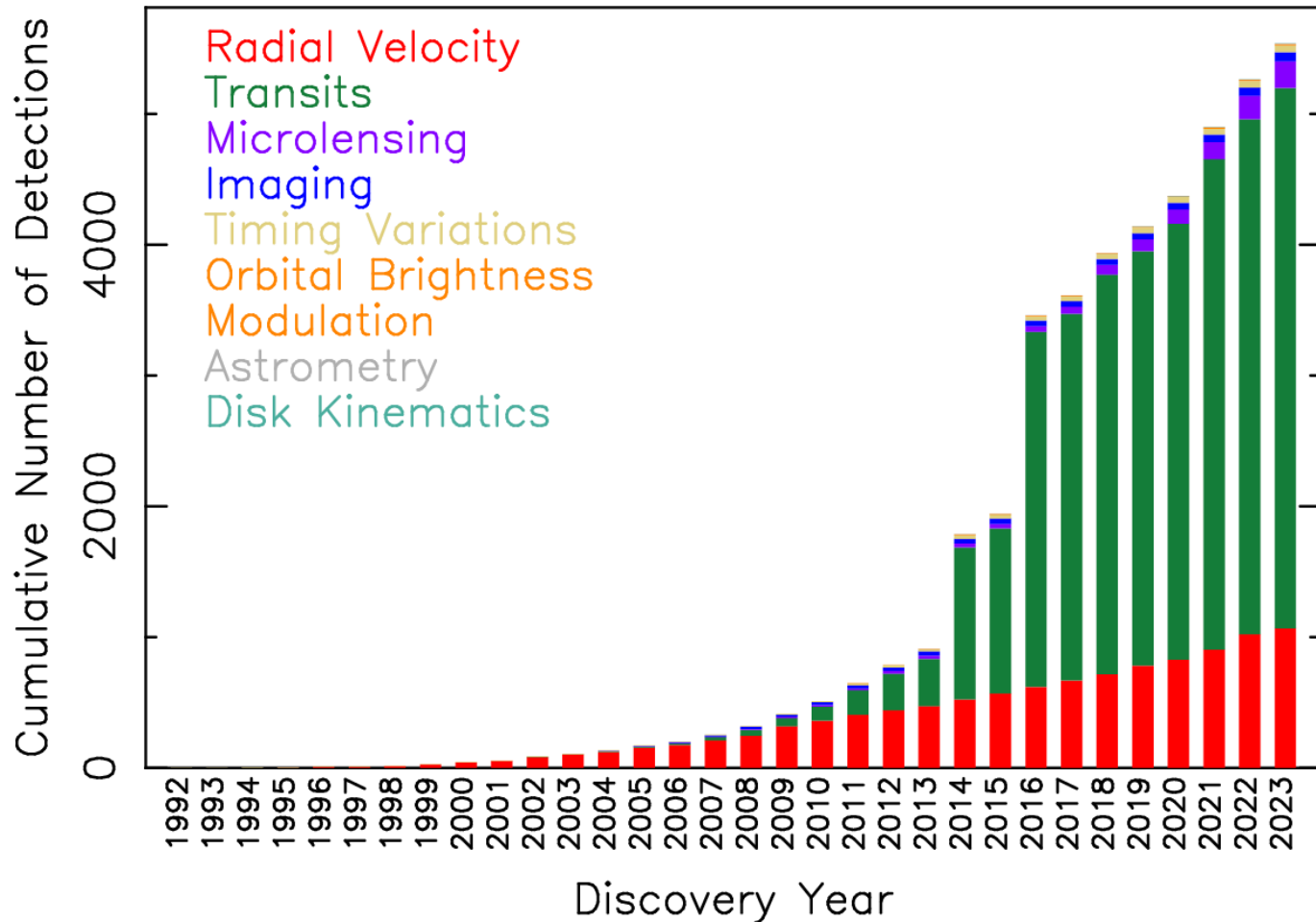
Découverte
récompensée
par le prix
Nobel de
Physique 2019

5539 exoplanètes

885 systèmes extrasolaires multiples

Cumulative Detections Per Year

09 Nov 2023
exoplanetarchive.ipac.caltech.edu



DETECTER ET NON OBSERVER

Difficultés :

- très grand contraste lumineux
- séparation angulaire minuscule



Vue d'artiste. Crédit : Obs. de Paris / UFE

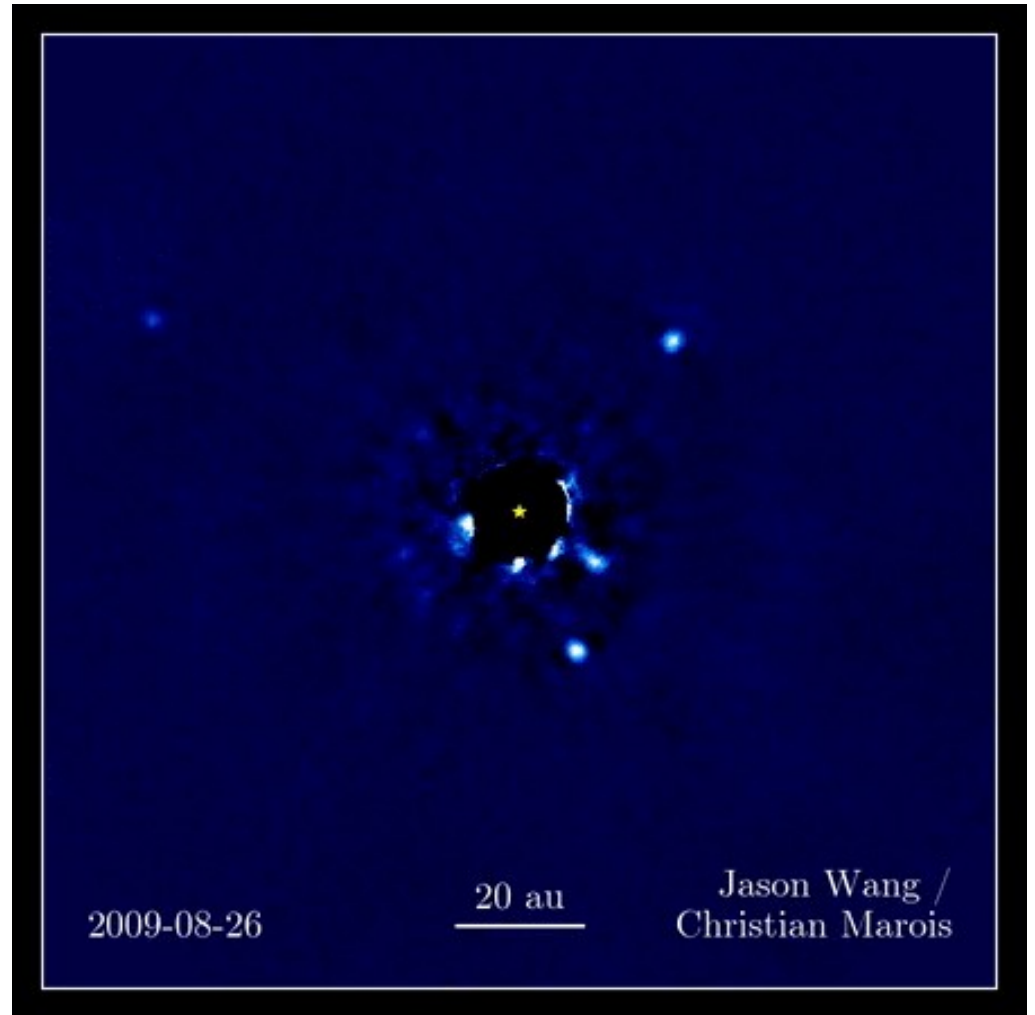
DETECTER ET NON OBSERVER

Difficultés :

- très grand contraste lumineux
- séparation angulaire minuscule



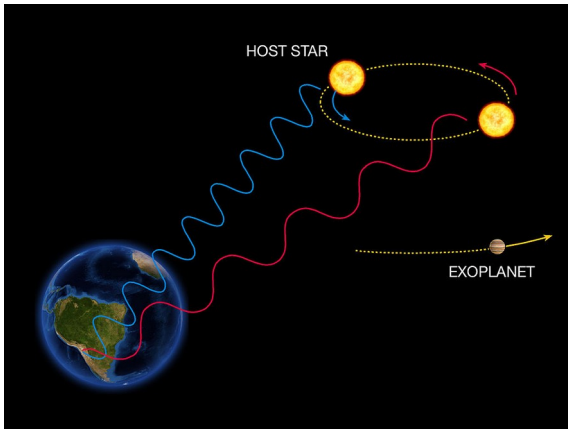
Vue d'artiste. Crédit : Obs. de Paris / UFE



HR 8799 et ses 4 planètes géantes
7 images prises par le Keck Telescope sur 7 années
(périodes orbitales en dizaines / centaines d'années)

INCERTITUDES DANS LES OBSERVATIONS

Vitesses radiales (RV)



The Radial Velocity Method



ESO Press Photo 22e/07 (25 April 2007)

This image is copyright © ESO. It is released in connection with an ESO press release and may be used by the press on the condition that the source is clearly indicated in the caption.

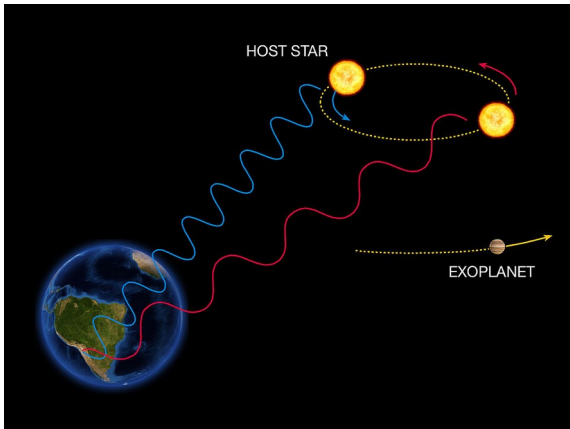
- Masses
- Excentricités

Inconnues :

- Inclinaisons
(orbites coplanaires?)

INCERTITUDES DANS LES OBSERVATIONS

Vitesses radiales (RV)



The Radial Velocity Method



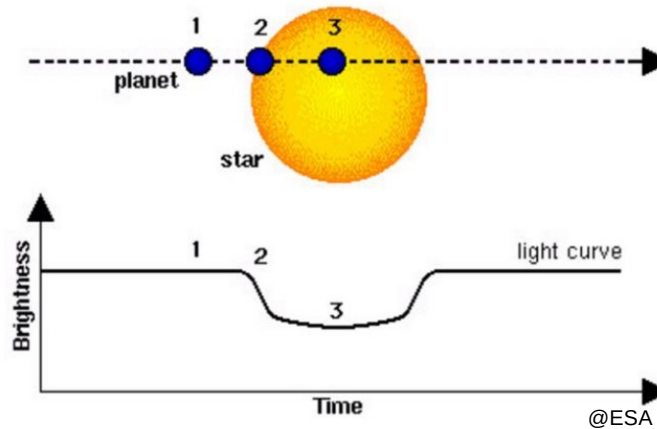
ESO Press Photo 22e/07 (25 April 2007)
This image is copyright © ESO. It is released in connection with an ESO press release and may be used by the press on the condition that the source is clearly indicated in the caption.

- Masses
- Excentricités

Inconnues :

- Inclinaisons
(orbites coplanaires?)

Transits



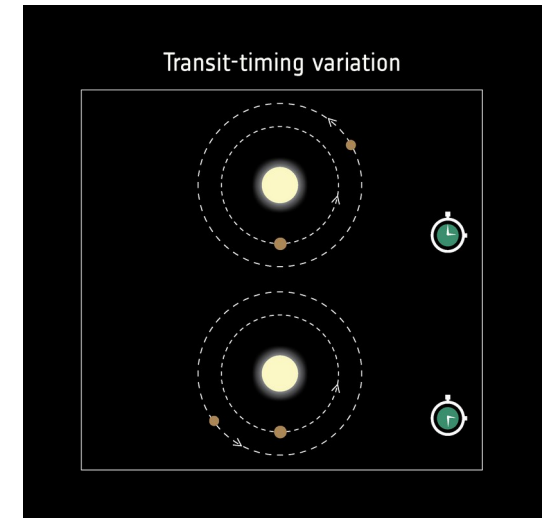
@ESA

- Rayon
- Inclinaisons

Inconnues :

- Masses
- Excentricités

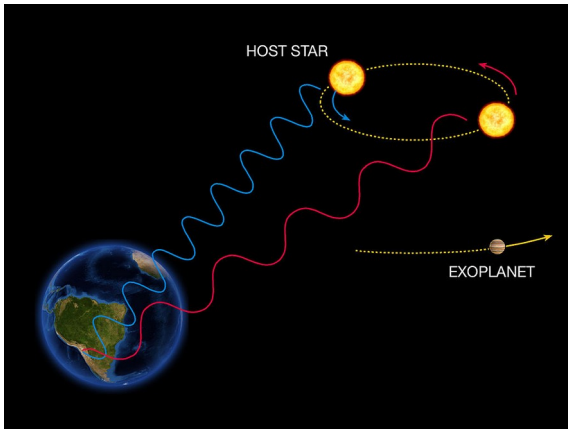
+ Variations des temps de transits (TTVs)



@ESA

INCERTITUDES DANS LES OBSERVATIONS

Vitesses radiales (RV)



The Radial Velocity Method



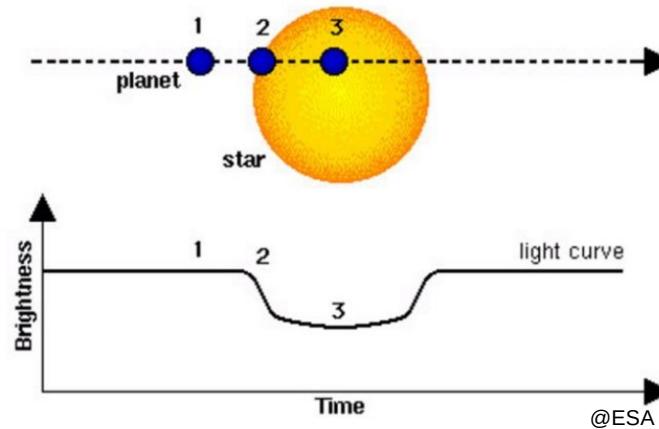
ESO Press Photo 22e/07 (25 April 2007)
This image is copyright © ESO. It is released in connection with an ESO press release and may be used by the press on the condition that the source is clearly indicated in the caption.

- Masses
- Excentricités

Inconnues :

- Inclinaisons
(orbites coplanaires?)

Transits



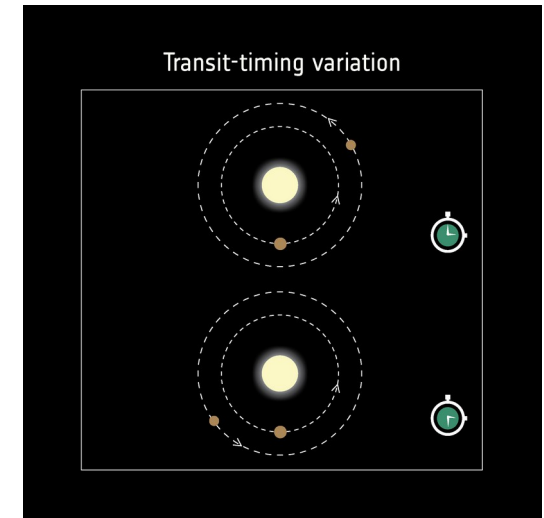
@ESA

- Rayon
- Inclinaisons

Inconnues :

- Masses
- Excentricités

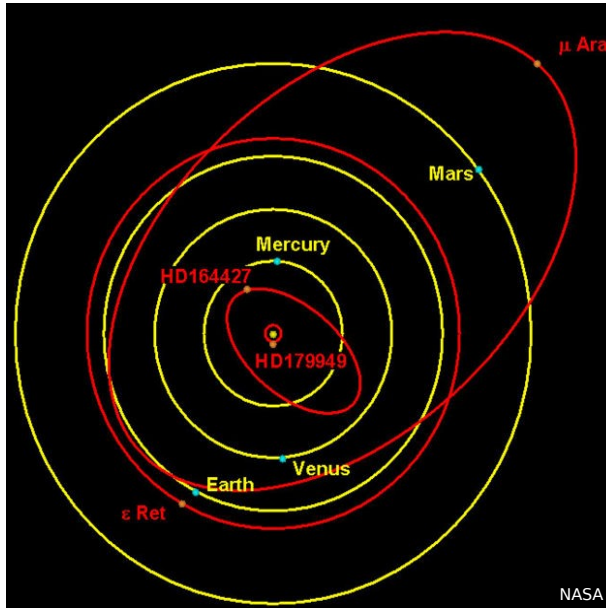
+ Variations des temps de transits (TTVs)



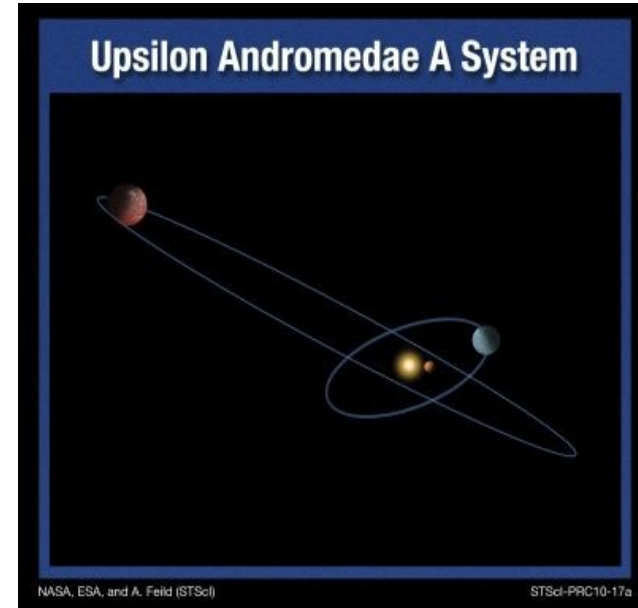
@ESA

+ De grandes barres d'erreur sur les éléments connus

DES CARACTERISTIQUES SURPRENANTES

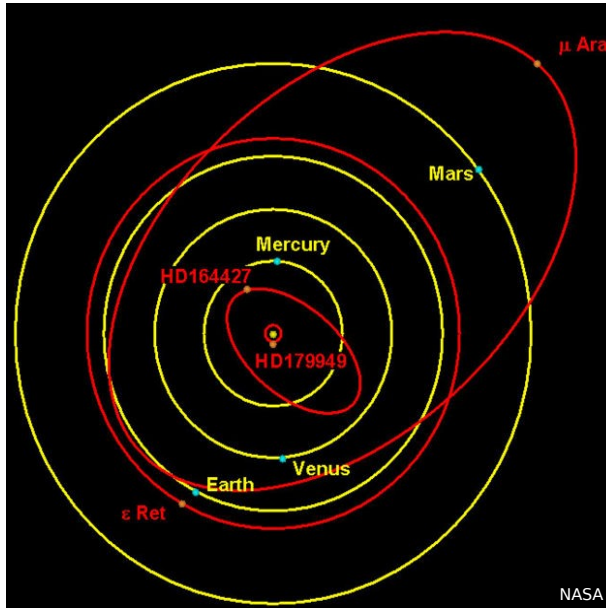


Orbites très excentriques

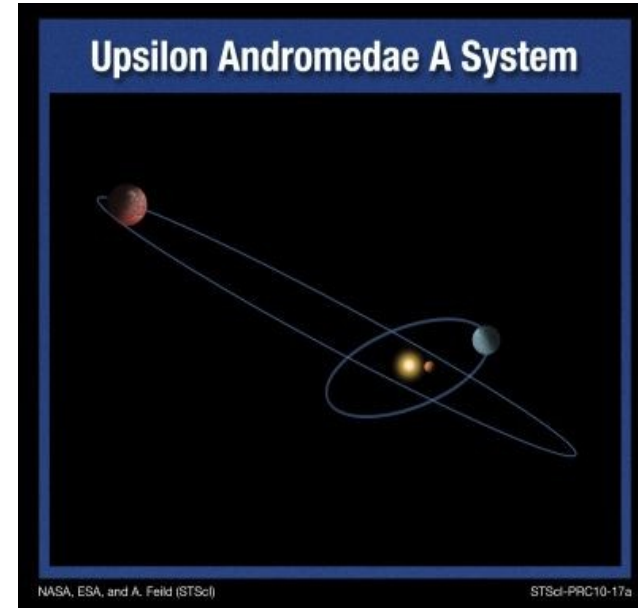


Systèmes non coplanaires

DES CARACTERISTIQUES SURPRENANTES



Orbites très excentriques



Systèmes non coplanaires

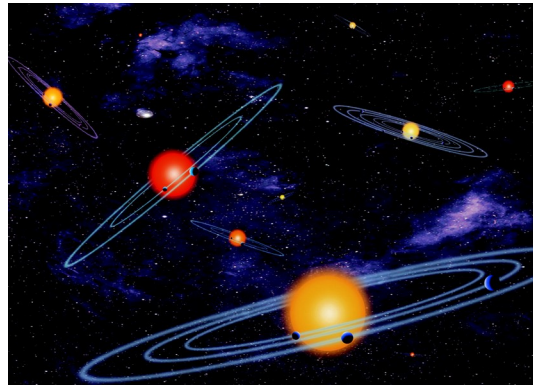
Limite des modèles analytiques conçus pour les orbites circulaires et coplanaires du système solaire

Besoin de nouveaux modèles analytiques

Approche hamiltonienne pour l'évolution dynamique des systèmes extrasolaires

PROBLEME DES N CORPS

- **N=2** Le problème est intégrable (deux orbites elliptiques fixes, 1ère loi de Kepler)
- **N>2** Le problème n'est pas intégrable → pas de solution analytique
- Intégration numérique des équations du mouvement (simulations à N corps) pour une connaissance précise de l'évolution à long terme du système
- Vue complémentaire apportée par les approches analytiques (théorie des perturbations) pour interpréter la dynamique du problème et explorer l'espace de phase tout entier
- Pour chaque planète: masse + 6 variables ($a, e, i, \omega, \Omega, f$) variant au cours du temps
→ **3N degrés de liberté**



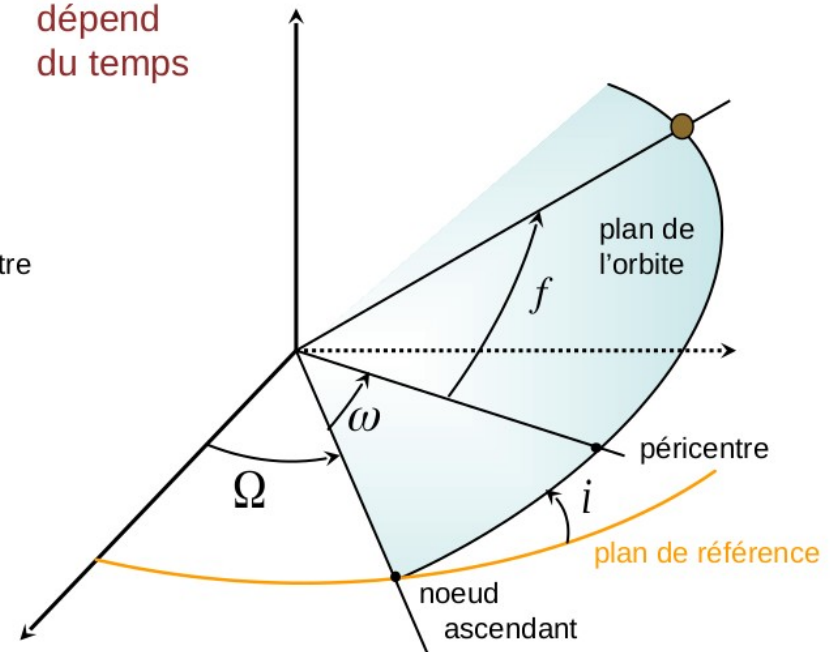
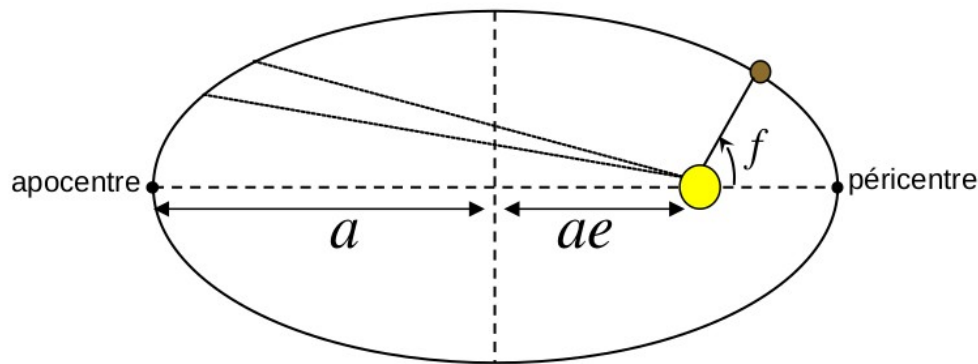
ELEMENTS ORBITAUX

- 1ère loi de Kepler : Chaque planète décrit une ellipse dont le Soleil est un foyer.
- La trajectoire est décrite par 6 éléments orbitaux, tous variant avec le temps.

$$(a, e, i, \omega, \Omega, f)$$

constantes

dépend
du temps



FORMALISME HAMILTONIEN

- Equations de Newton

$$\frac{d^2 \vec{u}_i}{dt^2} = -G \sum_{j \neq i} m_j \frac{\vec{u}_i - \vec{u}_j}{\|\vec{u}_i - \vec{u}_j\|^3} \quad (i = 0, 1, \dots, n - 1)$$

3n degrés

- Invariance par translation : réduction du centre de masse (-3 deg de liberté)
Invariance par rotation : invariance du moment cinétique total (-2 deg de liberté)

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i \vec{u}_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{n-1} m_i \frac{d\vec{u}_i}{dt} = 0$$

- Hamiltonien du problème planétaire des **trois corps** = **Energie**

$$\mathcal{H} = \underbrace{-\frac{Gm_0m_1}{2a_1} - \frac{Gm_0m_2}{2a_2}}_{\text{Problèmes des deux corps}} - \underbrace{Gm_1m_2 \left[\frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} - \frac{(\vec{r}_1 | \vec{r}_2)}{r_2^3} \right]}_{\text{Interaction entre les planètes}}$$

6 degrés

DEVELOPPEMENT EN EXCENTRICITES ET INCLINAISONS

- Expression en fonction des éléments orbitaux

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos f \\ r \sin f \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Développement des normes et des anomalies vraies en série des excentricités

$$\begin{aligned} \cos(f - l) &= 1 - e^2 + \frac{7e^2}{64} + \dots - e\left[\frac{5e^2}{4} - \frac{51e^4}{144} + \dots\right] \cos l \\ &\quad + e^2\left[1 - \frac{15e^2}{9} \dots\right] \cos 2l + e^3\left[\frac{5}{4} - \frac{37e^2}{16} + \dots\right] \cos 3l + \dots \\ \sin(f - l) &= e\left[2 - \frac{5e^2}{4} + \frac{51e^4}{144} + \dots\right] \sin l \\ &\quad + e^2\left[\frac{5}{4} - \frac{41e^2}{24} + \dots\right] \sin 2l + e^3\left[\frac{51}{36} - \frac{339e^2}{144} + \dots\right] \sin 3l + \dots \\ \frac{r}{a} &= 1 + \frac{e^2}{2} + \dots - e\left[1 - \frac{3e^2}{8} + \frac{5e^4}{192} + \dots\right] \cos l \\ &\quad - e^2\left[\frac{1}{2} - \frac{e^2}{3} + \dots\right] \cos 2l - e^3\left[\frac{3}{8} - \frac{45e^2}{188} + \dots\right] \cos 3l + \dots \end{aligned}$$

Caractéristique de d'Alembert : l'exposant de l'excentricité est au moins égal au multiple de la variable angulaire (anomalie moyenne) et de même parité

DEVELOPPEMENT EN EXCENTRICITES ET INCLINAISONS

- A l'aide de ces développements, après un développement de Taylor

$$\frac{a_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = D + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} F_2^n D^{2n+1} \quad \text{où} \quad D = \left[1 + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 - 2\left(\frac{a_1}{a_2}\right) \cos(\lambda_1 - \lambda_2) \right]^{-1/2}$$

et suite à un développement en série de Fourier

$$D^{2n+1} = \sum_{k \geq 0} B_k^{(2n+1)/2} \cos k(\lambda_1 - \lambda_2)$$

où les coefficients, appelés coefficients de Laplace, dépendent du rapport des demi-grands axes et sont les fonctions hypergéométriques

$$B_k^{(2n+1)/2} = 2 \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^k \frac{(2k+2n-1)!!}{(2k)!!(2n-1)!!} F\left(\frac{2n+1}{2}, \frac{2n+1}{2} + k, k+1, \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2\right)$$



manipulateur de séries MSNam

DEVELOPPEMENT EN EXCENTRICITES ET INCLINAISONS

- Développement à ordre élevé

$$\mathcal{H} = -\frac{Gm_0m_1}{2a_1} - \frac{Gm_0m_2}{2a_2} - \frac{Gm_1m_2}{a_2} \sum_{k,i_l,j_l,l \in \mathbb{Z}} B_{i_l}^{k,j_l} \left(\sqrt{\frac{2P_1}{L_1}} \right)^{|j_1|+2i_1} \left(\sqrt{\frac{2P_2}{L_2}} \right)^{|j_2|+2i_2} \left(\sqrt{\frac{2Q_1}{L_1}} \right)^{|j_3|+2i_3} \left(\sqrt{\frac{2Q_2}{L_2}} \right)^{|j_4|+2i_4} \cos \Phi$$

$\mathbf{a}_1/a_2 \quad \mathbf{E}_1 \approx \mathbf{e}_1 \quad \mathbf{E}_2 \approx \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{S}_1 \approx \mathbf{i}_1 \quad \mathbf{S}_2 \approx \mathbf{i}_2$

$$\Phi = [(k + j_1 + j_3)\lambda_1 - (k + j_2 + j_4)\lambda_2 + j_1 p_1 - j_2 p_2 + j_3 q_1 - j_4 q_2]$$

6 degrés de liberté

Caractéristique de d'Alembert en (E,p) et (S,q)

- Eléments de Delaunay modifiés

$\lambda_i =$ longitude moyenne de m_i

$p_i =$ -longitude du péricentre de m_i ($= -\varpi_i$)

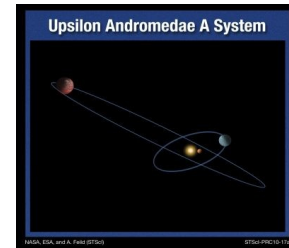
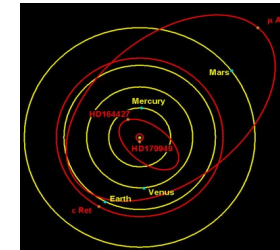
$q_i =$ -longitude du noeud de m_i ($= -\Omega_i$)

$L_i = m_i \sqrt{Gm_0 a_i}$

$P_i = L_i \left[1 - \sqrt{1 - e_i^2} \right]$

$Q_i = L_i \sqrt{1 - e_i^2} [1 - \cos i_i]$

- A l'ordre 12, ~1 250 000 termes → garder les termes essentiels seulement



THEORIE DES PERTURBATIONS PAR TRANSFORMEES DE LIE SYMPLECTIQUES [Hori 1966, Deprit 1969]

- Hamiltonien quasi-intégrable

$$\mathcal{H}(p, q) = \boxed{\mathcal{H}_0(p)} + \boxed{\sum_{i \geq 0} \frac{\epsilon^i}{i!} \mathcal{H}_i(p, q)}$$

Partie intégrable

Perturbation

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial q} = 0 \rightarrow p = \text{cste} \\ & \qquad \qquad \qquad \text{action} \\ \dot{q} &= \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial p} = \underline{w_0} \rightarrow q = w_0 t \\ & \qquad \qquad \qquad \text{angle} \end{aligned}$$

But: repousser la dépendance des variables angulaires (i.e. moyenner) pour obtenir un problème intégrable jusqu'à des ordres plus élevés

THEORIE DES PERTURBATIONS PAR TRANSFORMEES DE LIE SYMPLECTIQUES [Hori 1966, Deprit 1969]

- Hamiltonien quasi-intégrable

$$\mathcal{H}(p, q) = \boxed{\mathcal{H}_0(p)} + \boxed{\sum_{i \geq 0} \frac{\epsilon^i}{i!} \mathcal{H}_i(p, q)}$$

Partie intégrable

Perturbation

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial q} = 0 \rightarrow p = \text{cste}$$

action

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial p} = \underline{w_0} \rightarrow q = w_0 t$$

angle

But: repousser la dépendance des variables angulaires (i.e. moyenner) pour obtenir un problème intégrable jusqu'à des ordres plus élevés

- Hamiltonien moyenné

$$\bar{\mathcal{H}}(\bar{p}, \bar{q}) = \sum_{i=0}^N \frac{\epsilon^i}{i!} H_0^{(i)}(\bar{p}, -) + \boxed{\mathcal{R}(\bar{p}, \bar{q})}$$

Reste $O(\epsilon^{N+1})$

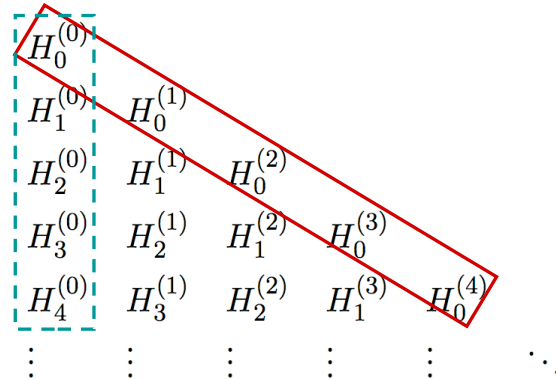
avec $H_0^{(i)}$ calculés par la formule de récurrence

$$H_i^{(j)} = H_{i+1}^{(j-1)} + \sum_{k=0}^i C_i^k \left(H_{i-k}^{(j-1)}; \mathcal{W}_{k+1} \right) \quad \text{avec} \quad \mathcal{W} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\epsilon^i}{i!} \mathcal{W}_{i+1}$$

générateur de la transformation

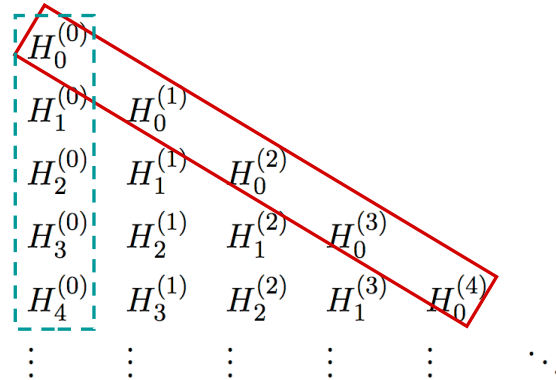
THEORIE DES PERTURBATIONS PAR TRANSFORMEES DE LIE SYMPLECTIQUES [Hori 1966, Deprit 1969]

- Triangle de Lie



THEORIE DES PERTURBATIONS PAR TRANSFORMEES DE LIE SYMPLECTIQUES [Hori 1966, Deprit 1969]

- Triangle de Lie



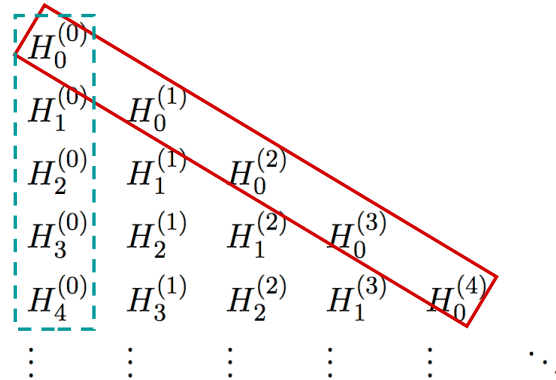
- Pratiquement il s'agit de résoudre à chaque ordre l'équation homologique

$$\underbrace{\mathcal{H}_0^{(k)}}_{\text{inconnu}} - \underbrace{\tilde{\mathcal{H}}_0^{(k)}}_{\text{connu}} = \left(\mathcal{H}_0^{(0)}; \mathcal{W}_k \right) = - \sum_{i=1}^n \omega_i \frac{\partial \mathcal{W}_k}{\partial q_i}$$

générateur
fréquences

THEORIE DES PERTURBATIONS PAR TRANSFORMEES DE LIE SYMPLECTIQUES [Hori 1966, Deprit 1969]

- Triangle de Lie



- Pratiquement il s'agit de résoudre à chaque ordre l'équation homologique

$$\underbrace{\mathcal{H}_0^{(k)}}_{\text{inconnu}} - \underbrace{\tilde{\mathcal{H}}_0^{(k)}}_{\text{connu}} = \left(\mathcal{H}_0^{(0)}; \mathcal{W}_k \right) = - \sum_{i=1}^n \omega_i \frac{\partial \mathcal{W}_k}{\partial q_i}$$

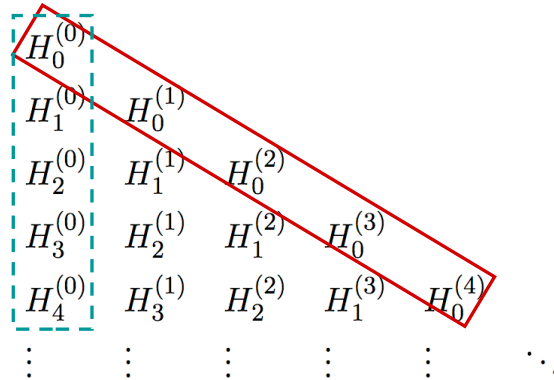
générateur
fréquences

$$\sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} \left[C_{i_1, i_2, \dots, i_n} \cos \left(\sum_{l=1}^n i_l q_l \right) + S_{i_1, i_2, \dots, i_n} \sin \left(\sum_{l=1}^n i_l q_l \right) \right] \quad \Updownarrow$$

$$\mathcal{W}_k = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} \left[\frac{C_{i_1, i_2, \dots, i_n} \sin \left(\sum_{l=1}^n i_l q_l \right)}{i_1 \omega_1 + \dots + i_n \omega_n} - \frac{S_{i_1, i_2, \dots, i_n} \cos \left(\sum_{l=1}^n i_l q_l \right)}{i_1 \omega_1 + \dots + i_n \omega_n} \right]$$

THEORIE DES PERTURBATIONS PAR TRANSFORMEES DE LIE SYMPLECTIQUES [Hori 1966, Deprit 1969]

- Triangle de Lie



- Pratiquement il s'agit de résoudre à chaque ordre l'équation homologique

$$\underbrace{\mathcal{H}_0^{(k)}}_{\text{inconnu}} - \underbrace{\tilde{\mathcal{H}}_0^{(k)}}_{\text{connu}} = \left(\mathcal{H}_0^{(0)}; \mathcal{W}_k \right) = - \sum_{i=1}^n \omega_i \frac{\partial \mathcal{W}_k}{\partial q_i} \quad \begin{array}{l} \text{générateur} \\ \text{fréquences} \end{array}$$

$$\sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} \left[C_{i_1, i_2, \dots, i_n} \cos \left(\sum_{l=1}^n i_l q_l \right) + S_{i_1, i_2, \dots, i_n} \sin \left(\sum_{l=1}^n i_l q_l \right) \right] \quad \Updownarrow$$

$$\mathcal{W}_k = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} \left[\frac{C_{i_1, i_2, \dots, i_n} \sin \left(\sum_{l=1}^n i_l q_l \right)}{i_1 \omega_1 + \dots + i_n \omega_n} - \frac{S_{i_1, i_2, \dots, i_n} \cos \left(\sum_{l=1}^n i_l q_l \right)}{i_1 \omega_1 + \dots + i_n \omega_n} \right]$$

≈ 0 (problème de petits dénominateurs)

- $i_1 = i_2 = \dots = i_n = 0$
 - cas de résonance
- les termes incriminés composent l'Hamiltonien moyenné $H_0^{(k)}$

DYNAMIQUE SECULAIRE

- Développement à ordre élevé

$$\mathcal{H} = -\frac{Gm_0m_1}{2a_1} - \frac{Gm_0m_2}{2a_2} - \frac{Gm_1m_2}{a_2} \sum_{k,i_l,j_l,l \in \underline{4}} B_{i_l}^{k,j_l} \left(\sqrt{\frac{2P_1}{L_1}} \right)^{|j_1|+2i_1} \left(\sqrt{\frac{2P_2}{L_2}} \right)^{|j_2|+2i_2} \left(\sqrt{\frac{2Q_1}{L_1}} \right)^{|j_3|+2i_3} \left(\sqrt{\frac{2Q_2}{L_2}} \right)^{|j_4|+2i_4} \cos \Phi$$

$\mathbf{a}_1/\mathbf{a}_2$ $\mathbf{E}_1 \approx \mathbf{e}_1$ $\mathbf{E}_2 \approx \mathbf{e}_2$ $\mathbf{S}_1 \approx \mathbf{i}_1$ $\mathbf{S}_2 \approx \mathbf{i}_2$

$$\Phi = [(k + j_1 + j_3)\lambda_1 - (k + j_2 + j_4)\lambda_2 + j_1 p_1 - j_2 p_2 + j_3 q_1 - j_4 q_2]$$

mean longitudes

COURTES PERIODES

longitudes of the pericenters ϖ

longitudes of the nodes Ω

LONGUES PERIODES

6 degrés de liberté

DYNAMIQUE SECULAIRE

- Développement à ordre élevé

$$\mathcal{H} = -\frac{Gm_0m_1}{2a_1} - \frac{Gm_0m_2}{2a_2} - \frac{Gm_1m_2}{a_2} \sum_{k,i_l,j_l,l \in \underline{4}} B_{i_l}^{k,j_l} \left(\sqrt{\frac{2P_1}{L_1}} \right)^{|j_1|+2i_1} \left(\sqrt{\frac{2P_2}{L_2}} \right)^{|j_2|+2i_2} \left(\sqrt{\frac{2Q_1}{L_1}} \right)^{|j_3|+2i_3} \left(\sqrt{\frac{2Q_2}{L_2}} \right)^{|j_4|+2i_4} \cos \Phi$$

$\mathbf{a}_1/\mathbf{a}_2$ $\mathbf{E}_1 \approx \mathbf{e}_1$ $\mathbf{E}_2 \approx \mathbf{e}_2$ $\mathbf{S}_1 \approx \mathbf{i}_1$ $\mathbf{S}_2 \approx \mathbf{i}_2$

$$\Phi = [(k + j_1 + j_3)\lambda_1 - (k + j_2 + j_4)\lambda_2 + j_1 p_1 - j_2 p_2 + j_3 q_1 - j_4 q_2]$$

~~mean longitudes~~

~~COURTES PERIODES~~

longitudes of the pericenters ϖ

longitudes of the nodes Ω

LONGUES PERIODES

6 degrés de liberté

DYNAMIQUE SECLAIRE

- Moyennisation sur les courtes périodes (évolution à long terme hors MMR)

$$\mathcal{K} = \sum_{k, j_1, j_2, i_l, l \in \underline{4}} C_{i_l}^{k, j_1, j_2} E_1^{|j_1|+2i_1} E_2^{|j_2|+2i_2} S_1^{|k+j_1|+2i_3} S_2^{|k+j_2|+2i_4} \cos \Phi$$

$$\Phi = [j_1 \underline{p}_1 - j_2 \underline{p}_2 - (k + j_1) \underline{q}_1 + (k + j_2) \underline{q}_2]$$

4 degrés de liberté

cas plan	<i>v</i> And. 2006b	HD 217107	HD 38529	HD 190360	HD 74156
α	0.331	0.017	0.035	0.033	0.086
μ	0.334	0.347	0.058	0.037	0.232
$e_1(0)$	0.254	0.132	0.29	0.01	0.636
$e_2(0)$	0.242	0.537	0.36	0.36	0.583
$v(0)$ (rad)	0.456	2.466	-1.274	0	1.063
n	contribution d'ordre n l'Hamiltonien \mathcal{K}				
2	$4.1 \cdot 10^{-03}$	$3.6 \cdot 10^{-05}$	$1.0 \cdot 10^{-04}$	$5.5 \cdot 10^{-05}$	$2.2 \cdot 10^{-03}$
4	$1.6 \cdot 10^{-04}$	$1.2 \cdot 10^{-05}$	$1.5 \cdot 10^{-05}$	$7.3 \cdot 10^{-06}$	$8.5 \cdot 10^{-04}$
6	$5.2 \cdot 10^{-06}$	$3.1 \cdot 10^{-06}$	$1.7 \cdot 10^{-06}$	$8.2 \cdot 10^{-07}$	$2.5 \cdot 10^{-04}$
8	$1.6 \cdot 10^{-07}$	$7.6 \cdot 10^{-07}$	$1.8 \cdot 10^{-07}$	$8.3 \cdot 10^{-08}$	$6.6 \cdot 10^{-05}$
10	$4.9 \cdot 10^{-09}$	$1.7 \cdot 10^{-07}$	$1.7 \cdot 10^{-08}$	$7.8 \cdot 10^{-09}$	$1.6 \cdot 10^{-05}$
12	$1.7 \cdot 10^{-10}$	$3.7 \cdot 10^{-08}$	$1.5 \cdot 10^{-09}$	$7.1 \cdot 10^{-10}$	$3.8 \cdot 10^{-06}$

Ordre 12: série de $\pm 3\,000$ termes

Pas de convergence au sens des mathématiciens (Poincaré 1892)

Convergence numérique au sens des astronomes de la série séculaire généralement excellente pour les paramètres des systèmes extrasolaires

→ choix de l'ordre 12

DYNAMIQUE SECULAIRE

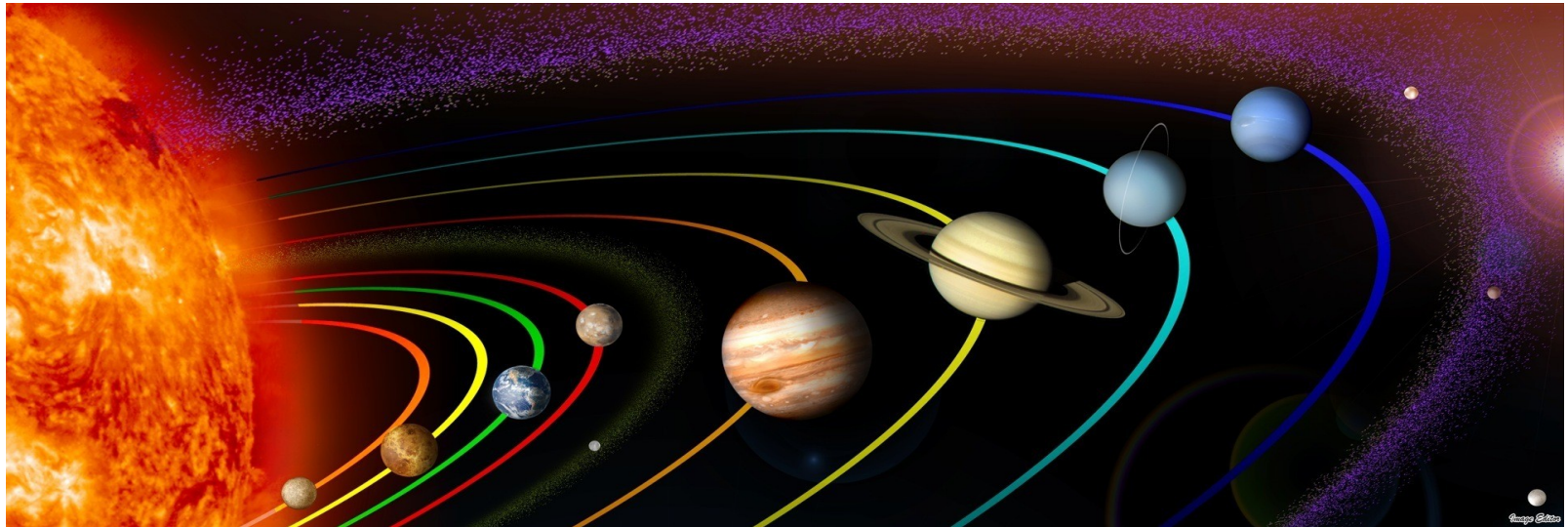
- Moyennisation sur les courtes périodes (évolution à long terme hors MMR)

$$\mathcal{K} = \sum_{k, j_1, j_2, i_l, l \in \mathbb{4}} C_{i_l}^{k, j_1, j_2} E_1^{|j_1|+2i_1} E_2^{|j_2|+2i_2} S_1^{|k+j_1|+2i_3} S_2^{|k+j_2|+2i_4} \cos \Phi$$

$$\Phi = [j_1 \underline{p}_1 - j_2 \underline{p}_2 - (k + j_1) \underline{q}_1 + (k + j_2) \underline{q}_2]$$

4 degrés de liberté

- Limite à l'ordre 2 en excentricités et inclinaisons = Théorie de Laplace-Lagrange
→ bonne approximation pour le Système solaire



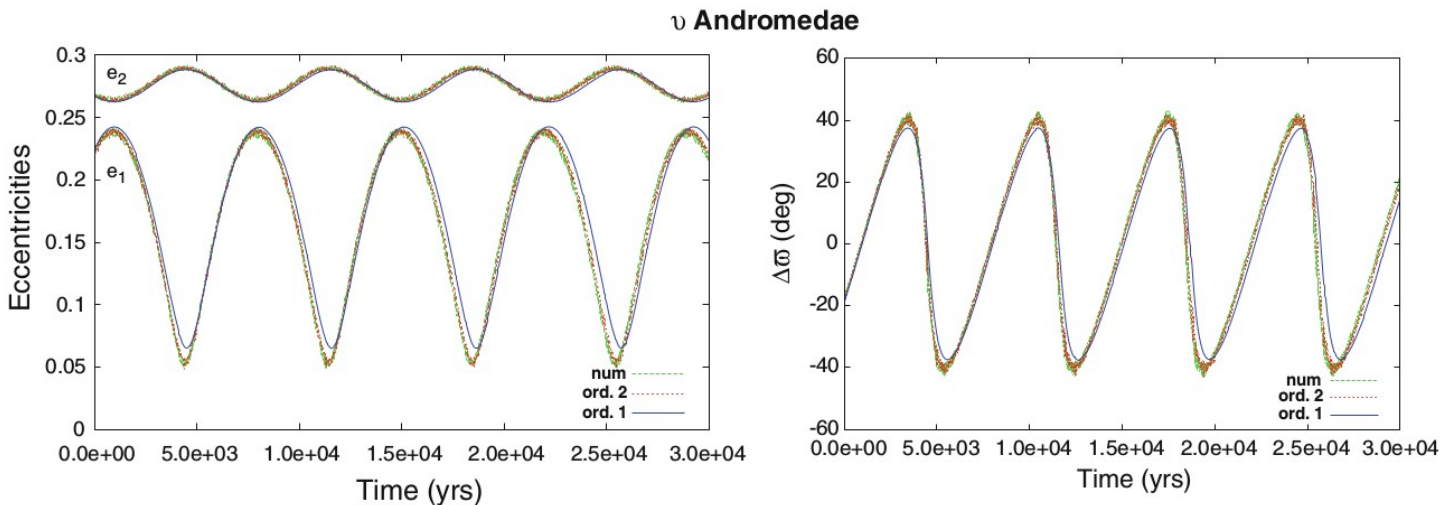
DYNAMIQUE SECLAIRE

- Moyennisation sur les courtes périodes (évolution à long terme hors MMR)

$$\mathcal{K} = \sum_{k,j_1,j_2,i_l,l \in \underline{4}} C_{i_l}^{k,j_1,j_2} E_1^{|j_1|+2i_1} E_2^{|j_2|+2i_2} S_1^{|k+j_1|+2i_3} S_2^{|k+j_2|+2i_4} \cos \Phi$$

$$\Phi = [j_1 \underline{p}_1 - j_2 \underline{p}_2 - (k + j_1) \underline{q}_1 + (k + j_2) \underline{q}_2]$$

4 degrés de liberté



Généralisation de la théorie de Laplace-Lagrange à l'ordre 12 reproduit avec précision le comportement à long terme des systèmes extrasolaires

[Libert & Henrard 2006 & 2008a, Libert & Sansottera 2013]

PROXIMITE AUX RESONANCES MMR

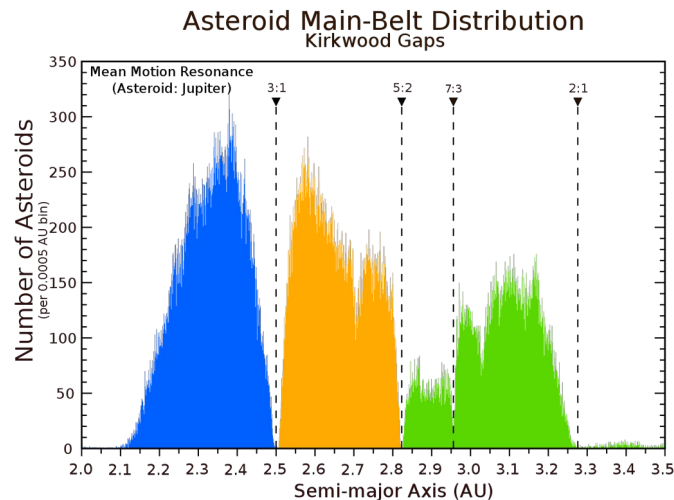
- Cas de résonance

Problème de petits dénominateurs pour les systèmes proches d'une résonance

$$\mathcal{W}_k = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} \left[\frac{C_{i_1, i_2, \dots, i_n} \sin(\sum_{l=1}^n i_l q_l)}{i_1 \omega_1 + \dots + i_n \omega_n} - \frac{S_{i_1, i_2, \dots, i_n} \cos(\sum_{l=1}^n i_l q_l)}{i_1 \omega_1 + \dots + i_n \omega_n} \right]$$

c'est-à-dire lorsque le rapport des périodes orbitales est proche du rapport de deux petits entiers

- Par exemple, parmi les résonances en moyen mouvement (MMR),
 - Jupiter et Saturne sont proches de la résonance 5:2.
 - Les astéroïdes sont fortement affectés par Jupiter. Les MMRs forcent les excentricités des astéroïdes, finissent par les éjecter et créent ainsi les lacunes de Kirkwood.



PROXIMITE AUX RESONANCES MMR

- Cas de résonance

Problème de petits dénominateurs pour les systèmes proches d'une résonance

$$\mathcal{W}_k = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} \left[\frac{C_{i_1, i_2, \dots, i_n} \sin(\sum_{l=1}^n i_l q_l)}{i_1 \omega_1 + \dots + i_n \omega_n} - \frac{S_{i_1, i_2, \dots, i_n} \cos(\sum_{l=1}^n i_l q_l)}{i_1 \omega_1 + \dots + i_n \omega_n} \right]$$

c'est-à-dire lorsque le rapport des périodes orbitales est proche du rapport de deux petits entiers

- Si un système est proche d'une résonance en moyen mouvement (MMR) telle que $k_1 n_1 - k_2 n_2 \sim 0$, la solution est dominée par des termes à longues périodes du type $\cos(k_1 \lambda_1 - k_2 \lambda_2)$
- Objectif : construire un critère analytique pour la proximité des systèmes planétaires aux MMRs
- Idée : évaluer la différence entre éléments orbitaux osculateurs et éléments orbitaux moyennés par rapport aux courtes périodes au premier ordre des masses

$$E_i = \bar{E}_i \left(1 + \underbrace{\frac{\epsilon}{2E_i^2} (E_i^2; W_1)} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

dominé par des
termes résonants
ou non-résonants ?

PROXIMITE AUX RESONANCES MMR

Secular

Near a MMR

MMR

	$\frac{\epsilon}{2E_1^2}(E_1^2; W_1)$	$\frac{\epsilon}{2E_2^2}(E_2^2; W_1)$
HD 217107	$1.31 \cdot 10^{-05} \cos(4\lambda_2 + 2p_1 + 2p_2)$ $1.29 \cdot 10^{-05} \cos(3\lambda_2 + 2p_1 + p_2)$	$0.0398 \cos(\lambda_2 + p_2)$ $0.0223 \cos(2\lambda_2 + 2p_2)$
HD 38529	$1.07 \cdot 10^{-04} \cos(2\lambda_2 + 2p_1)$ $9.16 \cdot 10^{-05} \cos(3\lambda_2 + 2p_1 + p_2)$	$0.00228 \cos(\lambda_2 + p_2)$ $8.37 \cdot 10^{-04} \cos(2\lambda_2 + 2p_2)$
HD 190360	$-2.79 \cdot 10^{-05} \cos(\lambda_2 + p_1)$ $1.69 \cdot 10^{-05} \cos(2\lambda_2 + 2p_1)$	$0.208 \cos(\lambda_2 + p_2)$ $0.0761 \cos(2\lambda_2 + 2p_2)$
HD 74156	$-5.09 \cdot 10^{-04} \cos(8\lambda_2 + 2p_1 + 6p_2)$ $-5.04 \cdot 10^{-04} \cos(9\lambda_2 + 2p_1 + 7p_2)$	$0.00228 \cos(\lambda_2 + p_2)$ $0.00140 \cos(2\lambda_2 + 2p_2)$
HD 168443	$7.26 \cdot 10^{-04} \cos(2\lambda_2 + 2p_1)$ $3.63 \cdot 10^{-04} \cos(3\lambda_2 + 2p_1 + p_2)$	$0.00567 \cos(\lambda_2 + p_2)$ $0.00121 \cos(2\lambda_2 + 2p_2)$
<i>v</i> Andro	$-0.00684 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - 2p_1 - 2p_2)$ $0.00554 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - p_1 - 3p_2)$ $0.00278 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - 3p_1 - p_2)$	$0.00604 \cos(\lambda_2 + p_2)$ $0.00479 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - p_1 - 3p_2)$ $-0.00197 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - 2p_1 - 2p_2)$
HD 169830	$-9.13 \cdot 10^{-04} \cos(\lambda_1 - 9\lambda_2 - 2p_1 - 6p_2)$ $7.18 \cdot 10^{-04} \cos(\lambda_1 - 9\lambda_2 - 3p_1 - 5p_2)$ $5.77 \cdot 10^{-04} \cos(2\lambda_2 + 2p_1)$	$0.00694 \cos(\lambda_2 + p_2)$ $0.00237 \cos(2\lambda_2 + 2p_2)$ $0.00117 \cos(\lambda_1 - 9\lambda_2 - p_1 - 7p_2)$
HD 12661	$-0.00128 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - 2p_1 - 2p_2)$ $8.61 \cdot 10^{-04} \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - 3p_1 - p_2)$ $6.30 \cdot 10^{-04} \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - p_1 - 3p_2)$	$0.00355 \cos(\lambda_2 + p_2)$ $0.00158 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - p_1 - 3p_2)$ $-0.00107 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - 2p_1 - 2p_2)$
HD 202206	$-0.00370 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - 2p_1 - 2p_2)$ $0.00233 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - 3p_1 - p_2)$ $0.00210 \cos(2\lambda_1 - 11\lambda_2 - 4p_1 - 5p_2)$	$0.0236 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - p_1 - 3p_2)$ $0.0216 \cos(\lambda_2 + p_2)$ $-0.0151 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - 2p_1 - 2p_2)$
HD 108874	$0.0669 \cos(\lambda_1 - 4\lambda_2 - p_1 - 2p_2)$ $-0.0169 \cos(\lambda_1 - 4\lambda_2 - 2p_1 - p_2)$ $-0.00929 \cos(\lambda_1 - 4\lambda_2 - p_1 - 2p_2)$	$0.112 \cos(\lambda_1 - 4\lambda_2 - p_1 - 2p_2)$ $0.0757 \cos(\lambda_2 + p_2)$ $-0.0630 \cos(\lambda_1 - 4\lambda_2 - 3p_2)$

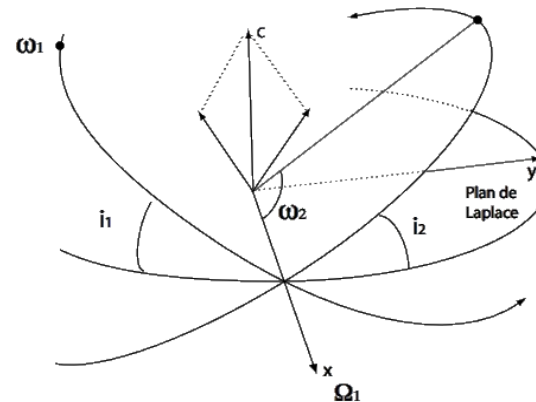
[Libert & Henrard 2007]

ETUDE DU PROBLEME 3D

- Motivation : inclinaisons inconnues, orbites non-coplanaires possibles ?
- Réduction de Jacobi [1842]

Basée sur l'invariance du moment cinétique total en norme et en direction

Adoption du plan invariant de Laplace



$$H(e_1, e_2, i_1, i_2, \omega_1, \omega_2, \Omega_1, \Omega_2)$$

4 degrés



Laplace plane

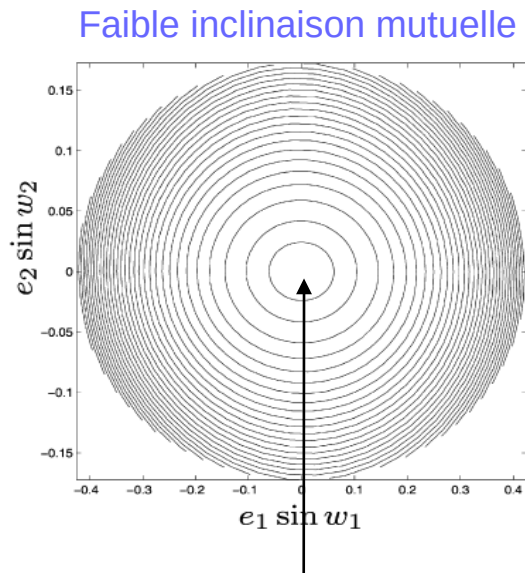
$$H(e_1, e_2, \omega_1, \omega_2)$$

2 degrés

C constant: $e_1, e_2 \longleftrightarrow i_1, i_2$

ETUDE DU PROBLEME 3D

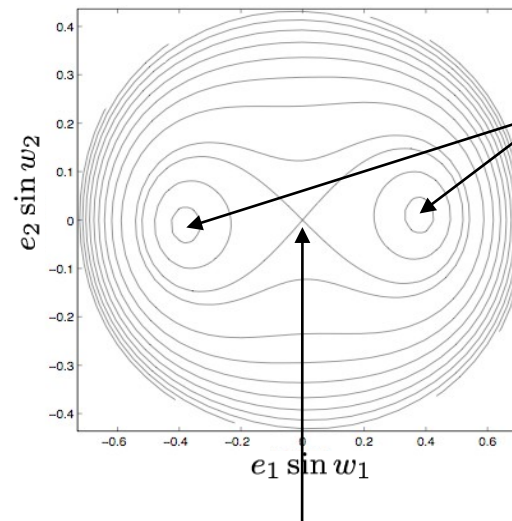
- Plan représentatif $(e_1 \sin \omega_1, e_2 \sin \omega_2)$ avec $\omega_i = \pm 90^\circ$



Equilibre stable
(orbites circulaires)

Inclinaison mutuelle élevée

Valeur critique
 $\sim 40^\circ$



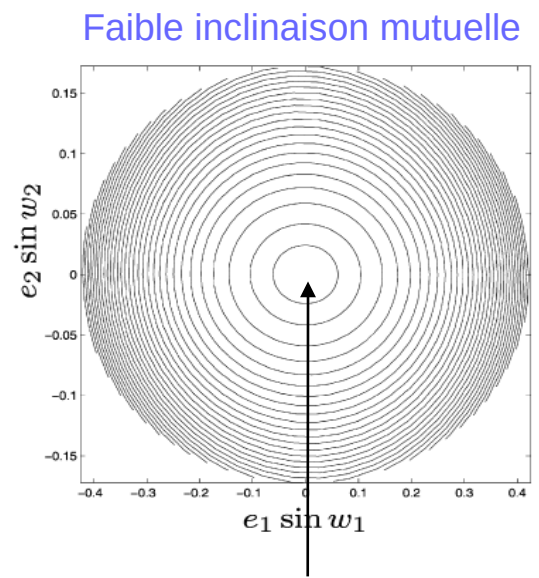
Equilibre instable
(orbites circulaires)

Equilibres stables
de Kozai
(orbites excentriques)

par analogie avec
le problème restreint
[Kozai, 1962]

ETUDE DU PROBLEME 3D

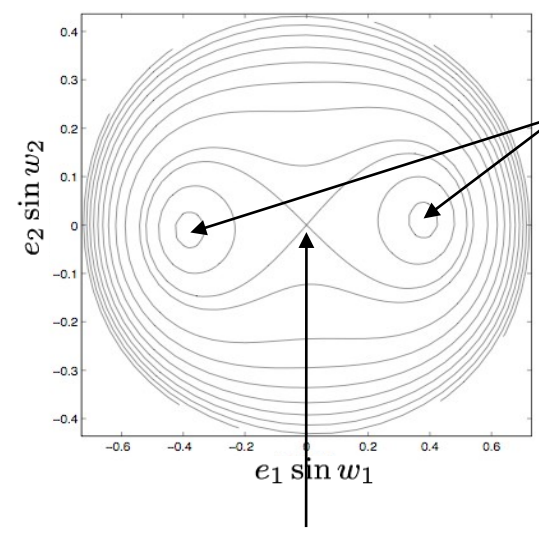
- Plan représentatif ($e_1 \sin \omega_1, e_2 \sin \omega_2$) avec $\omega_i = \pm 90^\circ$



Equilibre stable
(orbites circulaires)

Inclinaison mutuelle élevée

Valeur critique
 $\sim 40^\circ$



Equilibre instable
(orbites circulaires)

Equilibres stables
de Kozai
(orbites excentriques)

par analogie avec
le problème restreint
[Kozai, 1962]

Les systèmes 3D peuvent être stables à long terme, soit à faible inclinaison mutuelle, soit à inclinaison mutuelle élevée en cas d'orbites excentriques uniquement [Libert & Henrard 2006]

DES SYSTEMES EXTRASOLAIRES 3D ?

Des systèmes stables fortement non-coplanaires peuvent exister

(e.g., Libert & Henrard 2007b, Libert & Tsiganis 2009a)

Première confirmation observationnelle

THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, 715:1203–1220, 2010 June 1

© 2010. The American Astronomical Society. All rights reserved. Printed in the U.S.A.

doi:10.1088/0004-637X/715/2/1203

NEW OBSERVATIONAL CONSTRAINTS ON THE ν ANDROMEDAE SYSTEM WITH DATA FROM THE HUBBLE SPACE TELESCOPE AND HOBBY-EBERLY TELESCOPE*

BARBARA E. MCARTHUR¹, G. FRITZ BENEDICT¹, RORY BARNES², EDER MARTIOLI^{1,3}, SYLVAIN KORZENNIK⁴, ED NELAN⁵, AND R. PAUL BUTLER⁶

¹ Department of Astronomy, University of Texas at Austin, TX 78712, USA; mca@astro.as.utexas.edu

² Department of Astronomy, University of Washington, Seattle, WA 98195-1580, USA

³ Divisão de Astrofísica, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, S. J. dos Campos, SP, Brazil

⁴ Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics, 60 Garden Street, Cambridge, MA 02138, USA

⁵ Space Telescope Science Institute, 3700 San Martin Drive, Baltimore, MD 21218, USA

⁶ Department of Terrestrial Magnetism, Carnegie Institution of Washington, 5241 Broad Branch Road NW, Washington, DC 20015-1305, USA

Received 2009 October 14; accepted 2010 April 8; published 2010 May 7

ABSTRACT

We have used high-cadence radial velocity (RV) measurements from the Hobby-Eberly Telescope with existing velocities from the Lick, Elodie, Harlan J. Smith, and Whipple 60" telescopes combined with astrometric data from the *Hubble Space Telescope* Fine Guidance Sensors to refine the orbital parameters and determine the orbital inclinations and position angles of the ascending node of components ν And A c and d. With these inclinations and using $M_* = 1.31 M_\odot$ as a primary mass, we determine the actual masses of two of the companions: ν And A c is $13.98_{-5.3}^{+2.3} M_{\text{JUP}}$, and ν And A d is $10.25_{-3.3}^{+0.7} M_{\text{JUP}}$. These measurements represent the first astrometric determination of mutual inclination between objects in an extrasolar planetary system, which we find to be $29.9 \pm 1^\circ$. The combined RV measurements also reveal a long-period trend indicating a fourth planet in the system. We investigate the dynamic stability of this system and analyze regions of stability, which suggest a probable mass of ν And A b. Finally, our parallaxes confirm that ν And B is a stellar companion of ν And A.

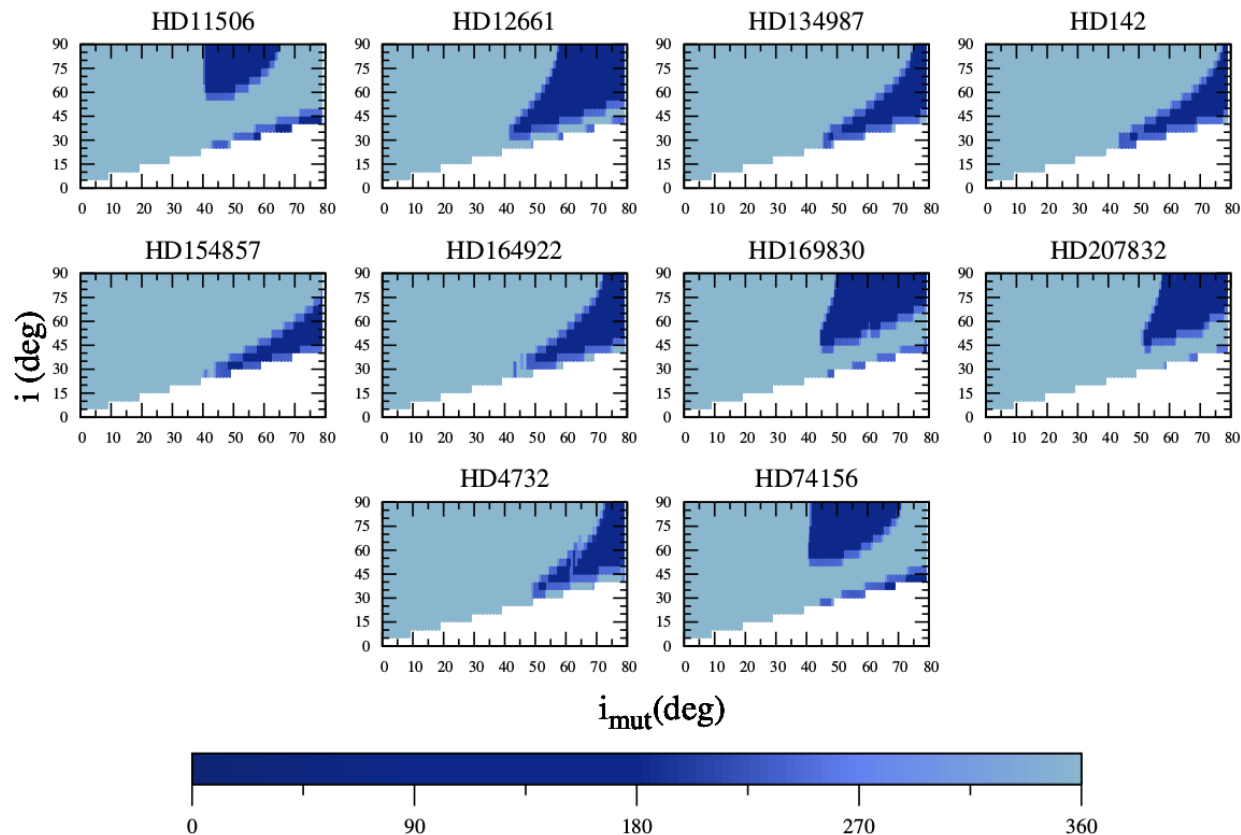
Key words: astrometry – planetary systems – planets and satellites: dynamical evolution and stability – planets and satellites: fundamental parameters

Online-only material: color figures, machine-readable table

Systèmes non-coplanaires, exception ou règle générale ?

DES SYSTEMES EXTRASOLAIRES 3D ?

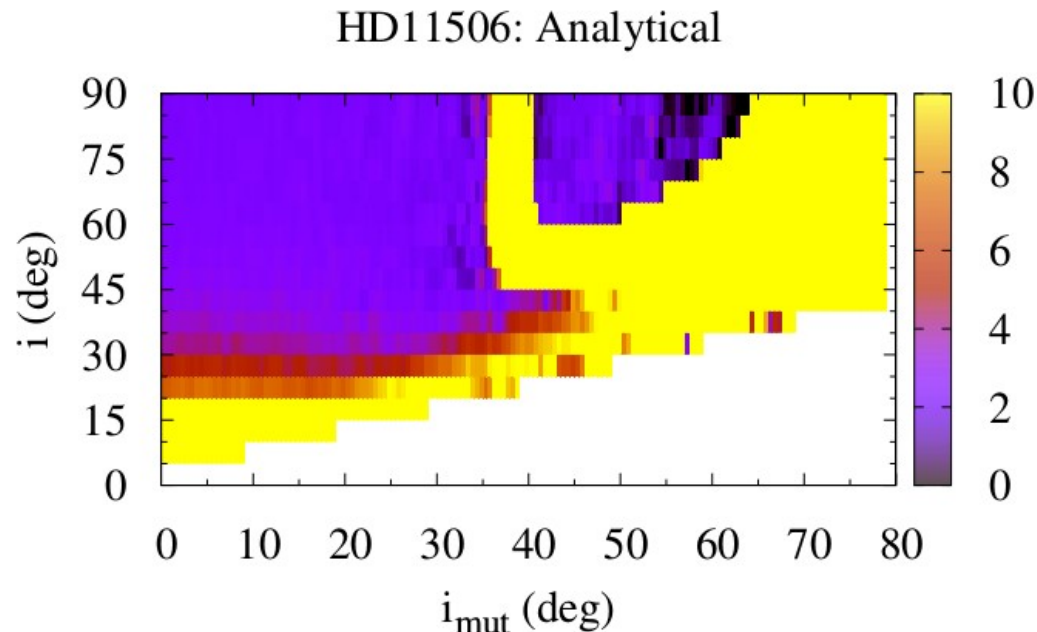
- Beaucoup de systèmes extrasolaires détectés par la méthode des vitesses radiales ont des paramètres orbitaux (en particulier les excentricités) compatibles avec la résonance de Lidov-Kozai.



[Volpi, Roisin & Libert 2019]

DES SYSTEMES EXTRASOLAIRES 3D ?

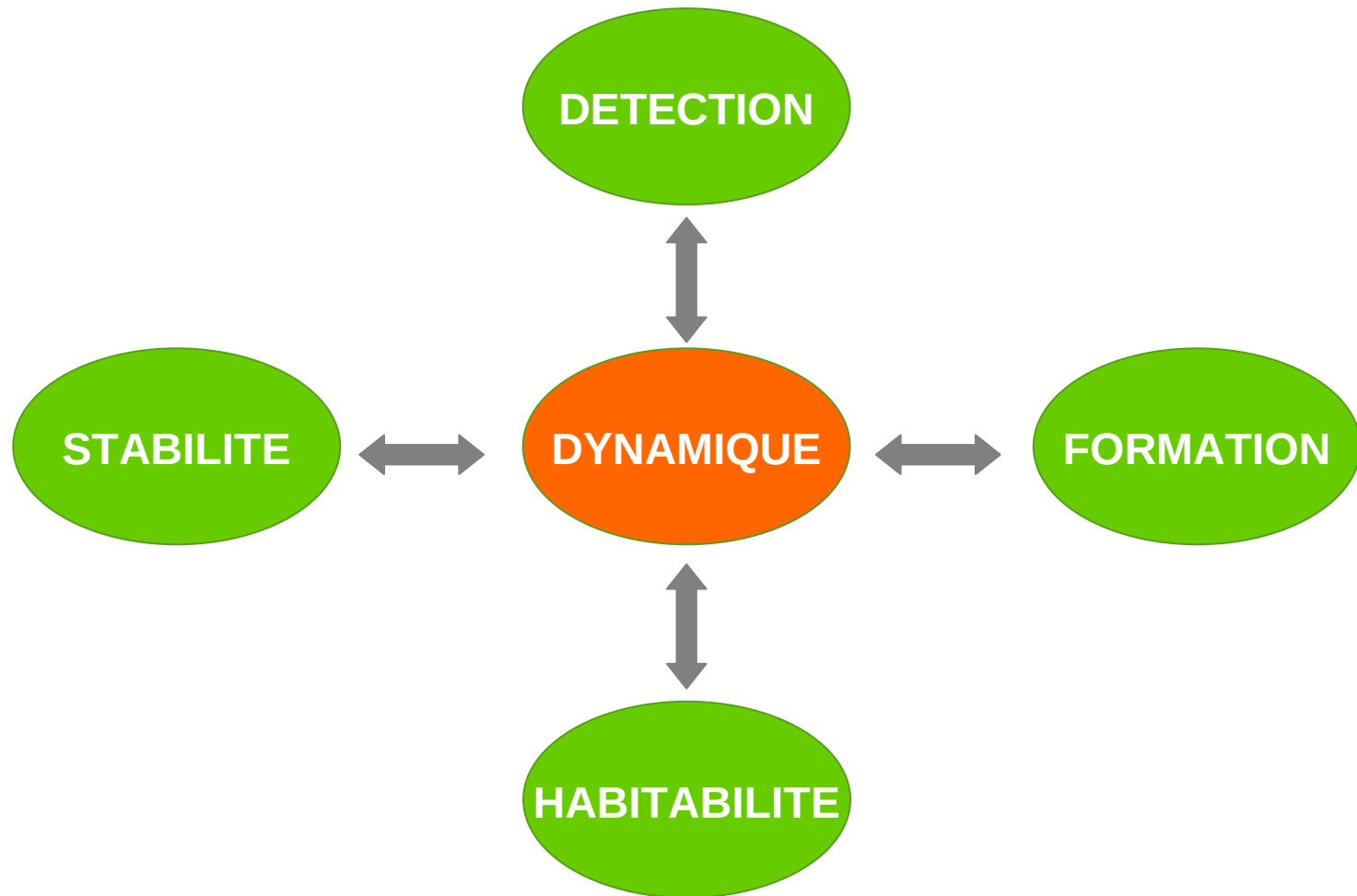
- Beaucoup de systèmes extrasolaires détectés par la méthode des vitesses radiales ont des paramètres orbitaux (en particulier les excentricités) compatibles avec la résonance de Lidov-Kozai.
- Ces systèmes présentent des configurations 3D stables sur le long terme qui correspondent à celles prédites par le modèle analytique.



[Volpi, Roisin & Libert 2019]

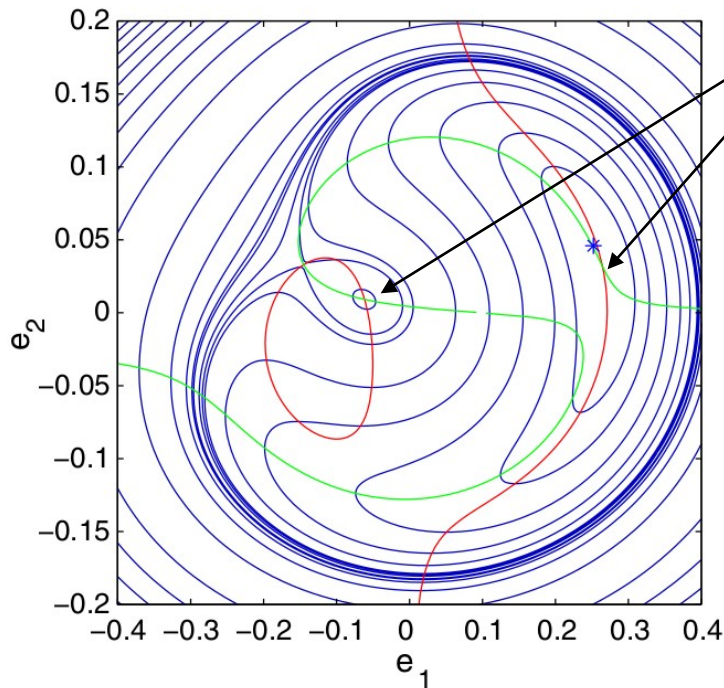
Applications aux observations

Intérêt des études dynamiques pour la caractérisation des systèmes extrasolaires



1. VALIDATION VIA LES ORBITES PERIODIQUES

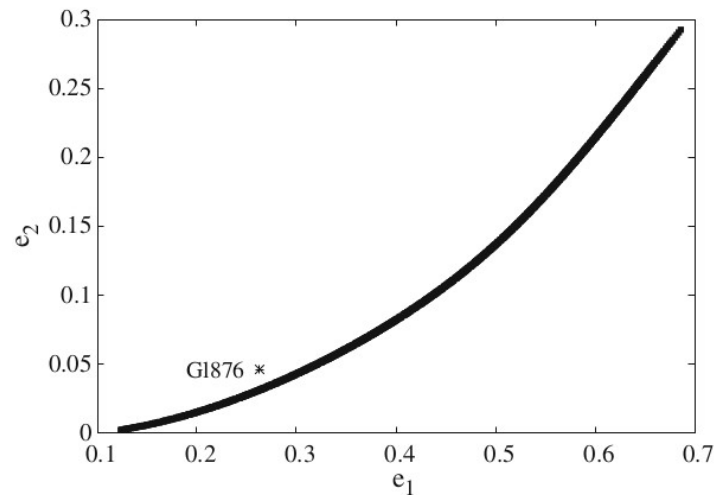
Courbes de niveau de l'Hamiltonien résonant moyenné



GJ876 (2/1 MMR)
[Beaugé & Michtchenko 2003,
Sansottera & Libert 2019]

Détermination des points stationnaires de l'Hamiltonien résonant moyenné, aussi appelés **orbites périodiques** (Hadjidemetriou 2006)

Représentation des **familles d'orbites périodiques**



$$\begin{aligned}\theta_1 &= p\lambda_1 - (p+q)\lambda_2 + q\varpi_1, \\ \theta_2 &= p\lambda_1 - (p+q)\lambda_2 + q\varpi_2, \\ \theta_3 &= p\lambda_1 - (p+q)\lambda_2 + \frac{q}{2}(\varpi_1 + \varpi_2)\end{aligned}$$

4 different configurations of symmetric periodic orbits

1. VALIDATION VIA LES ORBITES PERIODIQUES

Periodic orbits as dynamical clues for Kepler and K2 systems

Parameter	K2-21 ⁽¹⁾	K2-24 ⁽²⁾	Kepler-9 ⁽³⁾	Kepler-108 ⁽⁴⁾
$m_S [M_\odot]$	$0.676^{+0.06}_{-0.06}$	$1.07^{+0.06}_{-0.06}$	$1.022^{+0.029}_{-0.039}$	$0.96^{+0.29}_{-0.16}$
$m_b [m_J]$	$0.01493^{(a)}/0.01105^{(b)}$	$0.0598^{+0.0069}_{-0.0066}$	$0.137^{+0.005}_{-0.006}$	0.41334
$m_c [m_J]$	$0.01978^{(a)}/0.02063^{(b)}$	$0.0485^{+0.0060}_{-0.0057}$	$0.0941^{+0.0035}_{-0.0041}$	0.20279
T_b [days]	$9.325038^{+0.000379}_{-0.000403}$	$20.88977^{+0.00034}_{-0.00035}$	$19.23891^{+0.00006}_{-0.00006}$	$49.18341^{+0.00033}_{-0.00033}$
T_c [days]	$15.501920^{+0.000918}_{-0.000928}$	$42.3391^{+0.0012}_{-0.0012}$	$38.9853^{+0.0003}_{-0.0003}$	$190.353^{+0.017}_{-0.010}$
a_b [au]	$0.076^{+0.002}_{-0.003}$	–	$0.143^{+0.007}_{-0.006}$	–
a_c [au]	$0.107^{+0.003}_{-0.004}$	–	$0.227^{+0.012}_{-0.008}$	–
e_b	$0.100000^{+0.148654}_{-0.084698}$	$0.06^{+0.01}_{-0.01}$	$0.0609^{+0.0010}_{-0.0013}$	0.08050
e_c	$0.210000^{+0.206770}_{-0.173719}$	< 0.07	$0.06691^{+0.00010}_{-0.00012}$	0.13515
i_b [°]	$88.98^{+0.50}_{-0.31}$	–	–	90.44
i_c [°]	$88.85^{+0.40}_{-0.15}$	–	$89.18^{+0.005}_{-0.006}$	90.40
ϖ_b [°]	$34.48^{+101.88}_{-133.73}$	–	–	–
ϖ_c [°]	$59.96^{+75.67}_{-120.57}$	–	–	–
ω_b [°]	–	–	$357.0^{+0.5}_{-0.4}$	–151.44
ω_c [°]	–	–	$167.5^{+0.1}_{-0.1}$	–74.80
M_b [°]	–	–	$2.6^{+0.5}_{-0.6}$	–
M_c [°]	–	–	$307.4^{+0.1}_{-0.1}$	–
T_{0b} [BJD]	–	–	–	665.12261+2454900
T_{0c} [BJD]	–	–	–	816.67628+2454900
Ω_b [°]	–	–	180	0.0
Ω_c [°]	–	–	$179.0^{+0.3}_{-0.1}$	21.23

Notes. Observational values for the four selected systems provided by ⁽¹⁾ Dressing et al. (2017), ⁽²⁾ Petigura et al. (2018), ⁽³⁾ Borsato et al. (2019), and ⁽⁴⁾ Mills & Fabrycky (2017). The planetary masses of K2-21 were yielded through the ^(a)mass-radius-density relation of Weiss & Marcy (2014) and ^(b)the power-law equation of Lissauer et al. (2011).

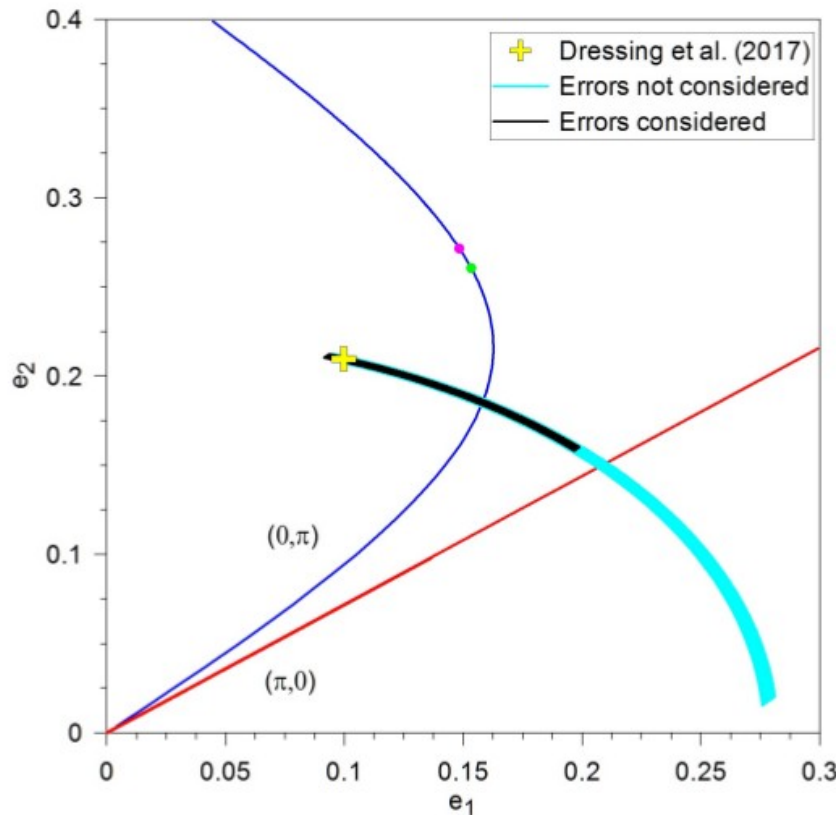
[Antoniadou & Libert 2020]

1. VALIDATION VIA LES ORBITES PERIODIQUES

Periodic orbits as dynamical clues for Kepler and K2 systems

Idea: Use of the linear horizontal and vertical stability of the periodic orbits, to validate or further constrain the orbital elements of detected (near-)resonant two-planet systems

K2-21



$$\begin{aligned}\theta_1 &= p\lambda_1 - (p+q)\lambda_2 + q\varpi_1, \\ \theta_2 &= p\lambda_1 - (p+q)\lambda_2 + q\varpi_2, \\ \theta_3 &= p\lambda_1 - (p+q)\lambda_2 + \frac{q}{2}(\varpi_1 + \varpi_2)\end{aligned}$$

4 different configurations of symmetric periodic orbits

A 5/3 MMR locking protects the long-term evolution

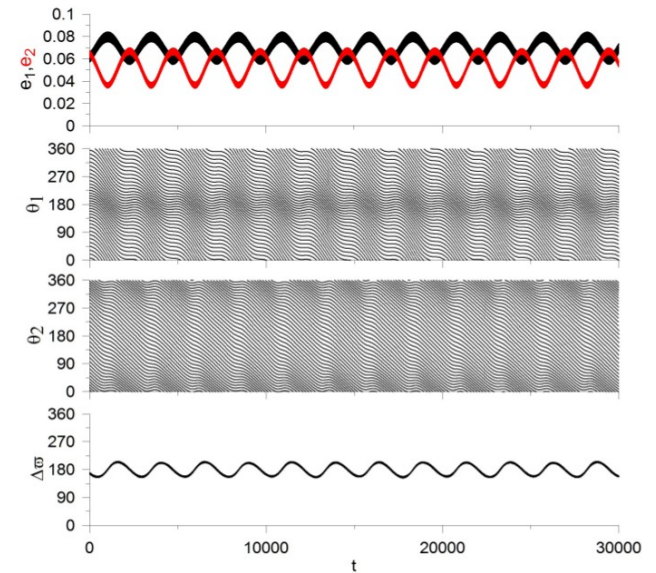
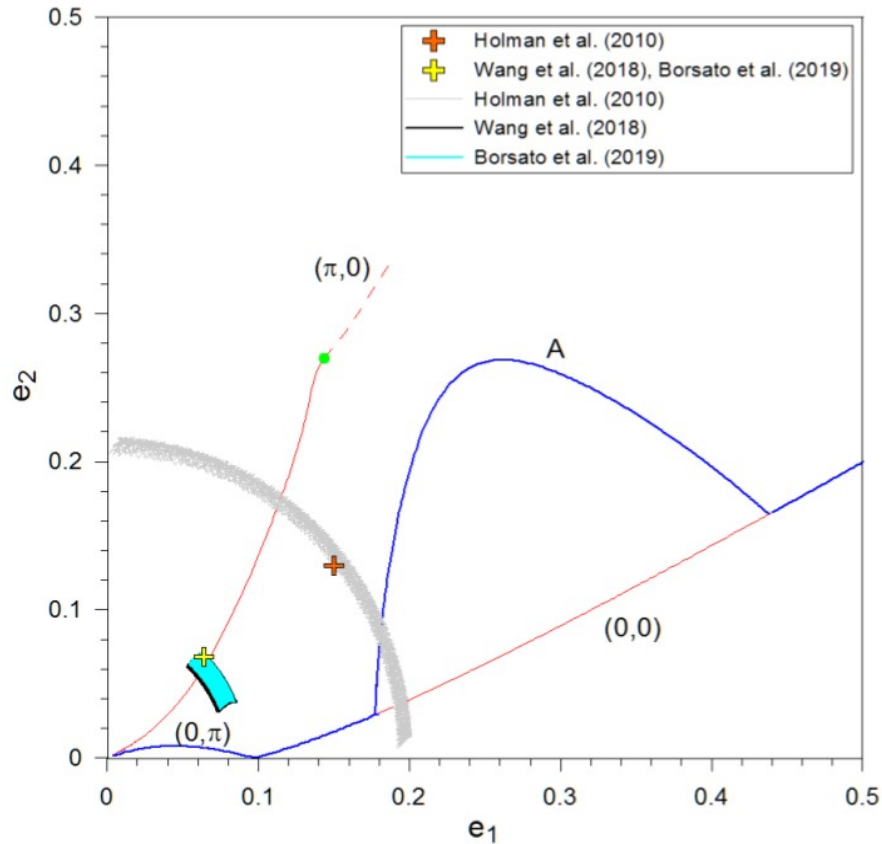
[Antoniadou & Libert 2020]

1. VALIDATION VIA LES ORBITES PERIODIQUES

Periodic orbits as dynamical clues for Kepler and K2 systems

Idea: Use of the linear horizontal and vertical stability of the periodic orbits, to validate or further constrain the orbital elements of detected (near-)resonant two-planet systems

Kepler-9bc

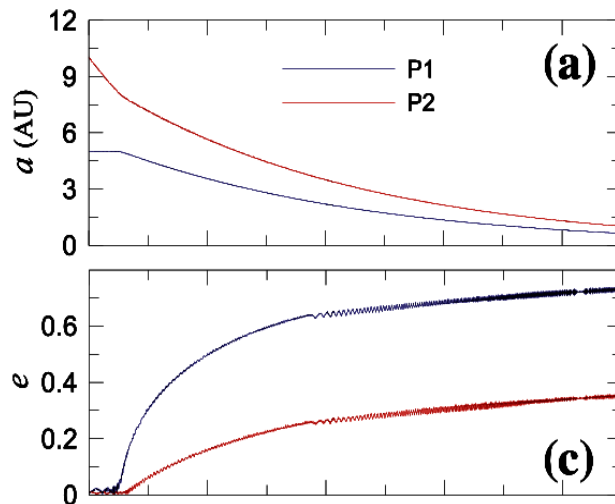


No possible 2/1 MMR locking, stability maintained through an apsidal anti-alignment

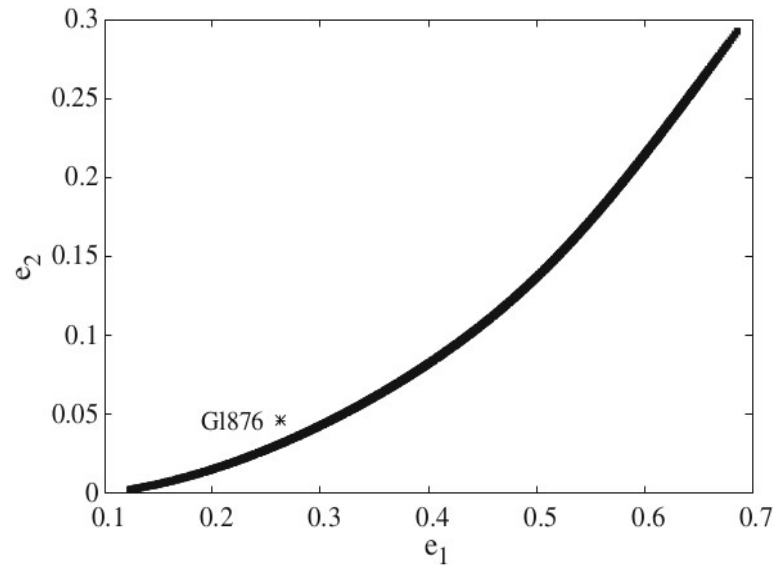
[Antoniadou & Libert 2020]

2. EXPLICATION DES ACCUMULATIONS HORS MMR

- La capture en résonance en moyen mouvement est le résultat naturel des migrations planétaires dans le disque de gaz. Lors des migrations, les systèmes suivent les familles d'orbites périodiques.



Capture en résonance
durant la migration planétaire



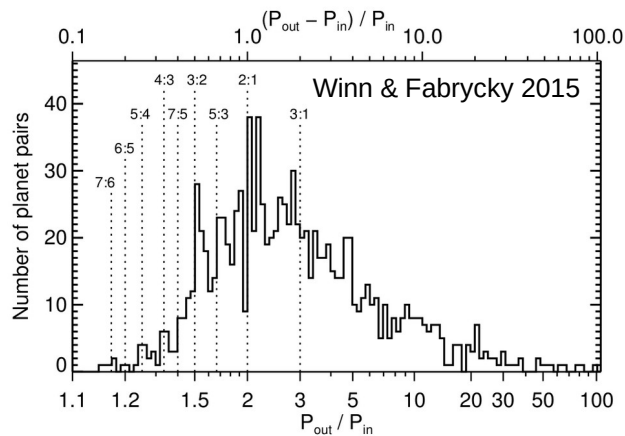
Famille d'orbites périodiques

2. EXPLICATION DES ACCUMULATIONS HORS MMR

Resonance offsets are shaped by planetary migration and tides

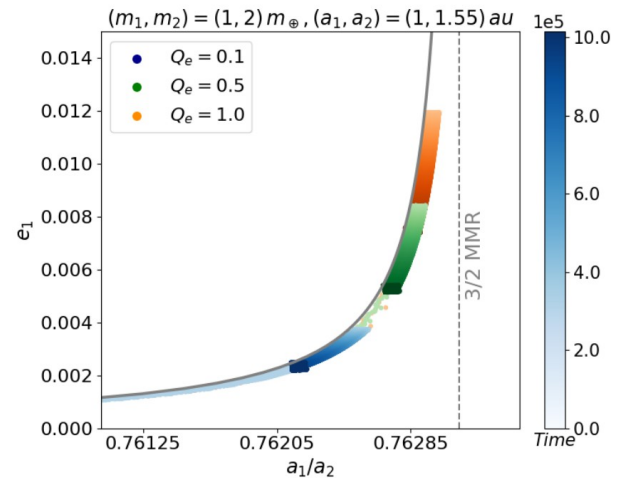
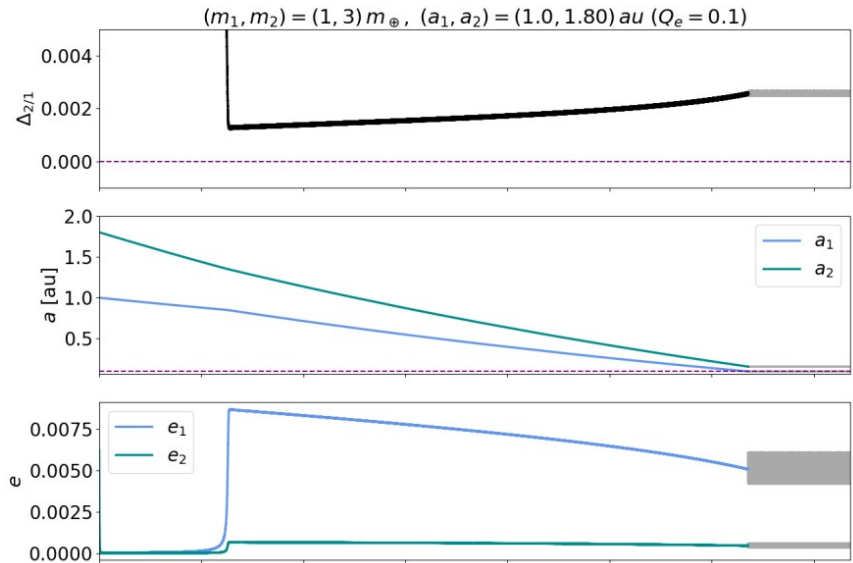
Two-planet systems

Accumulation outside of first-order MMRs



Resonance offset: $\Delta_{(p+q)/p} = P_2/P_1 - (p+q)/p$

- Offset values in agreement with the observations when using
- a sophisticated modeling for the planet-disc interactions where the damping timescale depends on the eccentricity (e.g., Cresswell & Nelson 2008), acting as a feedback mechanism which induces an increase of the offsets;
 - a tidal constant time lag prescription.



[Charalambous, Teysandier & Libert 2022]

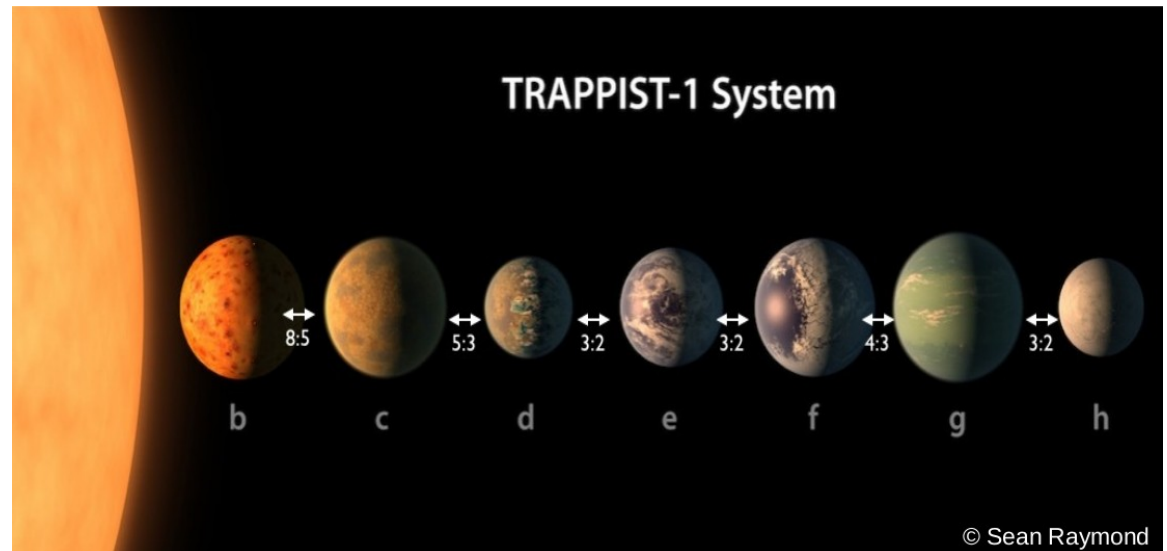
3. PREDICTION DES FUTURES PERIODES OBSERVABLES

TRAPPIST-1, a resonant chain

Planet	$m (m_{\oplus})$	P (d)	a (au)	e	Period ratio
b	1.375	1.511	0.012	0.007	1.603 (8:5)
c	1.317	2.423	0.016	0.002	1.672 (5:3)
d	0.390	4.050	0.022	0.007	1.507 (3:2)
e	0.704	6.103	0.029	0.005	1.509 (3:2)
f	1.044	9.210	0.039	0.010	1.342 (4:3)
g	1.321	12.356	0.047	0.003	1.520 (3:2)
h	0.327	18.779	0.062	0.004	

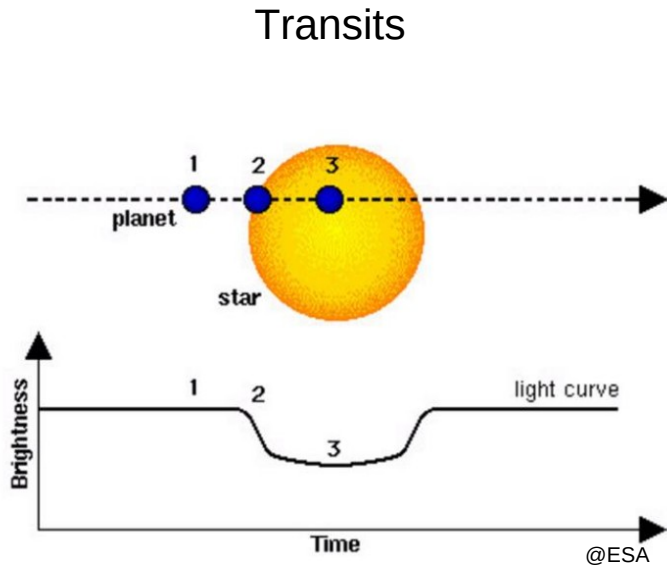
Système de 7 planètes de rayon proche de celui de la Terre autour d'une étoile naine ultra-froide à 39 années-lumière

Best-fit solution of Agol et al. 2021

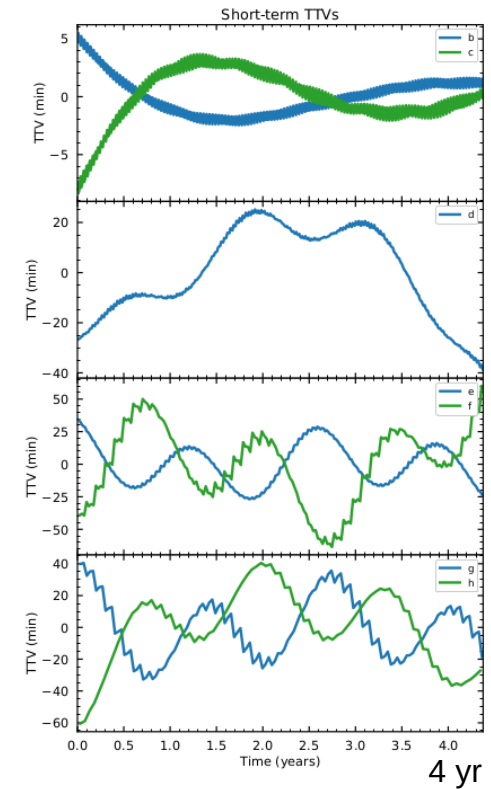
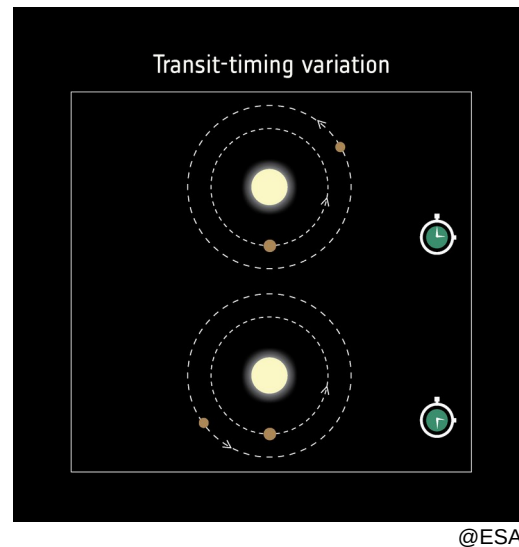


3. PREDICTION DES FUTURES PERIODES OBSERVABLES

- The TTVs are enhanced for systems close to MMRs



+ Variations des temps de transits (TTVs)



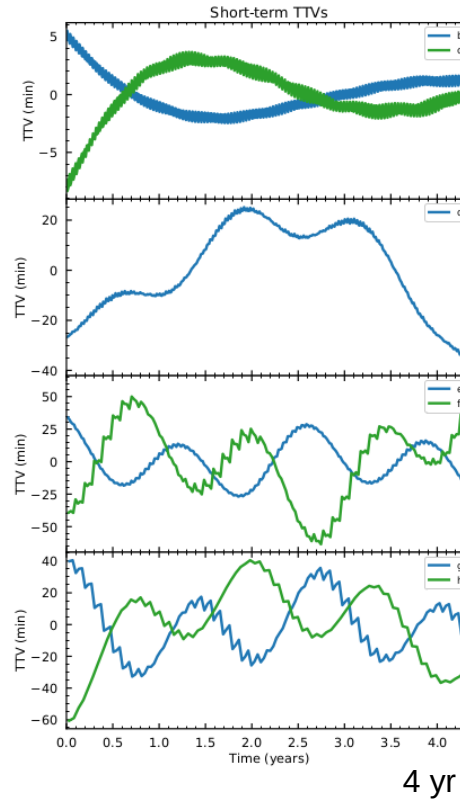
3. PREDICTION DES FUTURES PERIODES OBSERVABLES

Dynamical analysis of the transit timing variations

TRAPPIST-1

Planet	$m (m_{\oplus})$	P (d)	a (au)	e	Period ratio
b	1.375	1.511	0.012	0.007	1.603 (8:5)
c	1.317	2.423	0.016	0.002	1.672 (5:3)
d	0.390	4.050	0.022	0.007	1.507 (3:2)
e	0.704	6.103	0.029	0.005	1.509 (3:2)
f	1.044	9.210	0.039	0.010	1.342 (4:3)
g	1.321	12.356	0.047	0.003	1.520 (3:2)
h	0.327	18.779	0.062	0.004	

Best-fit solution of Agol et al. 2021



Survey of 4 yr sufficient to see the imprint of the different 2-body MMRs between adjacent planets in the TTVs

$$P_{\text{TTV}} = \frac{1}{|j/P_1 - (j+k)/P_2|}$$

1.3 yr for 1st-ord MMR
 0.72 yr for 2nd-ord MMR (c-d)
 0.45 yr for 3rd-ord MMR (b-c)

[Teysandier, Libert & Agol 2022]

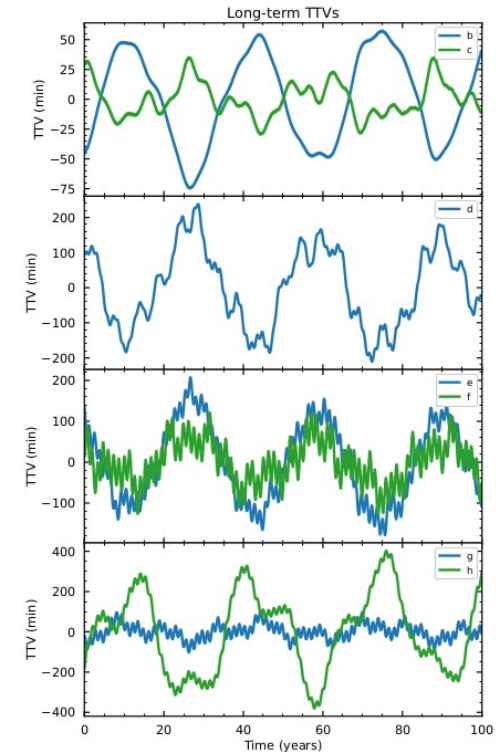
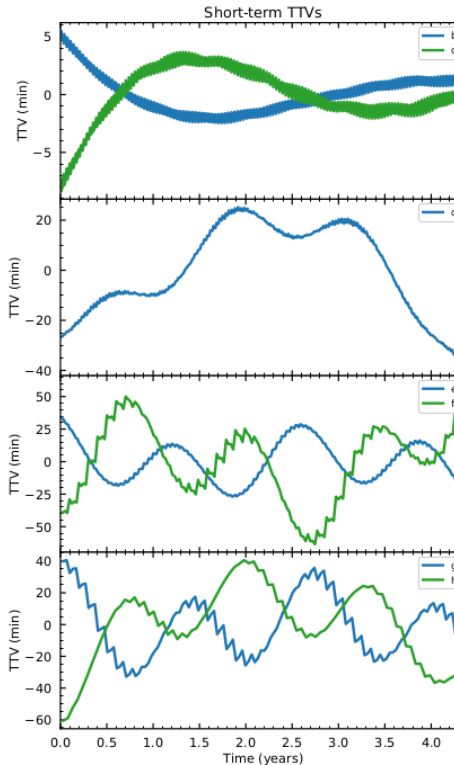
3. PREDICTION DES FUTURES PERIODES OBSERVABLES

Dynamical analysis of the transit timing variations

TRAPPIST-1

Planet	$m (m_{\oplus})$	P (d)	a (au)	e	Period ratio
b	1.375	1.511	0.012	0.007	1.603 (8:5)
c	1.317	2.423	0.016	0.002	1.672 (5:3)
d	0.390	4.050	0.022	0.007	1.507 (3:2)
e	0.704	6.103	0.029	0.005	1.509 (3:2)
f	1.044	9.210	0.039	0.010	1.342 (4:3)
g	1.321	12.356	0.047	0.003	1.520 (3:2)
h	0.327	18.779	0.062	0.004	

Best-fit solution of Agol et al. 2021



Relevant periods of the TTV signal by frequency analysis

TTV periods (yr)	θ_{bc}	θ_{cd}	θ_{de}	θ_{ef}	θ_{fg}	θ_{gh}	θ_{bcd}	θ_{cde}	θ_{def}	θ_{efg}	θ_{fgh}
0.032	✓	✓									
0.09			✓	✓	✓	✓					
0.45	⊗										
0.68		⊗									
1.3			⊗	⊗	⊗	⊗					
3.3							✓	✓	⊗	⊗	✓
5.1							⊗	✓	✓	✓	✓
12.3							✓	✓	✓	✓	⊗
31.5							✓	⊗	✓	✓	✓

4 yr

100 yr

Further monitoring of TRAPPIST-1 will soon provide signatures of three-body resonances (3.3 and 5.1 yr periodicities)

[Teysandier, Libert & Agol 2022]

4. CONTRAINTES SUR LES SCENARIOS DE FORMATION

Transit timing variation signature of planet migration

Obvious link since

- convergent migration of planets in a gaseous disc can lead to MMR capture
- pairs of planets in or near MMRs produce strong TTVs

K2-24

Parameter	K2-24 ⁽²⁾
$m_S [M_\odot]$	$1.07^{+0.06}_{-0.06}$
$m_b [m_J]$	$0.0598^{+0.0069}_{-0.0066}$
$m_c [m_J]$	$0.0485^{+0.0060}_{-0.0057}$
T_b [days]	$20.88977^{+0.00034}_{-0.00035}$
T_c [days]	$42.3391^{+0.0012}_{-0.0012}$
a_b [au]	–
a_c [au]	–
e_b	$0.06^{+0.01}_{-0.01}$
e_c	< 0.07

Period ratio: 2.028

TTV amplitude:

0.25 days for planet b

0.5 days for planet c

TTV period: ~1580 days

Petigura et al. 2018

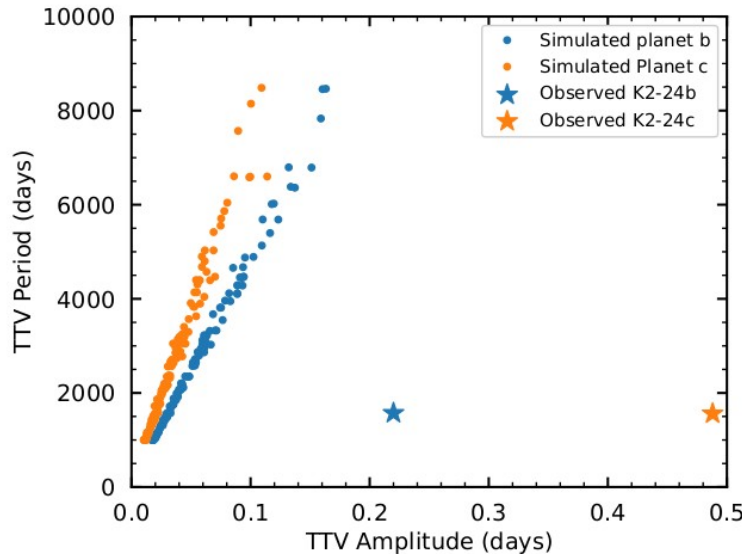
Problem:

Period ratio of 2.028

←→ **Eq. eccentricity of 0.0024 << 0.06**

(inner planet after convergent migration with an intermediate regime between type-I and -II)

300 N-body simulations



Notation	List of values
h	[0.025–0.035]
α	[0.001–0.005]
s	1/2 or 1
C_e	Log-normal(–1,2)
M_{disc}	[5 M_J –25 M_J]
a_b	[0.5–1 au]

TTV period OK
 TTV amplitude **KO**
 TTV ampl inner > TTV ampl outer

[Teyssandier & Libert 2022]

4. CONTRAINTES SUR LES SCENARIOS DE FORMATION

Transit timing variation signature of planet migration

Obvious link since

- convergent migration of planets in a gaseous disc can lead to MMR capture
- pairs of planets in or near MMRs produce strong TTVs

K2-24

Parameter	K2-24 ⁽²⁾
$m_S [M_\odot]$	$1.07^{+0.06}_{-0.06}$
$m_b [m_J]$	$0.0598^{+0.0069}_{-0.0066}$
$m_c [m_J]$	$0.0485^{+0.0060}_{-0.0057}$
T_b [days]	$20.88977^{+0.00034}_{-0.00035}$
T_c [days]	$42.3391^{+0.0012}_{-0.0012}$
a_b [au]	–
a_c [au]	–
e_b	$0.06^{+0.01}_{-0.01}$
e_c	< 0.07

Period ratio: 2.028

TTV amplitude:

0.25 days for planet b

0.5 days for planet c

TTV period: ~1580 days

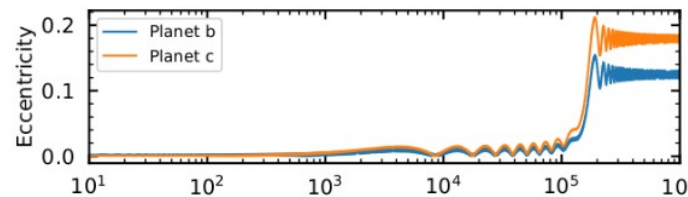
Petigura et al. 2018

Problem:

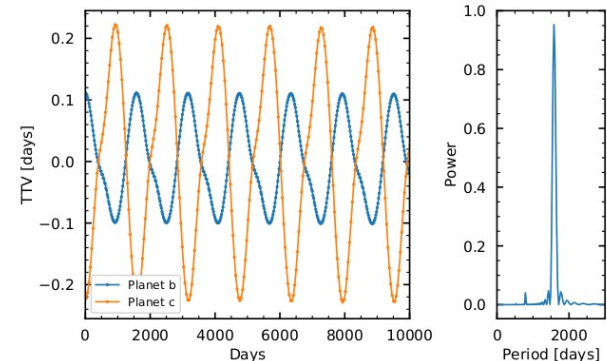
Period ratio of 2.028 \longleftrightarrow **Eq. eccentricity of 0.0024 \ll 0.06**

(inner planet after convergent migration with an intermediate regime between type-I and -II)

Subsequent mechanism required to increase the eccentricities: crossing of a secular resonance induced by a third planet (existence suggested by Petigura et al. 2018) whose precession rate is varying due to the evaporating gaseous disc



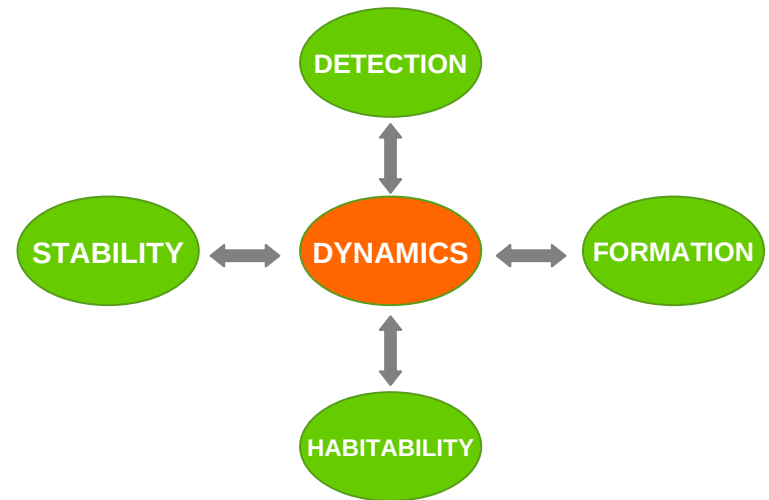
TTV period OK
TTV amplitude OK



[Teyssandier & Libert 2022]

CONCLUSION

- Les **mathématiques** sont **centrales** dans l'étude dynamique des évolutions des systèmes planétaires.
- Les résultats présentés ici illustrent combien **les études analytiques sont utiles** dans l'étude des systèmes planétaires, en particulier en raison de la proximité aux résonances, que cela soit pour **valider, expliquer, prédire ou contraindre les observations**, mais aussi les scénarios de formation.



A space scene featuring a bright sun in the upper right, a ringed planet (like Saturn) in the lower left, and a dark planet (like Jupiter) in the center. The background is a starry field with a golden glow from the sun.

Thank you for your attention