complexus et $\sigma\upsilon\mu\pi\lambda\epsilon\kappa\tau\iota\kappa o\zeta$
Structures (presque) complexes et structures symplectiques

Simone Gutt

Université Libre de Bruxelles

Forum des jeunes mathématicien-nes 2023

Plan de l'exposé.

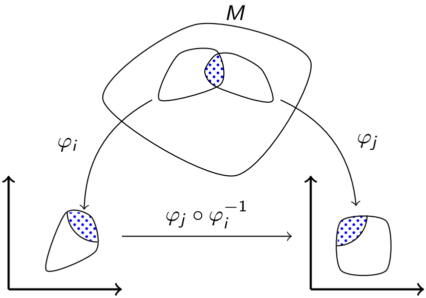
• complexus: Structures complexes et presque complexes sur une variété

• $\sigma\upsilon\mu\pi\lambda\epsilon\kappa\tau\iota\kappa o\zeta$: Variétés symplectiques

• Variétés de Kähler

• Structure complexe transverse associée à une structure presque complexe.

Variétés réelles et complexes.



Une variété (différentiable) réelle est un espace topologique qui est localement modelé par des ouverts de $\mathbb{R}^m$ avec des changements de coordonnées C^∞.

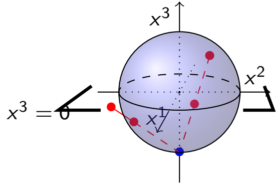
Une variété complexe est un espace topologique qui est localement modelé par des ouverts de $\mathbb{C}^m$ avec des changements de coordonnées holomorphes.

Exemples de variétés complexes.

La sphère S^2

$U_N = S^2 \setminus \{(0,0,1)\}, \varphi_N : U_N \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C} : (x^1, x^2, x^3) \mapsto z := \frac{x^1+ix^2}{1-x^3}$

$U_S = S^2 \setminus \{(0,0,-1)\}, \varphi_S : U_S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C} : (x^1, x^2, x^3) \mapsto w := \frac{x^1-ix^2}{1+x^3}$

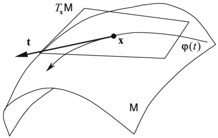


L'espace projectif complexe $\mathbb{P}_n(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$

$U_i = \{[w^1; ..; w^{n+1}] \,|\, w_i \neq 0\}, \varphi_i : U_i \to \mathbb{C}^n : [w^1; ..; w^{n+1}] \mapsto (z^1 := \frac{w^1}{w^i}, .., z^n := \frac{w^{n+1}}{w^i})$

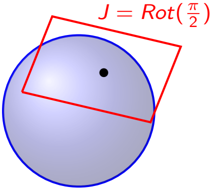
Toute variété réelle de dimension m se plonge dans $\mathbb{R}^{2m}$ (Whitney).
Une variété complexe compacte connexe n'admet aucune fonction holomorphe non constante, donc ne peut pas se plonger dans $\mathbb{C}^N$.
Une sous-variété complexe fermée de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ est algébrique (Chow).

Structures presque complexes.



Une structure presque complexe J sur une variété M est une section C^∞ de $\mathrm{End}(TM)$ telle que $J^2 = -\mathrm{Id}$.
Si M est une variété complexe, elle possède une structure presque complexe associée: $\{z^1 = x^1 + iy^1, \ldots, z^n = x^n + iy^n\}$ étant des coordonnées holomorphes, J s'écrit

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial y^j} \quad J\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = -\frac{\partial}{\partial x^j}$$



Integrabilité - Tenseur de Nijenhuis.

Une structure presque complexe J sur M est dite *intégrable* si elle est associée à une structure complexe sur M.

Le tenseur de Nijenhuis (torsion de Nijenhuis) N^J associé(e) à une structure presque complexe J est défini(e) par

$$N^J(X,Y) := [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] - [X,Y].$$

Théorème(Newlander, Nirenberg) : Une structure presque complexe J est intégrable ssi son tenseur de Nijenhuis N^J est identiquement nul .

On décompose $TM^{\mathbb{C}} = T_J^{1,0} \oplus T_J^{0,1}$ en espaces propres de J de valeurs propres $\pm i$ et on note $\mathcal{T}_J^{1,0}, \mathcal{T}_J^{0,1}$ les espaces de sections

$A^+ : \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{T}_j^{1,0} : X \mapsto \frac{1}{2}(X - ijX)$ $\quad A^- : \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{T}_j^{0,1} : X \mapsto \frac{1}{2}(X + ijX)$

N^J est nul ssi le crochet de deux sections de $T_j^{1,0}$ est une section de $T_j^{1,0}$: $\left[\mathcal{T}_j^{1,0}, \mathcal{T}_j^{1,0}\right] \subset \mathcal{T}_j^{1,0}$.

$$\begin{aligned}
[X - ijX, Y - ijY] &= [X,Y] - [jX,jY] - i\left([jX,Y] + [X,jY]\right) \\
&= A^+(\ldots) + A^-\left([X,Y] - [jX,jY] + j[jX,Y] + j[X,jY]\right) \\
&= A^+(\ldots) + A^-\left(-N^j(X,Y))\right).
\end{aligned}$$

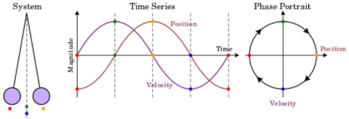
$\mathcal{T}_j^{1,0} + \left[\mathcal{T}_j^{1,0}, \mathcal{T}_j^{1,0}\right] = \mathcal{T}_j^{1,0} + \mathcal{I}mN^j$ avec $(\mathrm{Im}\, N^j)_p = \mathrm{span}\{\, N_p^j(X,Y) \,|\, X, Y \in T_pM \,\}$.

Mécanique classique.

La configuration d'un système est décrite par $(q^1, \ldots, q^n)$; pour exprimer toutes les positions et les vitesses possibles : $(q^1, \ldots, q^n, \dot q^1, \ldots, \dot q^n)$.

Si les forces derivent d'un potentiel, on introduit le Lagrangien $L := T - V$ et les lois de Newton sont :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i}$$



Formulation hamiltonnienne: $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot q^i}$ $\quad H := p_i \dot q^i - L$ et les équations du mouvement s'écrivent

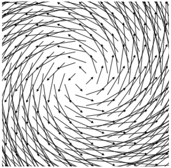
$$\dot q^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$$

donc les trajectoires dans l'espace des phases sont définies par le champ de vecteurs hamiltonien

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}$$

De la mécanique classique aux variétés symplectiques.

On considère ainsi une variété M [par ex. l'espace des phases avec les coordonnées $\{q^j, p_j\}$]. A chaque fonction H (définie à une constante près) on associe un champ de vecteur X_H qui dépend linéairement de dH et on a une bijection linéaire $T_x^*M \to T_xM : dH_x \mapsto X_H(x)$



$$\omega_x : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R} \text{ bilinéaire, non dégénérée } \text{ and } \omega_x(X_H, U) = dH_x(U)\ \forall U$$

Comme H est une constante du mouvement, $dH(X_H) = \omega(X_H, X_H) = 0$, donc

$$\omega \text{ est antisymétrique}$$

Les équations de la mécanique sont invariantes au cours du temps : $L_{X_H}\omega = i(X_H)d\omega = 0\ \forall H$ donc

$$d\omega = 0.$$

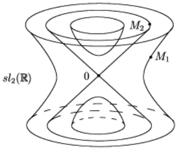
Dans les coordonnés $\{q^i, p_j\}$ comme précédemment $\omega = \sum_{j=1}^n dp_j \wedge dq^j$.

Variétés symplectiques

Une structure symplectique sur une variété M est la donnée d'une 2-forme symplectique ω sur M c'est-à-dire une 2-forme fermée ($d\omega = 0$) et non dégénérée.
Exemples: • $\mathbb{R}^{2n}$ avec les coordonnées $\{x^1, \dots x^{2n}\}$ et $\omega = \sum_{j=1}^{n} dx^j \wedge dx^{n+j}$;

• Le fibré cotangent à une variété $T^*N \xrightarrow{\pi} N$ avec $\omega = d\Theta$ où $\Theta_\alpha(X) =< \alpha, \pi_*(X) >$;

• L'orbite d'un groupe de Lie G dans $\mathfrak{g}^*$, $\omega_\xi(X^*, Y^*) = - < \xi, [X, Y] > \;\; X, Y \in \mathfrak{g}$.

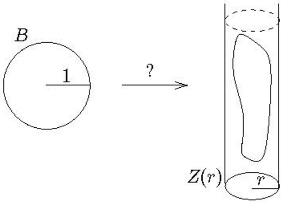


Flexibilité vs rigidité des variétés symplectiques

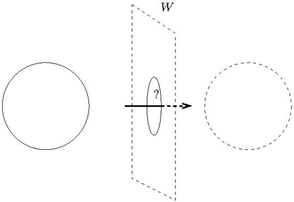
Théorème de Darboux : Si (M, ω) est une variété symplectique, au voisinage de chaque point il existe des coordonnées locales $\{x^1, \ldots x^{2n}\}$ dans lesquelles $\omega = \sum_{j=1}^{n} dx^j \wedge dx^{n+j}$.

Il y a donc une grande flexibilité et aucun invariant local!

Théorème (Non squeezing) de Gromov : On ne peut pas plonger symplectiquement une boule symplectique de rayon R, B^4_R dans un cylindre symplectique $B^2_r \times \mathbb{R}^2$ sauf si $R \leq r$.

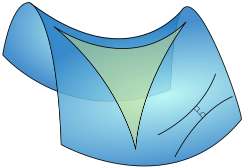


Dortmund, Eglise St Boniface



Structure presque complexes et symplectiques compatibles

Soit (M,ω) une variété symplectique.
Une structure presque complexe J (i.e. une section C^∞ de $\mathrm{End}(TM)$ telle que $J^2=-\mathrm{Id}$) sur (M,ω) est *compatible* ssi $\omega(JX,JY)=\omega(X,Y)$, donc
ssi g^J defini par $g^J(X,Y):=\omega(X,JY)$ est symétrique.
Elle est *positive* si de plus g^J est défini positif.



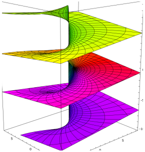
Théorème :Sur toute variété symplectique, il existe des structures presque complexes compatibles positives et l'ensemble $\mathcal{J}^+(M,\omega)$ de telles structures est connexe par arcs.

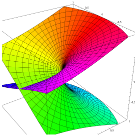
On choisit une métrique g, on écrit $\omega(X,Y)=g(AX,Y)$ et on pose $J:=\left(\sqrt{AA^{*g}}\right)^{-1}A$.

Variétés de Kähler : complexes et symplectiques.

Définition Une variété de Kähler est une variété symplectique (M, ω) munie d'une structure presque complexe compatible positive intégrable J.

Examples: S^2, toute variété complexe de dimension 1 (complexe) , $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$...





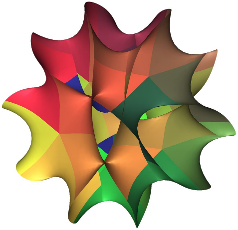
Etant données une métrique g et un J compatible ($g(JX, JY) = g(X, Y)$), en posant $\omega(X, Y) = g(JX, Y)$, et notant ∇^g la connexion de Levi Civita, on a

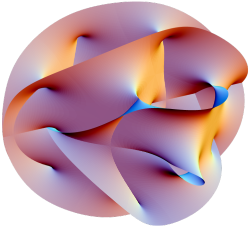
$$2\omega((\nabla^g_X J)Y, Z) = -d\omega(X, JY, Z) - d\omega(X, Y, JZ) + \omega(N^J(Y, Z), JX),$$

donc une variété de Kähler est une variété riemannienne (M, g) avec une structure presque complexe compatible J telle que $\nabla^g J = 0$ (ou telle que J soit integrable et $d\omega = 0$).

Symétrie miroir

Définition Une variété de Calabi Yau est une variété compacte de Kähler (M, ω, J) dont la première classe de Chern est nulle.
$\dim_{\mathbb{C}} = 1$: 2-Tore $\quad$ $\dim_{\mathbb{C}} = 2$: 4-tore ou $K3$-surface $\quad$ $\dim_{\mathbb{C}} \geq 3 : \infty$





La symétrie miroir est une relation entre des variétés de Calabi Yau . Elle donne une dualité entre deux d'entre elles : un objet associé à la structure complexe de l'une (the derived category of coherent sheaves) est equivalent à un objet associé à la structure symplectique de l'autre (the Fukaya category) et vice versa.

Exemple d'une variété symplectique qui n'est pas Kähler

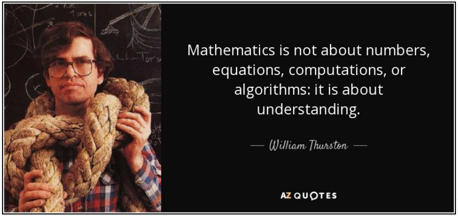
Conditions nécessaires : Si une variété compacte (M, ω) de dim $2n$ est Kähler:
les nombres de Betti impairs doivent être pairs .

Exemples de variétés symplectiques non Kähler:
"Nilmanifold" : $M = \Gamma \backslash G$ avec (G, ω) un groupe de Lie symplectique nilpotent non abelien et Γ un sous-groupe discret cocompact. [Malcev's criterium]

Thurston (1976) $G = \mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{H}_3$,

$(a^1, a^2, b^1, b^2) \cdot (x^1, x^2, y^1, y^2) =$
$(a^1 + x^1, a^2 + x^2 + b^1 y^2, b^1 + y^1, b^2 + y^2)$,

$\omega = dx^1 \wedge dy^1 + dx^2 \wedge dy^2$, et $\Gamma = \mathbb{Z}^4$.



[2r

Structures complexes transverses induites par un J

Définition : Soit $\mathcal{D}$ une distribution (généralisée) involutive sur M. *Une structure presque complexe $\mathcal{D}$-transverse* est une classe d'équivalence $[k]$ d'une section k de $\mathrm{End}(TM)$ telle que $k(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$, $k^2U + U \in \mathcal{D}$, $\forall U \in \mathfrak{X}(M)$, et

$$[F, kU] - k[F, U] \in \mathcal{D} \quad \text{pour tous } F \in \mathcal{D}, U \in \mathfrak{X}(M),$$

l'équivalence étant définie par $k \sim k'$ ssi $\mathcal{I}m\,(k - k') \subset \mathcal{D}$.
Une structure complexe $\mathcal{D}$-transverse est une structure presque complexe $\mathcal{D}$-transverse $[k]$ telle que

$$N^k(U, V) \in \mathcal{D}, \text{ pour tous } U, V \in \mathfrak{X}(M)$$

avec $N^k(U, V) := [kU, kV] - k[kU, V] - k[U, kV] + k^2[U, V]$.

Structures complexes transverses induites par une structure presque complexe : Soit J une structure presque complexe, et $\mathcal{D}$ une distribution involutive stable par J. Ce J induit une structure presque complexe $\mathcal{D}$-transverse ssi

$$(\mathcal{L}_F J)(U) := [F, JU] - J[F, U] \in \mathcal{D} \quad \forall F \in \mathcal{D}, \quad \forall U \in \mathfrak{X}(M),$$

et une structure complexe $\mathcal{D}$-transverse ssi, de plus, $\mathcal{D}$ contient l'image de N^J.
Donc J définit une structure complexe $\mathcal{D}$-transverse ssi

$$\mathcal{T}_J^{1,0} + \mathcal{D} \quad \text{est involutive.}$$

Distributions dérivées de $\mathcal{T}_J^{1,0}$

Etant donnée une distribution (C^∞) (généralisée réelle ou complexe) D, dont les sections forment l'espace noté $\mathcal{D}$, le *drapeau dérivé* est la suite des distributions

$$\mathcal{D}^{(0)} = \mathcal{D} \qquad \mathcal{D}^{(1)} = \mathcal{D} + [\mathcal{D}, \mathcal{D}] \qquad \mathcal{D}^{(i+1)} = \mathcal{D}^{(i)} + [\mathcal{D}^{(i)}, \mathcal{D}^{(i)}].$$

La première distribution dérivée de $\mathcal{T}_J^{1,0}$ est $\mathcal{T}_J^{1,0} + \left(\mathcal{I}m\, N^J\right)^{\mathbb{C}}$. La k-ème distribution dérivée de $\mathcal{T}_J^{1,0}$ s'écrit

$$\left(\mathcal{T}_J^{1,0}\right)^{(k)} =: \mathcal{T}_K^{1,0} \oplus A^-(\mathcal{D}_J^{(k)}) = \mathcal{T}_J^{1,0} + \left(\mathcal{D}_J^{(k)}\right)^{\mathbb{C}}.$$

avec $\mathcal{D}_J^{(1)} = \mathcal{I}m\, N^J$, chaque $\mathcal{D}_J^{(k)}$ est stable par J et donné de manière inductive par

$$\mathcal{D}_J^{(k+1)} = \mathcal{D}_J^{(k)} + \sum_{M \in \mathcal{D}_J^{(k)}} (\mathcal{I}m\, \mathcal{L}_M J) + [\mathcal{D}_J^{(k)}, \mathcal{D}_J^{(k)}].$$

$$\left(\mathcal{T}_J^{1,0}\right)^{\infty} := \cup_k \left(\mathcal{T}_J^{1,0}\right)^{(k)} = \mathcal{T}_J^{1,0} \oplus A^-(\cup_k \mathcal{D}_J^{(k)}) = \mathcal{T}_J^{1,0} + \mathcal{D}_J^{\infty}$$ est involutive;

avec $\mathcal{D}_J^{\infty} := \cup_k \mathcal{D}_J^{(k)}$, qui est involutive.

J définit toujours une structure complexe $\mathcal{D}_J^{\infty}$-transverse!

Structure presque complexe maximalement non intégrable

Définition : Une structure presque complexe J sur une variété M est *maximalement non intégrable* if

$$\mathrm{Im}\, N^j = TM \qquad \text{i.e. si} \qquad \mathcal{T}_j^{1,0} + \left[\mathcal{T}_j^{1,0}, \mathcal{T}_j^{1,0}\right] = \mathcal{T}M^{\mathbb{C}}$$

Exemples naturels: Sur des espaces de twisteurs et sur des variétés 4-symétriques .

L'espace hyperbolique $H^{2n} = SO(1,2n)/SO(2n,\mathbb{R})$ a pour fibré des twisteurs

$$Z^+(H^{2n}) = SO(1,2n)/U(n)$$

C'est l'orbite de $\tilde{j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{Id}_n \\ 0 & \mathrm{Id}_n & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathfrak{so}(1,2n)$. En identifiant

$T_{U(n)}Z^+(H^{2n}) = \left\{ (u,B) := \begin{pmatrix} 0 & {}^t u \\ u & B \end{pmatrix} \mid BJ_0 + J_0 B = 0 \right\}$

on définit 2 structures presque complexes $SO(1,2n)$-invariantes

$j^{\pm}_{U(n)}(u,B) = (\pm J_0 u, J_0 B)$ avec $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{Id}_n \\ \mathrm{Id}_n & 0 \end{pmatrix}$.

j^+ est compatible,intégrable, non positive ; j^- est compatible, positive et maximalement non integrable.

Theorem : (R. Coelho, G. Placini, and J. Stelzig , 2022) S'il existe une structure presque complexe sur M et si $\dim M \geq 10$, alors il en existe une maximalement non intégrable.

Structure presque complexe minimalement non intégrable

Définition : Une structure presque complexe J sur une variété M est *minimalement non intégrable* ssi

$$\mathcal{T}_j^{1,0} + \mathcal{I}mN^j \quad \text{est involutive} \qquad (1)$$

(et dim $ImN^j = 2$). La condition (1) est équivalente à

$$[N, jX] - j[N, X] \in \mathcal{I}mN^j, \forall X \in \mathfrak{X}(M), N \in \mathcal{I}mN^j$$

qui implique que $\mathcal{I}mN^j$ est involutive.

Exemple naturel : Fibré non holomorphe en droites complexes sur une variété complexe.

J minimalement non intégrable avec un ω sympl.transverse

Si J est compatible avec ω et si $\mathcal{D}$ est une distribution J-stable régulière, ω définit une structure symplectique $\mathcal{D}$-transverse ssi $\mathcal{D}^{\perp_\omega}$ est involutive.

Soit J une structure presque complexe invariante à gauche sur une groupe de Lie G, et soit $j := J_e$. Le tenseur de Nijenhuis N^J est invariant à gauche et sa valeur au neutre est donnée par

$$N^j X, Y) := [jX, jY] - j[jX, Y] - j[X, jY] - [X, Y] \qquad X, Y \in \mathfrak{g} := Lie(G).$$

La distribution régulière invariante à gauche $\mathrm{Im}\, N^J$ définit un feuilletage dont les feuilles ont une structure presque complexe induite, et J induit une structure complexe transverse si

$$[N, jX] - j[N, X] \in \mathrm{Im}\, N^j, \quad \forall X \in \mathfrak{g},\ N \in \mathrm{Im}\, N^j.$$

Cette relation implique que $\mathrm{Im}\, N^j$ est une sous-algèbre et est vérifiée dès que c'est un idéal.

Si G admet une structure symplectique invariante ω, si J est compatible, et si $\mathrm{Im}\, N^J$ est un idéal, alors on a une structure transverse de Kähler.

Exemple: Thurston $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{h}_3 =< X_1, X_2, Y_1, Y_2 >$, $[Y_1, Y_2] = X_2$, $\Omega = X_1^* \wedge Y_1^* + X_2^* \wedge Y_2^*$, avec n'importe quel J compatible positif, $\mathrm{Im}\, N^J =< X_2, JX_2 >$.

Bibliography

Michel Cahen, Jean Gutt and Simone Gutt , "Almost complex structures, transverse complex structures, and $(p, 0)$ Dolbeault cohomology", Preprint arXiv:2208.12668, to appear in Rev. Mat. Iberoam.

Michel Cahen, Simone Gutt and John Rawnsley, "On Twistor Almost Complex Structures", Journal of Geometric Mechanics 13 (2021) 313–331.

J.Cirici and S Wilson, Dolbeault cohomology for almost complex manifolds, Advances in Mathematics, 391 (2021) 107970, 52p.

R. Coelho, G. Placini, and J. Stelzig, Maximally non-integrable almost complex structures: an h-principle and cohomological properties, Selecta Mathematica 28,5 (2022) Article number: 83 .

L. Sillari, A. Tomassini, On Bott-Chern and Aeppli cohomologies of almost complex manifolds and related spaces of harmonic forms, arXiv:2303.17449 to appear in Expositio. Math.

Weiyi Zhang, Almost complex Hodge theory, Rivista di Matematica della Universita di Parma, 13, 2 (2023).481-504.

Merci pour votre attention!