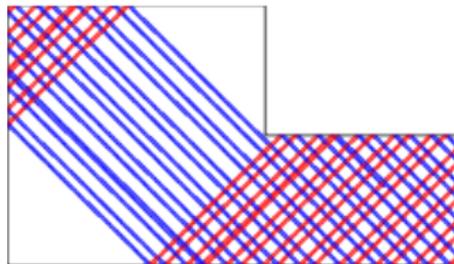


# Géométrie et dynamique des surfaces plates : un panorama des questions actuelles

Elise Goujard – IMB

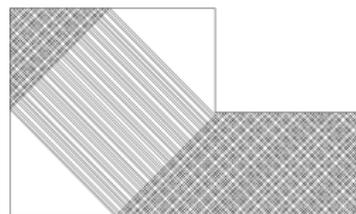
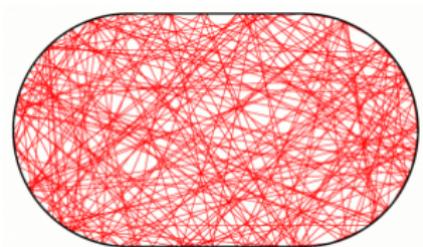
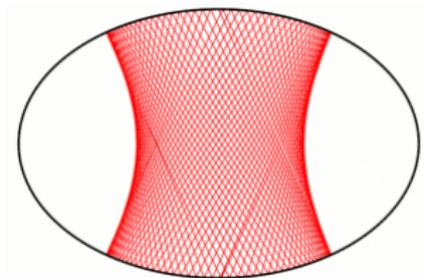
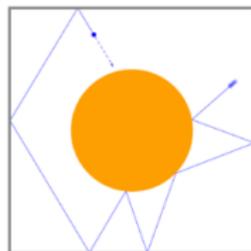
Forum des jeunes mathématicien-nes - Bruxelles



# Motivations

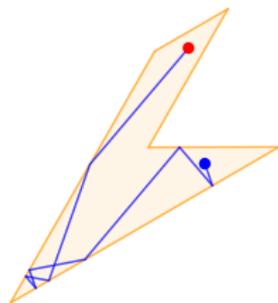
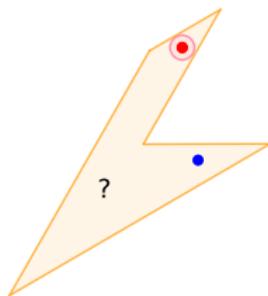
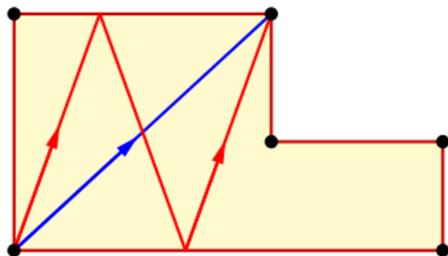
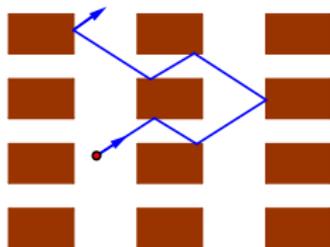
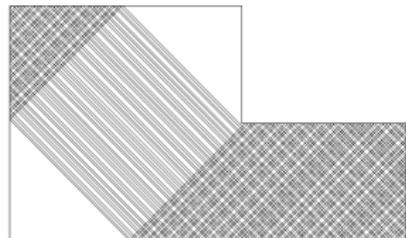
# Billards

Différents types de billards...



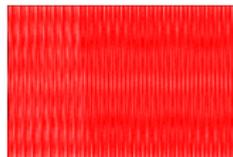
...différents domaines des mathématiques !

# Billards polygonaux : quelques résultats



# Billards polygonaux : quelques résultats

## Ergodicité

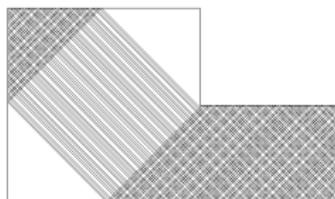
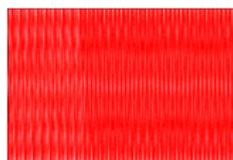


### Dichotomie :

- pente rationnelle  $\Rightarrow$  trajectoire **périodique**
- pente irrationnelle  $\Rightarrow$  trajectoire **dense et uniformément distribuée**

# Billards polygonaux : quelques résultats

## Ergodicité



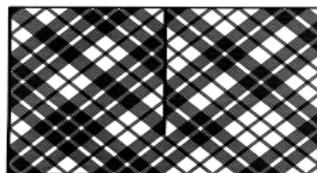
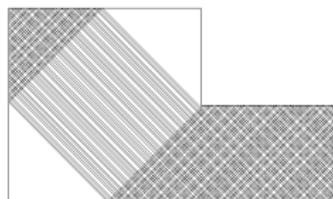
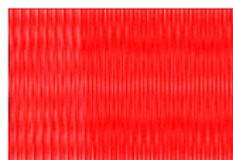
### Dichotomie :

- pente rationnelle  $\Rightarrow$  trajectoire **périodique**
- pente irrationnelle  $\Rightarrow$  trajectoire **dense et uniformément distribuée**

Exemple de trajectoire non périodique et non dense.

# Billards polygonaux : quelques résultats

## Ergodicité



### Dichotomie :

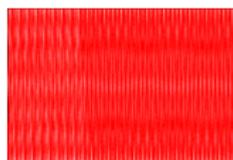
- pente rationnelle  $\Rightarrow$  trajectoire **périodique**
- pente irrationnelle  $\Rightarrow$  trajectoire **dense et uniformément distribuée**

Exemple de trajectoire non périodique et non dense.

Exemple de trajectoire dense mais non uniformément distribuée.

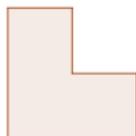
# Billards polygonaux : quelques résultats

## Ergodicité



### Dichotomie :

- pente rationnelle  $\Rightarrow$  trajectoire **périodique**
- pente irrationnelle  $\Rightarrow$  trajectoire **dense et uniformément distribuée**

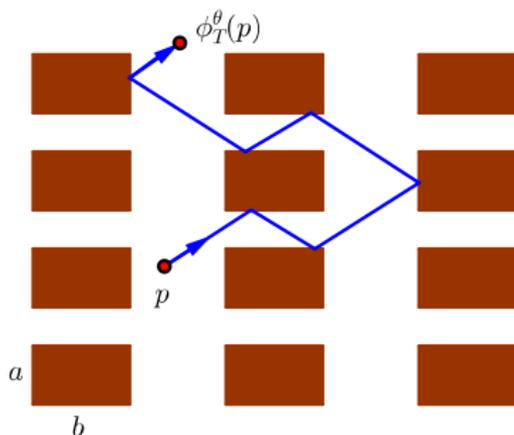


### Théorème (Veech '90)

*Condition suffisante pour satisfaire la dichotomie et familles d'exemples.*

# Billards polygonaux : quelques résultats

## Modèle du vent dans les arbres



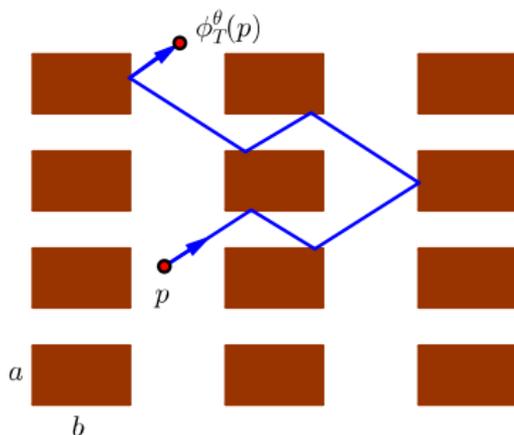
### Théorème

(Delecroix–Hubert–Lelièvre, '11)

$\forall (a, b), p.t. (p, \theta),$   
 $\text{diam}(\text{trajectoire au temps } t) \asymp t^{2/3}$

# Billards polygonaux : quelques résultats

## Modèle du vent dans les arbres



### Théorème

(Delecroix–Hubert–Lelièvre, '11)

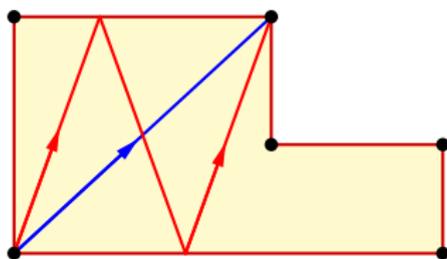
$$\forall (a, b), p, t. (p, \theta), \\ \text{diam}(\text{trajectoire au temps } t) \asymp t^{2/3}$$

Avec des obstacles à  $4m$  coins,  
taux de diffusion en  $\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}$ .  
[Delecroix–Zorich '15]



# Billards polygonaux : quelques résultats

## Comptage de trajectoires



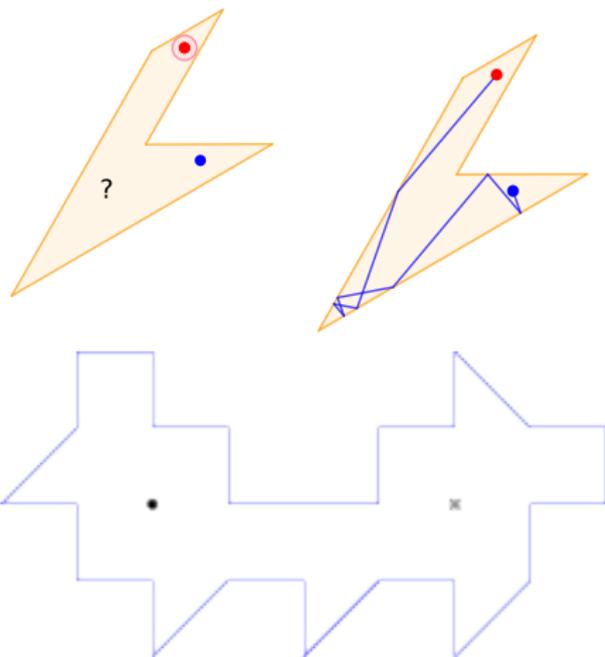
Théorème (Athreya–Eskin–Zorich, '12)

*Le nombre de diagonales généralisées de longueur  $\leq L$  d'un coin d'angle  $\pi/2$  à un autre est  $\frac{1}{2\pi} \frac{L^2}{\text{aire}}$  quand  $L \rightarrow \infty$ .*

*Il y a (asymptotiquement) 4 fois plus de diagonales allant d'un coin d'angle  $\pi/2$  à un coin d'angle  $3\pi/2$  !*

# Billards polygonaux : quelques résultats

## Problème d'illumination



### Théorème

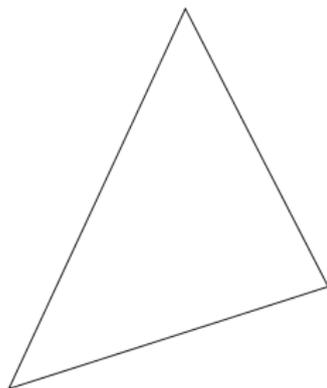
(Lelièvre–Monteil–Weiss, '16)

*Dans une salle polygonale rationnelle, **n'importe quel** point éclaire toute la salle à l'exception d'un nombre fini de points.*

[Wolecki '19] Nombre fini de paires de points qui ne s'éclairent pas mutuellement.

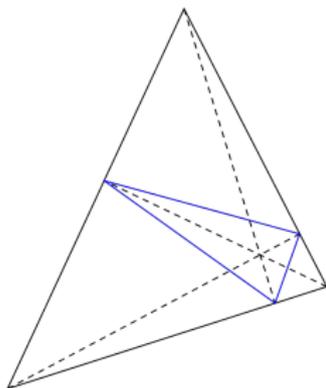
# Billards polygonaux : un problème ouvert

Triangle quelconque du plan (au moins un angle irrationnel).



# Billards polygonaux : un problème ouvert

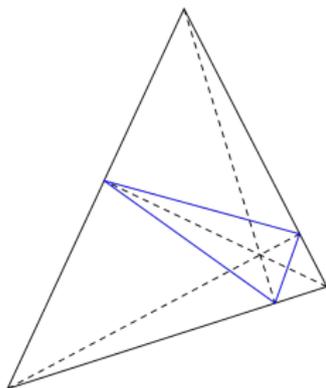
Triangle quelconque du plan (au moins un angle irrationnel).



Fagnano, 1775

# Billards polygonaux : un problème ouvert

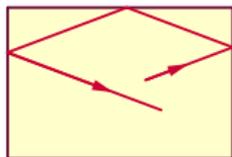
Triangle quelconque du plan (au moins un angle irrationnel).



Fagnano, 1775

- Existe-t-il d'autres trajectoires périodiques dans un triangle aigu ?
- Existe-t-il des trajectoires périodiques dans un triangle obtus ?  
(angle  $\leq 100$  degrés, preuve assistée par ordinateur, R.E. Schwartz, 2009)

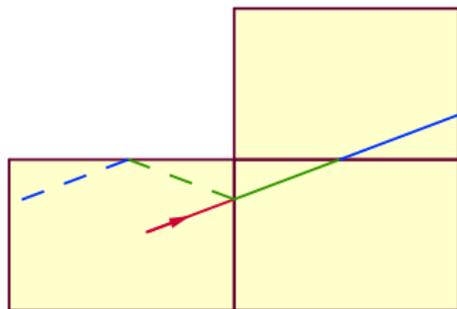
# Des billards aux surfaces plates



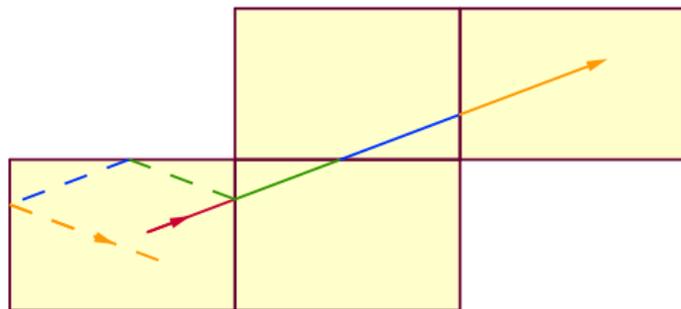
# Des billards aux surfaces plates



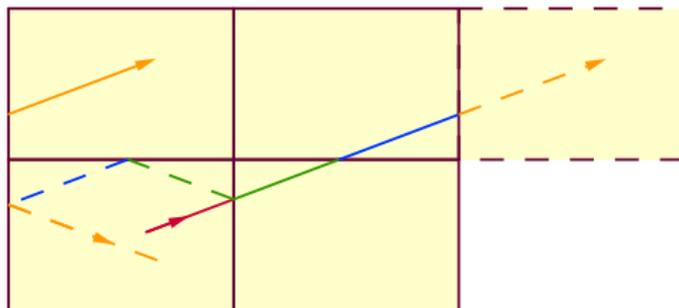
# Des billards aux surfaces plates



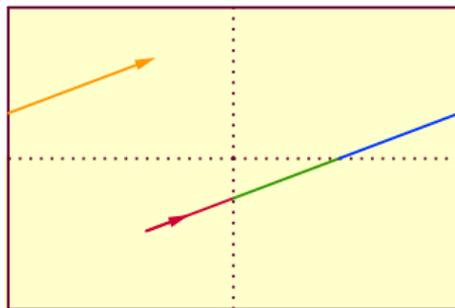
# Des billards aux surfaces plates



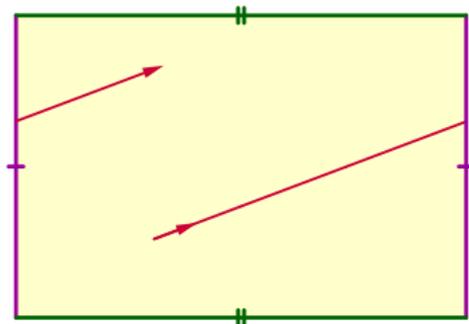
# Des billards aux surfaces plates



# Des billards aux surfaces plates



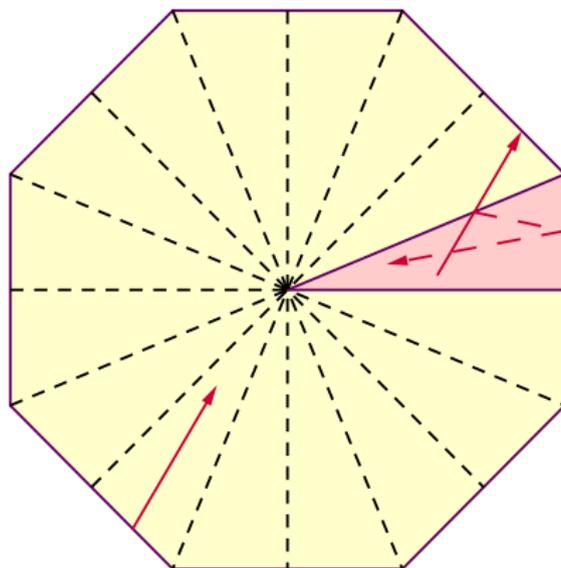
# Des billards aux surfaces plates



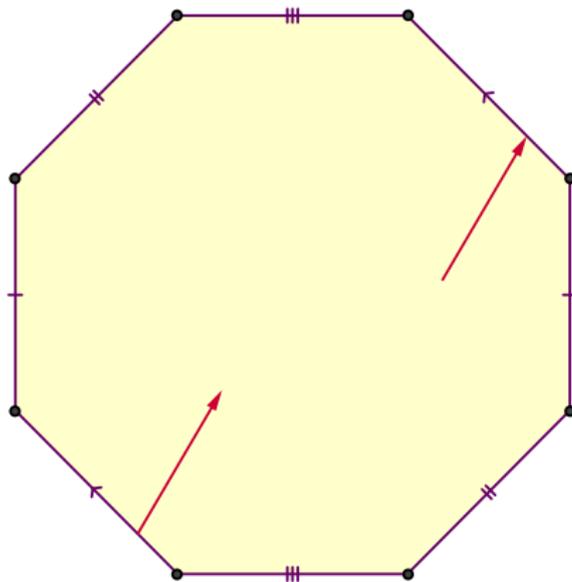
# Des billards aux surfaces plates



# Des billards aux surfaces plates

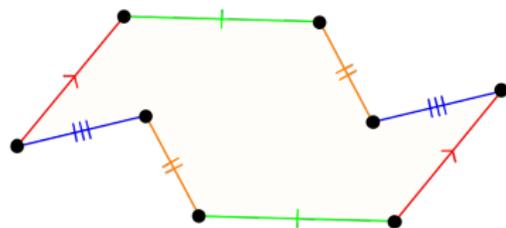


# Des billards aux surfaces plates



# Surfaces de translation et leurs espaces de modules

# Surfaces de translation



Métrie plate

Angles coniques  $(d + 1) \cdot 2\pi$



Surface de Riemann  
et 1-forme holomorphe  
(différentielle Abélienne)  
zéros de degré  $d$

Gauss-Bonnet / Euler-Poincaré :

$$\sum_i d_i = 2g - 2$$

Paire de feuilletages transverses (horizontal et vertical)

# Espace de modules des surfaces de translation

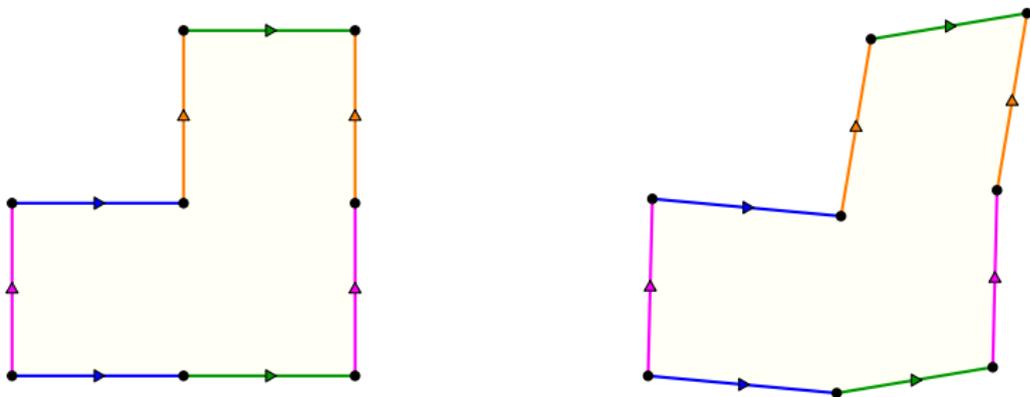
$$\mathcal{H}_g = \{\text{surfaces de translation de genre } g\} / \text{coupé-décalé} = \bigsqcup_{\underline{d} \vdash 2g-2} \mathcal{H}(\underline{d})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\underline{d}) &= \mathcal{H}(d_1, d_2, \dots, d_n) \\ &= \{\text{surfaces dans } \mathcal{H}_g \text{ d'angles coniques } (d_i + 1)2\pi\} \end{aligned}$$

# Espace de modules des surfaces de translation

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_g &= \{\text{surfaces de translation de genre } g\} / \text{coupé-décalé} = \bigsqcup_{\underline{d} \vdash 2g-2} \mathcal{H}(\underline{d}) \\ \mathcal{H}(\underline{d}) &= \mathcal{H}(d_1, d_2, \dots, d_n) \\ &= \{\text{surfaces dans } \mathcal{H}_g \text{ d'angles coniques } (d_i + 1)2\pi\} \end{aligned}$$

- Coordonnées locales : côtés (indépendants) du polygone



# Espace de modules des surfaces de translation

$$\mathcal{H}_g = \{\text{surfaces de translation de genre } g\} / \text{coupé-décalé} = \bigsqcup_{\underline{d} \vdash 2g-2} \mathcal{H}(\underline{d})$$

$$\mathcal{H}(\underline{d}) = \mathcal{H}(d_1, d_2, \dots, d_n)$$

$$= \{\text{surfaces dans } \mathcal{H}_g \text{ d'angles coniques } (d_i + 1)2\pi\}$$

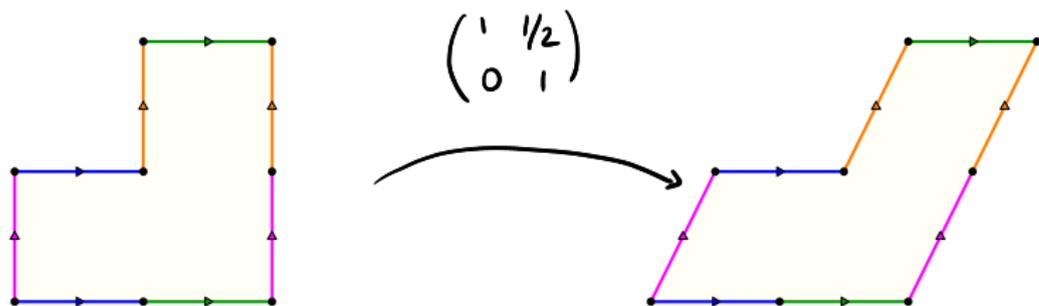
- Coordonnées locales : côtés (indépendants) du polygone

$\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$  est un orbifold complexe dimension  $d = 2g + n - 1$ .

# Espace de modules des surfaces de translation

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_g &= \{\text{surfaces de translation de genre } g\} / \text{coupé-décalé} = \bigsqcup_{d \vdash 2g-2} \mathcal{H}(\underline{d}) \\ \mathcal{H}(\underline{d}) &= \mathcal{H}(d_1, d_2, \dots, d_n) \\ &= \{\text{surfaces dans } \mathcal{H}_g \text{ d'angles coniques } (d_i + 1)2\pi\} \end{aligned}$$

- Coordonnées locales : côtés (indépendants) du polygone  $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$  est un orbifold complexe dimension  $d = 2g + n - 1$ .
- Action de  $SL(2, \mathbb{R})$



# Espace de modules des surfaces de translation

$$\mathcal{H}_g = \{\text{surfaces de translation de genre } g\} / \text{coupé-décalé} = \bigsqcup_{\underline{d} \vdash 2g-2} \mathcal{H}(\underline{d})$$

$$\mathcal{H}(\underline{d}) = \mathcal{H}(d_1, d_2, \dots, d_n)$$

$$= \{\text{surfaces dans } \mathcal{H}_g \text{ d'angles coniques } (d_i + 1)2\pi\}$$

- Coordonnées locales : côtés (indépendants) du polygone

$\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$  est un orbifold complexe dimension  $d = 2g + n - 1$ .

- Action de  $SL(2, \mathbb{R})$

- Mesure de Lebesgue en coordonnées locales

→ Mesure  $SL(2, \mathbb{R})$ -invariante sur la strate  $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$

- Mesure induite finie sur  $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$  (surfaces d'aire 1) : mesure de Masur-Veech

# Espace de modules des surfaces de translation

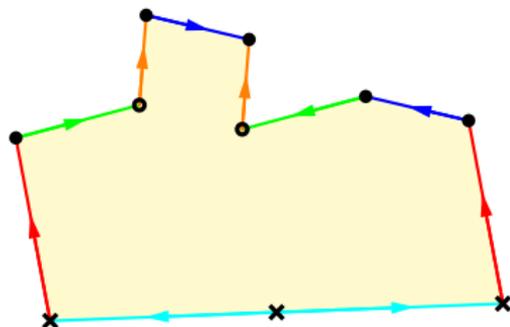
$$\mathcal{H}_g = \{\text{surfaces de translation de genre } g\} / \text{coupé-décalé} = \bigsqcup_{d \vdash 2g-2} \mathcal{H}(\underline{d})$$

$$\mathcal{H}(\underline{d}) = \mathcal{H}(d_1, d_2, \dots, d_n)$$

$$= \{\text{surfaces dans } \mathcal{H}_g \text{ d'angles coniques } (d_i + 1)2\pi\}$$

- Coordonnées locales : côtés (indépendants) du polygone  
 $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$  est un orbifold complexe dimension  $d = 2g + n - 1$ .
- Action de  $SL(2, \mathbb{R})$
- Mesure de Lebesgue en coordonnées locales
  - Mesure  $SL(2, \mathbb{R})$ -invariante sur la strate  $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$
  - Mesure induite finie sur  $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$  (surfaces d'aire 1) : mesure de Masur-Veech
- Les "surfaces à petits carreaux" sont les points entiers de la strate.  
 Evaluer les volumes de Masur-Veech revient à compter les surfaces à petits carreaux d'aire  $\leq N$  quand  $N \rightarrow \infty$ .

# Surfaces de demi-translation



Métrique plate

Angles coniques  $(k + 2) \cdot \pi$



Surfaces de Riemann  
et différentielle quadratique  
(localement  $f(z)(dz)^2$ )  
de pôles au plus simples  
singularités d'ordre  $k \geq -1$

Les espaces de modules correspondants ont des propriétés très similaires.

On peut construire d'autres surfaces plates à partir de  $k$ -différentielles (localement  $f(z)(dz)^k$ ), mais on n'a plus d'action de  $SL(2, \mathbb{R})$ .

# Outils d'étude

---

# Renormalisation

Idée vague : la dynamique du flot linéaire sur une surface de translation est reliée à la dynamique du flot géodésique (action de

$g_t = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ ) sur son espace de module

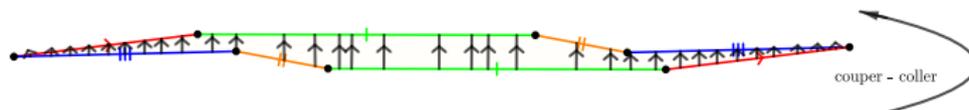
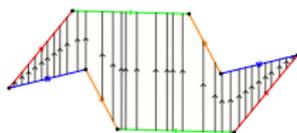
# Renormalisation

Idée vague : la dynamique du flot linéaire sur une surface de translation est reliée à la dynamique du flot géodésique (action de

$g_t = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ ) sur son espace de module l'adhérence de sa  $SL(2, \mathbb{R})$ -orbite.

# Renormalisation

Idée vague : la dynamique du flot linéaire sur une surface de translation est reliée à la dynamique du flot géodésique (action de  $g_t = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ ) sur son espace de module l'adhérence de sa  $SL(2, \mathbb{R})$ -orbite.



## Théorème (Critère de Masur '92)

*Si  $g_t S$  ne diverge pas vers l'infini (il existe un compact  $C$  et une suite  $(t_n)$  tels que  $g_{t_n} S \in C$ ) alors le flot vertical sur  $S$  est uniquement ergodique.*

# Renormalisation

## Théorème (Dichotomie de Veech '89)

*Si  $S$  a une  $SL(2, R)$ -orbite fermée, alors le flot dans n'importe quelle direction sur  $S$  satisfait la dichotomie suivante :*

- *il est soit complètement périodique*
- *soit uniquement ergodique*

Toutes les surfaces à petits carreaux satisfont cette condition.

Plus généralement, les surfaces satisfaisant cette condition sont celles dont le stabilisateur pour l'action de  $SL(2, R)$  est un réseau de  $SL(2, R)$  (Smillie-Weiss '10).

La réciproque est fautive (Smillie-Weiss '08).

## Que dire des $SL(2, R)$ -orbites ?

Théorème (Masur, Veech '82)

*L'orbite de **presque toute** surface  $S$  est dense dans la strate associée.*

## Que dire des $SL(2, R)$ -orbites ?

Théorème (Masur, Veech '82)

*L'orbite de **presque toute** surface  $S$  est dense dans la strate associée.*

Théorème (Eskin–Mirzakhani–Mohammadi '15)

*Pour **toute** surface  $S$ , son adhérence d'orbite  $\overline{SL(2, R) \cdot S}$  est une sous-variété linéaire : elle est définie localement par des équations linéaires à coefficients réels dans les coordonnées locales.*

Ce sont même des variétés algébriques quasi-projectives (Filip '16).

## Que dire des $SL(2, R)$ -orbites ?

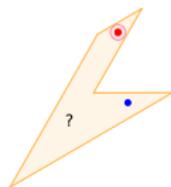
Théorème (Masur, Veech '82)

L'orbite de **presque toute** surface  $S$  est dense dans la strate associée.

Théorème (Eskin–Mirzakhani–Mohammadi '15)

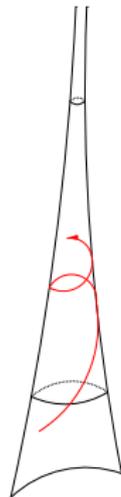
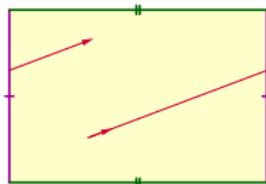
Pour **toute** surface  $S$ , son adhérence d'orbite  $\overline{SL(2, R) \cdot S}$  est une sous-variété linéaire : elle est définie localement par des équations linéaires à coefficients réels dans les coordonnées locales.

Ce sont même des variétés algébriques quasi-projectives (Filip '16).



Application : illumination !

# Résumé de la méthode d'étude des billards polygonaux



flot du billard  
dans une table  
polygonale  
rationnelle

*déploiement*



flot linéaire  
sur une surface  
de translation

*renormalisation*



flot géodésique  
sur la strate  
l'adhérence  
d'orbite

Exposants de Lyapunov  
(valeurs propres moyennes  
de la monodromie)  
[taux de diffusion windtree]

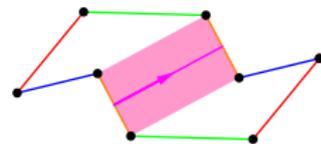


Exposants de Lyapunov  
 (valeurs propres moyennes  
 de la monodromie)  
 [taux de diffusion windtree]

[EKZ '14]



Constantes de Siegel–Veech  
 (nombre de géodésiques  
 fermées)  
 [diagonales généralisées]



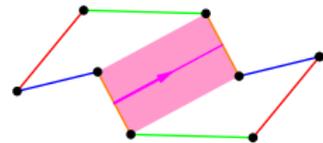
Exposants de Lyapunov  
(valeurs propres moyennes  
de la monodromie)  
[taux de diffusion windtree]

[EKZ '14]



Constantes de Siegel–Veech  
(nombre de géodésiques  
fermées)  
[diagonales généralisées]

[EMZ '03] [MZ '08] [G '15]



Volumes des strates

# Recherches actuelles

---

# Et demain ?

- Compréhension de la topologie des strates  
Composantes connexes [Kontsevich-Zorich '03], Compactification [Bainbridge-Chen-Gendron-Grushevsky-Möller '18], caractéristique d'Euler et classes de Chern [Costantini-Möller-Zachuber '22], dimension de Kodaira [Chen-Costantini-Möller '22],  $\kappa(\pi, 1)$ -conjecture ...

# Et demain ?

- Compréhension de la topologie des strates
- Approches algébriques du calcul des invariants  
Volumes des strates [Chen-Möller-Sauvaget-Zagier '20]  
[Chen-Möller-Sauvaget '23], constantes de Siegel-Veech  
[Sauvaget '18], . . .

## Et demain ?

- Compréhension de la topologie des strates
- Approches algébriques du calcul des invariants
- Classification des adhérences d'orbites.

Genre 2 [McMullen '06], Courbes de Teichmüller [Veech, Ward, Bouw-Möller, Caltà, McMullen], dimension 2 [Eskin-McMullen-Mukamel-Wright '20], finitude des orbites fermées de dimension  $\geq 2$  [Wright '20], ...

# Et demain ?

- Compréhension de la topologie des strates
- Approches algébriques du calcul des invariants
- Classification des adhérences d'orbites.
- Etude des invariants et autres propriétés des surfaces en grand genre

Asymptotique des volumes et constantes de Siegel-Veech  
[Chen-Möller-Zagier '18] [Aggarwal '21], distribution des cylindres  
[Delecroix-Goujard-Zograf-Zorich '22], conjecture pour les  
exposants de Lyapunov, ...

# Et demain ?

- Compréhension de la topologie des strates
- Approches algébriques du calcul des invariants
- Classification des adhérences d'orbites.
- Etude des invariants et autres propriétés des surfaces en grand genre
- Etude des surfaces de translation de type infini  
Genre infini [Valdez '09], singularités sauvages [Randecker '18],  
grands groupes modulaires  
[Hernández-Hrušák-Morales-Randecker-Sedano-Valdez '22],...

## Et demain ?

- Compréhension de la topologie des strates
- Approches algébriques du calcul des invariants
- Classification des adhérences d'orbites.
- Etude des invariants et autres propriétés des surfaces en grand genre
- Etude des surfaces de translation de type infini
- Etude de surfaces provenant de  $k$ -différentielles  
Compactification [Bainbridge-Chen-Gendron-Grushevsky-Möller '19], Volumes [Nguyen '22], Comptage [Engel '21, Koziarz-Nguyen '21], ...

# Et demain ?

- Compréhension de la topologie des strates
- Approches algébriques du calcul des invariants
- Classification des adhérences d'orbites.
- Etude des invariants et autres propriétés des surfaces en grand genre
- Etude des surfaces de translation de type infini
- Etude de surfaces provenant de  $k$ -différentielles
- Etude des surfaces affines

Surfaces de dilatation [Duryev-Fougeron-Ghazouani '19], liens de selles [Tahar '23], échanges d'intervalles affines [Boulangier-Fougeron-Ghazouani '20], espaces de modules [Apisa-Bainbridge-Wang '23], ...

## Et demain ?

- Compréhension de la topologie des strates
- Approches algébriques du calcul des invariants
- Classification des adhérences d'orbites.
- Etude des invariants et autres propriétés des surfaces en grand genre
- Etude des surfaces de translation de type infini
- Etude de surfaces provenant de  $k$ -différentielles
- Etude des surfaces affines
- ...

Merci pour votre attention !