

Les travaux d'Irène Waldspurger, médaille de bronze du CNRS 2020

29 décembre 2020

RÉSULTATS SCIENTIFIQUES

Irène Waldspurger figure parmi les lauréates et lauréats 2020 de la médaille de bronze du CNRS, qui récompense les premiers travaux consacrant des chercheurs et des chercheuses spécialistes de leur domaine. Cette distinction représente un encouragement du CNRS à poursuivre des recherches bien engagées et déjà fécondes.

Irène Waldspurger a été recrutée chargée de recherches au CNRS en 2017. Elle est affectée au Centre de recherche en mathématiques de la décision¹. Ses recherches portent sur les problèmes inverses, notamment la reconstruction de phase, d'un point de vue à la fois théorique et algorithmique.

Un outil d'analyse classique pour les signaux audio est le module de la transformée en ondelettes. En effet, il est en général plus facile de déterminer le contenu perceptuel d'un signal à partir du module de sa transformée en ondelettes qu'à partir du signal « brut ». Afin de mieux comprendre ce phénomène, il est naturel de s'intéresser au problème inverse associé : peut-on reconstruire un signal à partir du module de sa transformée en ondelettes ? C'est un cas particulier de problème de reconstruction de phase.

Ce problème consiste à reconstruire un vecteur x à coordonnées complexes à partir d'un ensemble de mesures qui s'écrivent $\{| \langle x, b_i \rangle | \}_{i=1..m}$ où les b_i peuvent venir d'une transformée déterministe (Fourier, ondelettes, etc) ou au contraire être aléatoires (réalisations indépendantes et identiquement distribuées suivant, par exemple, la loi de Gauss). Il suscite une grande attention depuis les années cinquante, notamment pour ses applications qui vont au-delà de l'acoustique (imagerie par rayons X, astronomie, etc.)

Irène Waldspurger étudie ce problème théoriquement (unicité de la reconstruction à une phase globale près et stabilité de la solution si les mesures sont bruitées) et propose des algorithmes numériques efficaces pour le résoudre.

Dans un article publié en 2015 avec Stéphane Mallat² et Irène Waldspurger fournit la première preuve rigoureuse de la possibilité de retrouver de façon stable un signal lorsqu'on observe les modules d'une transformée en ondelettes. Ils montrent, pour des ondelettes particulières dites de Cauchy, qu'un signal est uniquement déterminé par le module de sa transformée en ondelettes (à une phase globale près). Ils montrent aussi que l'opérateur de reconstruction, c'est-à-dire la réciproque du module de transformée en ondelettes, est continu mais non uniformément continu.

Avec Stéphane Mallat et Alexandre d'Aspremont³, Irène Waldspurger a également travaillé sur les aspects algorithmiques en développant un algorithme de reconstruction de phase, PhaseCut, et en le comparant numériquement et théoriquement avec les algorithmes préexistants.

Dans un article publié en 2018 dans IEEE Transactions on Information Theory, Irène Waldspurger considère le problème de reconstruction de phase lorsque les b_i sont des vecteurs choisis de façon indépendante à partir de lois normales complexes. Elle montre que si la dimension n des vecteurs et si le nombre m d'informations m vérifient $n=O(m)$ alors un algorithme de projections alternées converge vers la solution avec grande probabilité sous condition de bonne initialisation, condition dont l'expérimentation numérique lui permet de conjecturer qu'elle n'est pas nécessaire.

Enfin Irène Waldspurger a publié avec Alden Waters⁴ un article dans le SIAM Journal of Optimization un travail dans lequel elle étudie des problèmes d'optimisation SDP (problèmes d'optimisation convexe dans lesquels l'inconnue est une matrice semi-définie positive). Ces problèmes apparaissent par exemple en recherche opérationnelle ou en optimisation combinatoire et permettent par exemple de développer des algorithmes de résolution approchée de problèmes de maximisation NP-difficiles. Les algorithmes existant pour résoudre ces problèmes sont très lents. Pour accélérer cette résolution, on peut exploiter les propriétés de la solution pour changer la variable sur laquelle on optimise. Par exemple, si X solution du problème est de rang p , on peut l'écrire $X = VV^T$ avec V matrice $n \times p$. Cette méthode réduit le nombre de variables à optimiser, au prix cependant d'une perte de convexité du problème qui peut nuire au bon fonctionnement d'algorithmes usuels d'optimisation locale. Quand p est de l'ordre de la racine carrée du nombre de contraintes linéaires du problème, Nicolas Boumal, Vladislav Voroninski & Afonso Bandeira ont montré qu'une approche du nouveau problème par optimisation riemannienne fournit presque sûrement la bonne solution du problème initial. Irène Waldspurger et Alden Waters montrent que cette borne ne peut pas être améliorée.

Références

- Stéphane Mallat & Irène Waldspurger, *Phase retrieval for the Cauchy wavelet transform*. J. Fourier Anal. Appl. 21 (2015), n°6, 1251–1309.
- Irène Waldspurger, Alexandre d'Aspremont & Stéphane Mallat, *Phase recovery, MaxCut and complex semidefinite programming*. Math. Program. 149 (2015), n°1-2, Ser. A, 47–81.
- Irène Waldspurger, Cours Antoine Peccot, disponible [en ligne](#)
- Irène Waldspurger & Alden Waters, *Rank optimality for the Burer-Monteiro factorization*. SIAM J. Optim. 30 (2020), n°3, 2577–2602.
- Nicolas Boumal, Vladislav Voroninski & Afonso Bandeira. *Deterministic guarantees for Burer-Monteiro factorizations of smooth semidefinite programs*. Commun. Pure Appl. Math. 73, n°3, 581-608 (2020).

Un article d'Images des mathématiques sur la reconstruction de phase :
<http://images.math.cnrs.fr/Problemes-de-reconstruction-de-phase>

Notes

1. Ceremade. UMR7534, CNRS & Université Paris Dauphine
2. Professeur au Collège de France, membre du Département d'informatique de l'École normale supérieure (UMR8548, CNRS, ENS Paris & Inria)
3. DR CNRS affecté au Département d'informatique de l'École normale supérieure (UMR8548, CNRS, ENS Paris & Inria)
4. Universitair Docent à l'Université de Groningen