16ème Forum des Jeunes Mathématicien-ne-s

IRMA, 24-25 novembre 2016

Cette année le 16ème Forum des Jeunes mathématicien-ne-s se tient à Strasbourg à l'initiative de l'association *femmes & mathématiques*.

Les thèmes privilégiés sont **Analyse et Géométrie**, thèmes à comprendre au sens large.

Ce forum est une manifestation qui s'adresse aux jeunes mathématiciens et plus spécifiquement aux jeunes mathématiciennes. C'est en premier lieu une rencontre scientifique avec des conférences plénières de mathématiciennes renommées et des exposés de jeunes doctorant-e-s et postdoctorant-e-s sur leurs travaux.

Cette année le forum met en valeur trois des mathématiciennes strasbourgeoises
Conférencières invitées

- Nalini Anantharaman (Université de Strasbourg et USIAS)
- Christine Huyghe (IRMA-CNRS Strasbourg)
- Sheila Sandon (IRMA-CNRS Strasbourg)

Le programme scientifique est complété par des moments de travail et réflexion sur les enjeux de la parité et la persistance des stéréotypes sur les filles en sciences.

Comité scientifique : Aline Bonami (Orléans), Fanny Kassel (Lille), Stéphanie Salmon (Reims), Marina Ville (Tours) et Nathalie Wach (Strasbourg).

Organisatrices : Florence Lecomte et Christine Vespa (Strasbourg)

Lieu : Toutes les conférences ont lieu dans la salle de conférence de l'IRMA à l'exception de la pièce de théâtre qui se jouera le jeudi dans le grand amphi de maths.

Pour plus d'informations, contacter par mail les organisatrices de ce forum :

- Florence Lecomte : lecomte AT math.unistra.fr
- Christine Vespa : vespa AT math.unistra.fr

24/11/16

09h30	**Accueil**
09h45	**Christine Huyghe - Strasbourg** *Cohomologie de de Rham et géométrie arithmétique*
10h45	**Pause**
11h15	**Victoria Cantoral - Paris Diderot** *Points de torsion sur les variétés abéliennes*
11h45	**Juliana Restrepo - Aix Marseille** *Sur la conjecture de Lang pour certaines surfaces produit-quotient*
12h15	**Elena Frenkel - Strasbourg** *Proof of Schäfli formula using integral geometry*
12h45	**Déjeuner au RU Esplanade** *32 boulevard de la Victoire*
14h00	**Oscar Jarrin - Evry** *Décroissance fréquentielle exponentielle pour les solutions du système de Navier-Stokes stationnaire*
14h30	**Magda Khalile - Orsay** *Valeurs propres d'un Laplacien de Robin sur des secteurs infinis*
15h00	**Kawther Mayoufi - Evry** *La régularité partielle des solutions faibles des équations de Navier-Stokes*
15h30	**Pause**
16h00	**Clémence Perronnet - ENS Lyon** *Stéréotypes et réalité : que nous apprend le concept de genre sur les mathématiques ?*
17h00	**Cie de théâtre : LAPS/équipe du matin** *Théâtre forum- Dérivée*
20h00	**Diner au restaurant "Au Canon" 1 place du Corbeau**

25/11/16

08h00	**Michèle Préfaut** *Mentorat : les stéréotypes femmes et sciences ont la vie dure*
10h00	**Pause**
10h30	**Sheila Sandon - Strasbourg** *Phénomènes de rigidité en topologie de contact*
11h30	**Alba Malaga - Saint-Denis** *Arbres décoiffés - la dynamique du wind-tree*
12h00	**Martin Puchol - Lyon** *Matrices de diffusion et torsion analytique*
12h30	**Lorenzo Ruffoni - Bologne** *Bullages de structures projectives complexes quasi-Fuchsiennes sur surfaces*
13h00	**Déjeuner au RU Esplanade *32 boulevard de la Victoire***
14h00	**Colette Guillopé - Paris-est** *Atelier : comment candidater sur des postes MCF, CNRS, INRIA, …*
14h30	**Kamilia Dahmani - Toulouse** *Estimation à poids du vecteur de Bakry-Riesz*
15h00	**Sari Ghanem - Potsdam** *La décroissance des champs de Yang-Mills SU (2) sur le trou noir de Schwarzschild pour des données initiales à symétrie sphérique avec petite énergie*
15h30	**Safoura Zadeh - Besançon** *On isomorphisms of Beurling group algebras*
16h00	**Pause**
16h30	**Nalini Anantharaman - Strasbourg** *Ergodicité quantique*

Points de torsion sur les variétés abéliennes

Victoria Cantoral Farfán

19 octobre 2016

Le théorème de Mordell-Weil affirme que pour toute variété abélienne A définie sur un corps de nombres K le groupe des points K-rationnels est de type fini, *i.e.* $A(K) = A(K)_{tors} \times \mathbb{Z}^r$, où $A(K)_{tors}$ correspond au sous-groupe fini des points de torsions définis sur K. C'est naturel de se demander si on peut obtenir une borne uniforme pour $|A(L)_{tors}|$, dépendant uniquement du degré $[L : K]$, lorsque la variété abélienne A varie. Cette question est connue comme la conjecture de la borne uniforme. En ce qui concerne les courbes elliptiques définies sur un corps de nombres K, Merel a prouvé en 1994 que l'on peut en effet obtenir une borne uniforme en utilisant des méthodes développées par Mazur et Kamienny.

Cependant il est naturel de se demander si l'on peut obtenir une borne de $|A(L)_{tors}|$ qui dépend uniquement du degré $[L : K]$ lorsque l'extension L/K varie et la variété abélienne A est fixée. Dans cette direction Marc Hindry et Nicolas Ratazzi ont énoncé plusieurs résultats concernant certaines classes de variétés abéliennes, en particulier leurs résultats fournissent une borne optimale.

L'objectif de cet exposé, sera de vous présenter des nouveaux résultats dans cette direction. On se concentrera sur la classe de variétés abéliennes de type III pleinement de type Lefschetz (*i.e.* telle que son groupe de Mumford-Tate soit le groupe des similitudes orthogonales qui commute avec les endomorphismes et telle qu'elle vérifie la conjecture de Mumford-Tate).

Sur la conjecture de Lang pour certaines surfaces produit-quotient

Juliana RESTREPO VELASQUEZ
sur un travail en commun avec **Julien GRIVAUX** et **Erwan ROUSSEAU**
Université d'Aix-Marseille
39, rue Frédéric Joliot-Curie
13453 Marseille Cedex 13
France
juliana.restrepo-velasquez@univ-amu.fr
jgrivaux@math.cnrs.fr
erwan.rousseau@univ-amu.fr

Résumé - *Nous démontrons des versions algébrique et analytique de la conjecture de Lang pour des surfaces produit-quotient de type général avec $P_g = 0$ et $c_1^2 = c_2$.*

Mots clés - Conjecture de Lang, Surfaces de type général, Surfaces produit-quotient

1 Introduction

La conjecture de Lang affirme que les courbes ayant un certain genre géométrique donné forment une famille bornée. Une version effective de cette conjecture peut être formulée de la manière suivante :

Conjecture 1 ***(Lang-Vojta)****. Soit S une surface projective lisse de type général. Alors il existe des nombres réels A et B et une sous-variété stricte $Z \subset S$ tels que pour toute courbe projective lisse C et toute application holomorphe $f : C \to S$ telle que $f(C) \not\subseteq Z$, on ait :*

$$\deg C \leq A(2g(C) - 2) + B.$$

Bogomolov a démontré cette conjecture pour les surfaces de type général qui satisfont $c_1^2 - c_2 > 0$ [Bog77]. Il a montré que de telles surfaces ont un fibré cotangent gros et que la conjecture en découle. Malheureusement, cette approche ne donne pas d'information sur A et B ; cependant, des résultats effectifs pour de telles surfaces ont été obtenus plus récemment par Miyaoka [Miy08]. D'autres progrès récents sur cette conjecture peuvent être trouvés dans [ACLG12] et [RT15].

D'autre part, la version analytique de la conjecture de Lang est la suivante :

Conjecture 2 ***(Green-Griffiths-Lang)*** *Soit S une surface projective lisse de type général. Alors il existe une sous-variété stricte $Z \subset S$ telle que pour toute application holomorphe non constante $f : \mathbb{C} \to S$ on ait :*

$$f(\mathbb{C}) \subset Z.$$

L'idée de Bogomolov a inspiré plus tard la démonstration par McQuillan de cette conjecture pour les surfaces de type général qui satisfont $c_1^2 - c_2 > 0$ [McQ98].

Nous sommes intéressé.e.s par les *surfaces produit-quotient*, i.e. par les résolutions minimales des singularités de quotients $X := (C_1 \times C_2)/G$, où C_1 et C_2 sont des courbes projectives lisses de genres $g(C_1), g(C_2) \geq 2$ respectivement, et G est un groupe fini, agissant fidèlement sur chacune d'elles et diagonalement sur le produit. Ces surfaces sont une généralisation des *surfaces de Beauville*, lesquelles sont justement le cas où l'action du groupe est libre. Grâce aux travaux que I. Bauer, F. Catanese, F. Grunewald et R. Pignatelli, ont commencé et réalisé dans [BC04], [BCG08] and [BCGP08], nous avons finalement une classification complète des surfaces produit-quotient de type général avec genre géométrique $P_g = 0$ dans [BP10].
Nous voulons étudier les surfaces produit-quotient de type général avec $P_g = 0$ et telles que $c_1^2 - c_2 = 0$. Le fait $P_g = 0$ implique $c_1^2 + c_2 = 12$, et donc la condition $c_1^2 - c_2 = 0$ est équivalente à $c_1^2 = 6$. Ces surfaces sont un cas limite et non couvert par le théorème de Bogomolov ; cependant, elles satisfont le critère donné dans ([RR14], Theorem 1), qui assure que leur fibré cotangent est gros.

Nous démontrons les conjectures précédentes quand S est une surface produit-quotient de type général de genre géométrique $P_g = 0$ et telle que $c_1^2 = 6$. Le point clé dans cette approche est le fait que $c_1^2 = 6$ implique que le fibré holomorphe $\mathcal{O}(K_S - E)$ est gros, où K_S est le fibré canonique et E le diviseur exceptionnel sur S.
D'abord, nous donnons une démonstration alternative du fait que Ω_S est gros, en produisant des tenseurs symétriques explicites sur S provenant de $\mathcal{O}(K_S - E)$, ce qui nous permet de contrôler les courbes rationnelles sur S. De manière plus précise, nous démontrons le théorème suivant :

Théorème 1 *Soit S une surface produit-quotient de type général de genre géométrique $P_g = 0$. Si $c_1(S)^2 = 6$, alors :*

1. *Le fibré contangent Ω_S est gros et donc S ne contient qu'un nombre fini de courbes rationnelles ou elliptiques.*
2. *Pour toute application holomorphe non constante $f : \mathbb{P}^1 \to S$,*

$$f(\mathbb{P}^1) \subset E \cup \mathbb{B}(K_S - E),$$

où E est le diviseur exceptionnel sur S et

$$\mathbb{B}(K_S - E) := \bigcap_{m>0} Bs(m(K_S - E))$$

est le lieu de base stable de $K_S - E$.

D'autre part, nous démontrons le résultat suivant pour toutes les surfaces produit-quotient :

Théorème 2 *Soit S une surface produit-quotient. Si $f : C \to S$ est une application holomorphe telle que $f(C) \nsubseteq E$, où C est une courbe projective lisse et E le diviseur exceptionnel sur S, alors*

$$\deg f^*(K_S - E) \leq 2(2g(C) - 2).$$

Il est important de noter que dans la conjecture 1, $\deg C = \deg f^*\mathcal{L}$ pour $\mathcal{L}$ un fibré positif (ample ou gros) sur S. Alors, en prenant $\mathcal{L} = \mathcal{O}(K_S - E)$, le théorème précédent donne une démonstration effective de la conjecture 1 pour notre cas particulier.
Finalement, notre approche nous permet aussi de contrôler les courbes elliptiques et plus généralement les courbes entières sur S. Précisément, nous démontrons le résultat suivant :

Théorème 3 *Soit S une surface produit-quotient de type général de genre géométrique $P_g = 0$. Si $c_1(S)^2 = 6$, alors pour toute application holomorphe non constante $f : \mathbb{C} \to S$, on a*

$$f(\mathbb{C}) \subset E \cup \mathbb{B}^+(K_S - E),$$

où E est le diviseur exceptionnel sur S et

$$\mathbb{B}^+(K_S - E) := \bigcap_{m>0} Bs(m(K_S - E) - A)$$

avec A un fibré ample, est le lieu de base augmenté de $K_S - E$.

Références

[ACLG12] Pascal Autissier, Antoine Chambert-Loir, and Carlo Gasbarri. On the canonical degrees of curves in varieties of general type. *Geometric and Functional Analysis*, 22(5) :1051–1061, 2012.

[BC04] Ingrid Bauer and Fabrizio Catanese. Some new surfaces with $p_g = q = 0$. *Proceedings of the Fano Conference*, 2004.

[BCG08] Ingrid Bauer, Fabrizio Catanese, and Fritz Grunewald. The classification of surfaces with $p_g = q = 0$ isogenous to a product of curves. *Pure and Applied Mathematics Quarterly*, 4(2), 2008.

[BCGP08] Ingrid Bauer, Fabrizio Catanese, Fritz Grunewald, and Roberto Pignatelli. Quotients of products of curves, new surfaces with $p\_g = 0$ and their fundamental groups. *arXiv preprint arXiv :0809.3420*, 2008.

[Bea96] Arnaud Beauville. *Complex algebraic surfaces.* Number 34. Cambridge University Press, 1996.

[BHPVdV03] W Barth, K Hulek, Chris Peters, and A Van de Ven. *Compact Complex Surfaces*, volume 4. Springer Science & Business Media, 2003.

[Bog77] Fedor Bogomolov. Families of curves on a surface of general type. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 236(5) :1041–1044, 1977.

[BP10] Ingrid Bauer and Roberto Pignatelli. The classification of minimal product-quotient surfaces with $p\_g = 0$. *arXiv preprint arXiv :1006.3209*, 2010.

[Bru10] M Brunella. *Birational geometry of foliations.* IMPA, 2010.

[Dem97] Jean-Pierre Demailly. Algebraic criteria for kobayashi hyperbolic projective varieties and jet differentials. 1997.

[ELM+06] Lawrence Ein, Robert Lazarsfeld, Mircea Mustaţă, Michael Nakamaye, and Mihnea Popa. Asymptotic invariants of base loci. In *Annales de l'institut Fourier*, volume 56, pages 1701–1734, 2006.

[FK92] Hershel M Farkas and Irwin Kra. Riemann surfaces. In *Riemann surfaces.* Springer, 1992.

[Fuj74] Akira Fujiki. On resolutions of cyclic quotient singularities. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, 10(1) :293–328, 1974.

[GG80] Mark Green and Phillip Griffiths. Two applications of algebraic geometry to entire holomorphic mappings. In *The Chern symposium 1979*, pages 41–74. Springer, 1980.

[Laz04] Robert K Lazarsfeld. *Positivity in algebraic geometry I : Classical setting : line bundles and linear series*, volume 48. Springer Science & Business Media, 2004.

[McQ98] Michael McQuillan. Diophantine approximations and foliations. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, 87(1) :121–174, 1998.

[Miy08] Yoichi Miyaoka. The orbibundle miyaoka–yau–sakai inequality and an effective bogomolov–mcquillan theorem. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, 44(2) :403–417, 2008.

[Pol10] Francesco Polizzi. Numerical properties of isotrivial fibrations. *Geometriae Dedicata*, 147(1) :323–355, 2010.

[Rei12] Miles Reid. Surface cyclic quotient singularities and hirzebruch-jung resolutions. *manuscript available at http ://www. warwick. ac. uk/masda/surf*, 2012.

[RR14] Xavier Roulleau and Erwan Rousseau. Canonical surfaces with big cotangent bundle. *Duke Mathematical Journal*, 163(7) :1337–1351, 2014.

[RT15] Erwan Rousseau and Frédéric Touzet. Curves in hilbert modular varieties. *arXiv preprint arXiv :1501.03261*, 2015.

[Ser96] Fernando Serrano. Isotrivial fibred surfaces. *Annali di Matematica pura ed applicata*, 171(1) :63–81, 1996.

Title: "Proof of Schläfli formula using Integral Geometry"

Elena FRENKEL (STRASBOURG)

Abstract: Let P_t be a family of compact convex polyhedra of dimension $n\geq2$ in Euclidean, hyperbolic or spherical n-dimensional space. The Schläfli formula, discovered in 1850's by Schläfli in case of spherical simplexes and extended to the hyperbolic case by Sforza in 1907, relates the variation of volume of P_t to the volumes of its $n-2$-faces and dihedral angles. References to more modern proofs of Schläfli formula can be found in Milnor's note "The Schläfli differential equality". In this talk we will give a different (short) proof of Schläfli formula using Integral Geometry.

Décroissance fréquentielle exponentielle pour les solutions du système de Navier-Stokes stationnaire

Oscar JARRIN
étudiant en 3ème année de thèse à l'Université d'Evry Val d'Essonne sous la direction de Diego Chamorro et Pierre-Gilles Lemarié-Rieusset
Evry, France
oscar.jarrin@univ-evry.fr

Résumé - *Dans cet exposé on parlera sur un résultat récent concernant l'étude de la décroissance fréquentielle pour les solutions régulières du système de Navier-Stokes incompressible, stationnaire, dans l'espace* $\mathbb{R}^3$ *tout entier et sur l'action d'une force extérieure régulière construite par une ondelette à divergence nulle. On remarquera que cette force nous permet de caractériser le régime laminaire du fluide dont nous montrons que le spectre d'énergie du fluide a une précise décroissance exponentielle d'accord à la théorie K41.*

Mots clés - Équations de Navier-Stokes ; système stationnaire ; spectre d'énergie, théorie de la turbulence.

1 Introduction

L'étude déterministe des lois proposées par la théorie de la turbulence de Kolmogorov (théorie K41) est un sujet de recherche actuel dans l'outil de base porte sur les équations de Navier-Stokes lesquelles modélisent le mouvement des fluides visqueux. Dans cette présentation on considère le système de Navier-Stokes incompressible, stationnaire, dans l'espace $\mathbb{R}^3$ tout entier

$$-\nu\Delta\vec{u} + \mathbb{P}(div(\vec{u}\otimes\vec{u})) = \vec{f}, \qquad div(\vec{u}) = 0, \tag{1}$$

où $\nu > 0$ est le paramètre du viscosité du fluide, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ (la inconnue) est le champ des vitesses, $\mathbb{P}$ est le projecteur de Leray (voir [3]) et $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ est une force extérieure régulière, à divergence nulle et indépendante du temps. Voir la Définition 2 plus en bas.

Étant $\vec{f}$ une force extérieure stationnaire, elle agit sur le fluide en introduisant l'énergie cinétique indépendamment du temps et alors nous nous intéressons à la description de la façon comme le spectre d'énergie du fluide $E(\kappa)$ décroit lorsque l'amplitude des fréquences κ accroit. Le spectre d'énergie d'un fluide est définie par la quantité $E(\kappa) = \displaystyle\int_{|\xi|=\kappa} \left|\widehat{\vec{u}}(\xi)\right|^2 d\sigma(\xi)$, où $\widehat{\vec{u}}$ dénote la transformée de Fourier du champ des vitesses et $d\sigma$ est la mesure de la sphère unité. Ce spectre d'énergie mesure la densité d'énergie dans une certaine échelle de longueur ℓ laquelle correspond à l'amplitude de fréquence $\kappa = \frac{1}{\ell}$.

L'étude du comportement du spectre d'énergie $E(\kappa)$ est central dans la théorie K41 (voir

[2, 5]) et en particulier nous nous concentrerons à la décroissance du spectre d'énergie $E(\kappa)$ dans le régime *laminaire.* En effet, rappelons tout d'abord quelques définitions utiles :

- étant donnée $\ell_0 > 0$, l'échelle d'injection d'énergie bien connue comme l'échelle initiale, on a que $\kappa_0 = \frac{1}{\ell_0}$ est la fréquence initiale,
- pour $L > \ell_0$, la longueur caractéristique du fluide (dans le cadre périodique, L est précisemenet la longueur de la période), on définie la vitesse caractéristique du fluide par

$$U = \frac{\|\vec{u}\|_{L^2}}{L^{\frac{3}{2}}},$$

  et donc le nombre de Reynolds du fluide est défini par

$$Re = \frac{U\ell_0}{\nu}.$$

Dans le régime *laminaire* du fluide, lorsque les nombres de Reynolds sont contrôlés par une constante $Re \leq C$, la théorie K41 propose le comportement suivant pour le spectre d'énergie :

$$E(\kappa) \approx e^{-\kappa}, \tag{2}$$

pour les fréquences $\kappa \in]\kappa_0, +\infty[$, car les effets de viscosité du fluide sont censés d'annuler les mouvements d'ordre inférieur que l'échelle ℓ_0 et donc l'énergie cinétique introduite à l'échelle de longueur est dissipée en dehors le fluide, voir par exemple [2] (Part I, Chapter 7) ou [4].

Dans ce cadre le but de cet exposé est de présenter un récent étude déterministe de la décroissance exponentielle du spectre d'énergie (2) et dont les paramètres que l'on contrôle ne dépendent pas de la vitesse du fluide $\vec{u}$. Pour cela on va considérer le régime laminaire lorsque $Re \leq C$, mais on va remplacer les nombres de Reynolds par des quantités *équivalentes*, connues par les nombres de *Grashof* G_r, lesquels ne dépendent pas de la solution $\vec{u}$, voir l'expression (3) ci-dessous.

1.1 Le résultat

Avant d'énoncer notre résultat il convient d'introduire quelques définitions et notations.

Définition 1 *Les paramètres physiques que l'on va considérer sont les suivants :*

- $\nu > 0$ *est le paramètre de viscosité du fluide,*
- $L > 0$ *est la longueur caractéristique du fluide,*
- $\ell_0 > 0$ *(que l'on suppose* $L \geq \ell_0$*) est l'échelle d'injection d'énergie et*
- $F > 0$ *est l'amplitude que l'on donnera à la force extérieure.*

Avec ces paramètres physiques on définie les nombres de Grashof de la façon suivante :

$$G_r = \frac{FL\ell_0^2}{\nu^2}. \tag{3}$$

On remarque que le nombre de Grashof (3) ne dépend pas de la solution $\vec{u}$ et de cette façon on obtient une caractérisation *à priori* du régime laminaire du fluide dont on veut étudier la décroissance exponentielle du spectre d'énergie (2).

La définition suivante concerne la force extérieure $\vec{f}$. Cette force extérieure particulier est construite par dilatation et translation d'une ondelette régulière et a divergence nulle $\vec{\phi}$. Plus précisément on a la définition suivante.

Définition 2 *Soient L, ℓ_0 et F les paramètres physiques donnés dans la Définition 1 ci-dessus. Soit $\vec{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ une ondelette dans la classe de Schwartz et à divergence nulle. On définie le champ des vecteurs $\vec{f}(x)$ par l'expression : pour tout $x \in \mathbb{R}^3$,*

$$\vec{f}(x) = F \sum_{|\ell_0 k| \leq L} \vec{\phi}\left(\frac{x - \ell_0 k}{\ell_0}\right). \tag{4}$$

Une fois que l'on a introduit le nombre de Grahof G_r et la force extérieure $\vec{f}$ on peut maintenant énoncer notre résultat.

Théorème 1 (Chamorro, Jarrin, Lemarié-Rieusset, 2016) *Soient (ν, L, ℓ_0, F) les paramètres physiques donnés dans la Définition 1. Soit G_r le nombre de Grashof donné par (3) et $\vec{f}$ la force extérieure donnée dans la Définition 2 ci-dessus. Il existe une constante $\eta > 0$, indépendante des paramètres ci-dessus, telle que si le nombre de Grashof est contrôlé par*

$$G_r = \frac{F L \ell_0^2}{\nu^2} < \eta, \tag{5}$$

alors il existe $\vec{u} \in H^1(\mathbb{R}^3)$ solution du système de Navier-Stokes stationnaire

$$-\nu \Delta \vec{u} + \mathbb{P}(div(\vec{u} \otimes \vec{u})) = \vec{f}, \quad div(\vec{u}) = 0,$$

et de plus $\vec{u}$ vérifie la décroissance fréquentielle exponentielle : pour tout $|\xi| \geq \frac{\rho_1}{\ell_0}$

$$\left|\widehat{\vec{u}}(\xi)\right| \leq c_1\, e^{-c_2 |\xi|},$$

où $c_1 = c_1(\nu, L, \ell_0, G_r)$, $c_2 = c_2(\ell_0)$ et $\rho_1 > 0$ est une constante qui ne dépend pas des paramètres ci-dessus.

Références

[1] D. Chamorro, O. Jarrin et P.G. Lemarié-Rieusset. (2016), Exponential frequency decay for solutions to the stationary Navier-Stokes equations in the laminar setting, *en préparation.*

[2] L. Jacquin et P. Tabeling. (2006), *Turbulence et Tourbullons*, Majeure 1, MEC555, École Polytechnique.

[3] P.G. Lemarié-Rieusset. (2016), *The Navier-Stokes Problem in the 21st Century*, Chapman & Hall/CRC.

[4] D.O. Martinez et. all. (1996), Energy spectrum in the dissipation range of fluid turbulence, *J. Plasma Physics*, **vol. 57** p. 195 - 201.

[5] A. N. Kolmogorov et A.M. Obukhoff. (1941), On the energy distribution in the spectrum of a turbulent flow, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **vol. 32** p. 51 - 62.

Valeurs propres d'un Laplacien de Robin sur des secteurs infinis

Magda Khalile

Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Univ. Paris-Sud,
91405 Orsay, France
magda.khalile@math.u-psud.fr

Résumé

Pour $\alpha \in (0, \pi)$, nous considérons U_α, le secteur angulaire d'ouverture 2α,

$$U_\alpha = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |\arg(x_1 + ix_2)| < \alpha\},$$

et T_α^γ, le Laplacien agissant dans $L^2(U_\alpha)$, $T_\alpha^\gamma u = -\Delta u$, muni de la condition de bord de Robin $\partial_\nu u = \gamma u$, où ∂_ν représente la dérivée normale sortante à U_α et γ est un paramètre positif. Nous souhaitons étudier les propriétés spectrales de cet opérateur, et plus particulièrement le comportement de ses valeurs propres en fonction de l'angle α.

Il est déjà connu que le spectre essentiel de l'opérateur T_α^γ est égal à $[-\gamma^2, +\infty)$ pour tout $\alpha \in (0, \pi)$. De plus, le spectre discret est non vide si et seulement si $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Dans ce cas, nous montrons que le spectre discret est fini et que chaque valeur propre discrete est une fonction continue et strictement croissante en l'angle α. Lorsque α tend vers 0, nous pouvons également montrer que la nième valeur propre discrète, notée $E_n(T_\alpha^\gamma)$, se comporte comme suit :

$$E_n(T_\alpha^\gamma) = -\frac{\gamma^2}{(2n-1)^2\alpha^2} + O(1),$$

et que le nombre de valeurs propres tend vers $+\infty$. Enfin, les fonctions propres associées sont localisées près de l'origine.

Mots clefs - Laplacien, conditions de bord de Robin, secteur angulaire, analyse asymptotique.

1 Introduction

Les résultats présentés dans ce résumé sont issus de [7].
Pour $\alpha \in (0, \pi)$, nous considérons U_α, le secteur angulaire d'ouverture 2α,

$$U_\alpha = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |\arg(x_1 + ix_2)| < \alpha\}.$$

Nous nous intéressons aux propriétés spectrales du Laplacien de Robin agissant dans $L^2(U_\alpha)$, noté T_α^γ, défini pour $\gamma > 0$ par

$$u \mapsto -\Delta u := -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) u,$$

pour les fonctions u satisfaisant la condition au bord

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \gamma u \text{ sur } \partial U_\alpha,$$

où ν représente la normale sortante unitaire au domaine. L'opérateur T_α^γ est également défini comme l'unique opérateur auto-adjoint associé à la forme quadratique

$$t_\alpha^\gamma(u,u) = \int_{U_\alpha} |\nabla u|^2 dx - \gamma \int_{\partial U_\alpha} |u|^2 ds, \quad u \in H^1(U_\alpha),$$

où s représente la mesure de Hausdorff unidimensionnelle.
Le Laplacien de Robin a suscité beaucoup d'intérêt ces dernières années comme le montrent [1, 2, 4–6, 10, 11, 13, 14]. Les propriétés spectrales de cet opérateur dépendent fortement de la géométrie du domaine considéré et il a été montré plus particulièrement par [8] que dans le cas d'un domaine régulier sa première valeur propre se comporte comme $-\gamma^2 + o(\gamma^2)$ lorsque $\gamma \to +\infty$ tandis que dans le cas d'un domaine à coins ([2]) elle se comporte comme $-C\gamma^2+o(\gamma^2)$, $\gamma \to +\infty$, où C est une constante supérieure à 1 dépendant des valeurs propres du Laplacien de Robin agissant sur les cônes modèles associés au domaine. Il paraît alors intéressant d'étudier l'opérateur T_α^γ, les secteurs U_α, $\alpha \in (0,\pi)$, couvrant exactement toute la classe des cônes modèles en dimension deux. Le domaine U_α et son bord présentent également l'intérêt d'être non-compacts ce qui pourrait mener à des comportements spectraux inattendus comme la présence d'un spectre discret infini. Nous verrons toutefois qu'il n'en est rien, contrairement aux résultats obtenus en dimensions supérieures [12].
Le seul résultat connu sur l'opérateur T_α^γ est le suivant, voir [8] :

$$\inf \operatorname{spec} T_\alpha^\gamma = \begin{cases} -\gamma^2, & \alpha \geq \dfrac{\pi}{2}, \\ -\dfrac{\gamma^2}{\sin^2 \alpha}, & \alpha < \dfrac{\pi}{2}, \end{cases} \tag{1.1}$$

et pour $\alpha < \dfrac{\pi}{2}$ la valeur indiquée est une valeur propre associée à la fonction propre $\exp(-\gamma x_1/\sin(\alpha))$. Nous voulons obtenir une analyse plus détaillée du comportement spectral de cet opérateur. Dans un premier temps, il est aisé de montrer que son spectre essentiel ne dépend pas de l'angle α et est égal à $[-\gamma^2, +\infty)$. Ainsi, pour $\alpha \geq \dfrac{\pi}{2}$ le spectre de T_α^γ est entièrement connu. Nous nous concentrons donc dans la suite sur le cas $\alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$ pour lequel le spectre discret est non vide.

2 Finitude du spectre

Théoreme 2.1. *Le spectre discret de T_α^γ est fini pour tout $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$.*

La preuve s'inspire de [9, Theorem 2.1]. L'idée est d'effectuer une réduction de la dimension pour comparer l'opérateur avec un opérateur unidimensionnel et de conclure grâce à une estimée de Bargmann.
Notons $\Lambda_n(T_\alpha^\gamma)$ les quotients de Rayleigh de T_α^γ. La proposition suivante nous renseigne sur la monotonicité de ces quotients en fonction de α.

Proposition 2.2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $(0, \frac{\pi}{2}) \ni \alpha \mapsto \Lambda_n(T^\gamma, \alpha)$ est continue et croissante.*

Corollaire 2.3. *L'opérateur T_α^γ admet une unique valeur propre discrète pour $\alpha \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$.*

3 Asymptotique des valeurs propres lorsque $\alpha \to 0$

Théoreme 3.1. *Il existe* $\alpha_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ *et* $\mathcal{C} > 0$ *tels que pour tout* $\alpha \in (0, \alpha_0)$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$\left| \Lambda_n(T_\alpha^\gamma) + \frac{\gamma^2}{(2n-1)^2\alpha^2} \right| < \mathcal{C}.$$

La preuve est basée sur une réduction de type Born-Oppenheimer [3]. Le but est de réduire la dimension afin de se ramener à un opérateur unidimensionnel qui dans notre cas agit dans $L^2(\mathbb{R}_+)$ comme

$$f \mapsto \left(-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{4r^2} - \frac{1}{\alpha r} \right) f$$

muni d'une condition de bord bien choisie à l'origine. Nous pouvons également énoncer deux conséquences immédiates de ce théorème. Notons $N(T_\alpha^\gamma, -\gamma^2)$ le nombre de valeurs propres discrètes de T_α^γ comptées avec multiplicités.

Corollaire 3.2. *Il existe* $\kappa > 0$ *tel que* $N(T_\alpha^\gamma, -\gamma^2) \geq \frac{\kappa}{\alpha}$ *pour* $\alpha \to 0$*. En particulier, le nombre de valeurs propres discrètes de* T_α^γ *tend vers* $+\infty$ *lorsque* $\alpha \to 0$*.*

Corollaire 3.3. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,*

$$E_n(T_\alpha^\gamma) = -\frac{\gamma^2}{(2n-1)^2\alpha^2} + O(1), \quad \alpha \to 0.$$

Nous pouvons en réalité montrer un résultat plus fort.

Théoreme 3.4. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, il existe* $\lambda_{j,n} \in \mathbb{R}$*,* $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*, tels que pour tout* $N \in \mathbb{N}$ *nous avons l'asymptotique à tout ordre :*

$$E_n(T_\alpha^\gamma) = \frac{1}{\alpha^2} \sum_{j=0}^{N} \lambda_{j,n} \alpha^{2j} + O(\alpha^{2N}), \quad \alpha \to 0,$$

avec $\lambda_{0,n} = -\frac{\gamma^2}{(2n-1)^2}$.

4 Localisation des fonctions propres

Le résultat suivant, qui s'apparente à une estimée d'Agmon, nous montre que les fonctions propres associées à l'opérateur T_α^γ sont localisées près du sommet de U_α.

Théoreme 4.1. *Notons* E *une valeur propre discrète de* T_α^γ *et* $\mathcal{V}$ *une fonction propre associée. Alors, pour tout* $\epsilon \in (0, 1)$*,*

$$\int_{U_\alpha} \left(|\nabla \mathcal{V}|^2 + |\mathcal{V}|^2 \right) e^{2(1-\epsilon)\sqrt{-\gamma^2 - E}|x|} dx < +\infty.$$

5 Continuation

Grâce aux résultats obtenus sur les secteurs, et particulièrement le résultat de localisation des fonctions propres, on espère obtenir des informations sur les valeurs propres d'un Laplacien de Robin défini sur un polygone curviligne convexe ainsi qu'une estimée du type asymptotique de Weyl pour le nombre de valeurs propres lorsque le paramètre $\gamma \to +\infty$. Par ailleurs, l'étude menée sur l'asymptotique des valeurs propres lorsque l'angle devient petit pourrait être menée en dimension supérieure.

Références

[1] V. Bruneau, K. Pankrashkin, N. Popoff : *Eigenvalue counting function for Robin Laplacians on conical domains.* Preprint arXiv :1602.07448.

[2] V. Bruneau, N. Popoff : *On the negative spectrum of the Robin Laplacian in corner domains.* To appear in Anal. PDE., preprint arXiv :1511.08155.

[3] J.-M. Combes, P. Duclos, R. Seiler : *The Born-Oppenheimer approximation.* In G. Velo, A. Wightman (Eds.) : *Rigorous atomic and molecular physics.* Nato Science Series B, Springer, 1981, pages 185–212.

[4] B. Helffer, A. Kachmar : *Eigenvalues for the Robin Laplacian in domains with variable curvature.* To appear in Trans. Amer. Math. Soc., preprint arXiv :1411.2700.

[5] B. Helffer, A. Kachmar, N. Raymond : *Tunneling for the Robin Laplacian in smooth planar domains.* To appear in Commun. Contemp. Math., preprint arXiv :1509.03986.

[6] B. Helffer, K. Pankrashkin : *Tunneling between corners for Robin Laplacians.* J. London Math. Soc. **91** (2015) 225–248.

[7] M. Khalile, K. Pankrashkin : *Eigenvalues of Robin Laplacians in infinite sectors.* Preprint available at `http://arXiv.org/abs/1607.06848`.

[8] M. Levitin, L. Parnovski : *On the principal eigenvalue of a Robin problem with a large parameter.* Math. Nachr. **281** (2008) 272–281.

[9] A. Morame, F. Truc : *Remarks on the spectrum of the Neumann problem with magnetic field in the half-space.* J. Math. Phys. **46** (2005) 1–13.

[10] K. Pankrashkin : *On the asymptotics of the principal eigenvalue for a Robin problem with a large parameter in planar domains.* Nanosyst. Phys. Chem. Math. **4** (2013) 474–483.

[11] K. Pankrashkin : *On the Robin eigenvalues of the Laplacian in the exterior of a convex polygon.* Nanosyst. Phys. Chem. Math. **6** (2015) 46–56.

[12] K. Pankrashkin : *On the discrete spectrum of Robin Laplacian in conical domains.* Math. Model. Nat. Phenom. **11** :2 (2016) 100–110.

[13] K. Pankrashkin, N. Popoff : *Mean curvature bounds and eigenvalues of Robin Laplacians.* Calc. Var. PDE **54** (2015) 1947–1961.

[14] K. Pankrashkin, N. Popoff : *An effective Hamiltonian for the eigenvalue asymptotics of the Robin Laplacian with a large parameter.* To appear in J. Math. Pures Appl., preprint arXiv :1502.00877.

La Régularité partielle des solutions faibles des équations de Navier-Stokes

Kawther Mayoufi
Laboratoire de Mathématiques et Modélisation d'Evry (LaMME) - UMR 8071
Université d'Evry Val d'Essonne, 23 Boulevard de France, 91037 Evry Cedex, France
kawther.mayoufi@univ-evry.fr

Résumé - *Je vais présenter le rôle de la pression dans la théorie de la régularité partielle des solutions faibles des équations de Navier-Stokes. En introduisant la notion de solution dissipative introduite par Duchon et Robert [2], on a stipulé une généralisation de la théorie de Caffarelli, Kohn et Nirenberg. Notre approche donne une nouvelle illumination du rôle de la pression dans cette théorie dans le cadre de critère de régularité locale de Serrin.*

Mots clés - Équations de Navier-Stokes, Régularité partielle des solutions faibles de Leray.

1 Introduction

On considère le problème de Cauchy suivant pour les équations de Navier-Stokes incompressibles, homogènes en dimension 3:

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \nu \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - \vec{\nabla} p + \vec{f}, \quad \mathrm{div}\,(\vec{u}) = 0, \\ \vec{u}(0,x) = \vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3),\ \mathrm{div}\,(\vec{u}_0) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

où $\vec{u}$ représente le champs de vitesse au point $x \in \mathbb{R}^3$ et à l'instant $t \in \mathbb{R}^+$, la viscosité ν est un paramètre positif fixé, Δ est l'opérateur Laplacien définie par l'expression $\Delta = \sum_{n=1}^{3} \frac{\partial_i^2}{\partial x_i^2}$, la force $\vec{f}$ est suffisamment régulière et la pression p est une distribution. Les inconnues sont la vitesse $\vec{u}$ et la pression p, les données sont la force $\vec{f}$ et la donnée initiale $\vec{u}_0$.

J. Leray [3] a prouvé qu'en dimension deux ces équations admettent une solution unique $\vec{u}$ qui satisfait $\vec{u} \in L^\infty([0,T[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0,T[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ pour tout $T > 0$, tandis qu'en dimension trois il a obtenu que l'existence l'unicité reste jusqu'à aujourd'hui un problème ouvert. Ce type de solutions est nommé les solutions faibles de Leray.

Lorsqu'on étudie la régularité partielle des solutions faibles des équations de Navier-Stokes, on a deux grandes théories: la première est celle de Serrin [4] et la deuxième est celle de Caffarelli, Kohn et Nirenberg [1], ces deux dernières sont assez différentes, elles montrent le rôle de la pression dans la régularité des équations de Navier-Stokes.

Théorème 1 (Serrin) *Soit* $Q =]a,b[\times B_{x_0,r}$ *un ensemble borné où* $]a,b[$ *est un intervalle de ligne réelle et* B_{x_0,r_0} *représente la boule Euclidienne* $B_{x_0,r_0} = B(x_0,r_0)$ *avec* $x_0 \in \mathbb{R}^3$ *et* $r > 0$. *Soit de plus* $\vec{f} \in L^2_t H^k_x(Q)$ *pour* $k \geq 0$, *soit* $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x(Q) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(Q)$ *et* $p \in \mathcal{D}'(Q)$; *si on assume que* $\vec{u}$ *est une solution faible des équations de Navier-Stokes (1) sur* Q *et si de plus* $\vec{u} \in L^\infty_t L^\infty_x(Q)$, *alors pour tout* $a < c < b$ *et* $0 < \rho < r_0$ *on a que* $\vec{u} \in L^\infty\big(]c,b[, H^{k+1}(B_{x_0,\rho})\big) \cap L^2\big(]c,b[, \dot{H}^{k+2}(B_{x_0,\rho})\big)$.

Ce type de résultat est nommé la régularité *locale* des solutions faibles de Leray.

Théorème 2 (Caffarelli, Kohn et Nirenberg) *Soit* Q *un domaine borné de* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ *de la forme* $]a,b[\times B_{x_0,r}$. *Soit* $\vec{u}$ *une solution faible des équations de Navier-Stokes sur* Q. *On suppose que:* $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t H^1_x$, $p \in L^{\frac{3}{2}}_t L^{\frac{3}{2}}_x(Q)$, $\vec{f} \in L^{10/7}_t L^{10/7}_x(Q)$ *avec* $div\,\vec{f} = 0$, *on assume aussi que* $1_Q\vec{f} \in \mathcal{M}_2^{10/7,\tau}$ *avec* $\tau > 5/2$, $\vec{u}$ *est adaptée (voir la Définition (1.1)). Il existe une constante positive* $\varepsilon^* > 0$, *qui dépend que de* ν, *telle que, si pour certains points* $(t_0,x_0) \in Q$ *on a l'inégalité*

$$\limsup_{r\to 0} \frac{1}{r} \int\int_{]t_0-r^2,t_0+r^2[\times B_{x_0,r}} |\vec{\nabla}\otimes\vec{u}(t,x)|^2 dt\, dx < \varepsilon^*, \tag{2}$$

alors $\vec{u}$ *est Holderienne en variable de temps et d'espace au voisinage de* (t_0,x_0).

Ce type de résultat est nommé la régularité *partielle* des solutions faibles de Leray. La notion d'adaptabilité est définie comme suit:

Définition 1.1 (Solution adaptée) *Si* $\vec{f}$ *et* p *sont suffisamment régulières pour assurer que les produits* $p\vec{u}$ *et* $\vec{f}\cdot\vec{u}$ *ont un sens comme des distributions, alors la quantité*

$$\mu = -\partial_t|\vec{u}|^2 + \nu\Delta|u|^2 - 2\nu|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2 - \mathrm{div}\,(|\vec{u}|^2\vec{u}) - 2\mathrm{div}\,(p\vec{u}) + 2\vec{f}\cdot\vec{u}, \tag{3}$$

est une mesure locale finie non-négative sur Q.

Une fois qu'on a introduit les deux théories principales de la régularité locale/partielle, on va énoncer notre résultat. Ce dernier est une généralisation des deux théories. En effet on va supposer une pression $p \in \mathcal{D}'(Q)$, mais avec cette hypothèse sur la pression on a que la quantité μ donnée dans la définition (1.1) n'est plus bien définie puisque le produit $p\vec{u}$ n'a pas forcement un sens et ainsi la définition de l'adaptabilité doit être changée.

Définition 1.2 (Solution dissipative) *On suppose* $\vec{f} \in L^{10/7}_t L^{10/7}_x(Q)$ *avec* $Q =]a,b[\times B_{x_0,\rho}$ *où* $x_0 \in \mathbb{R}^3$, $\rho > 0$ *et* $\mathrm{div}\,(\vec{f}) = 0$, *si* $(\vec{u},p)$ *est une solution des équations de Navier–Stokes* $\partial_t\vec{u} = \nu\Delta\vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla}p + \vec{f}$, $\mathrm{div}\,(\vec{u}) = 0$ *sur* Q *avec* $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x(Q) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(Q)$ *et* $p \in \mathcal{D}'(Q)$, *nous dirons qu'une solution* $\vec{u}$ *est* dissipative *si la distribution* M *donnée par l'expression*

$$M = -\partial_t|\vec{u}|^2 + \nu\Delta|\vec{u}|^2 - 2\nu|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2 - \mathrm{div}\,(|\vec{u}|^2\vec{u}) - 2\langle\mathrm{div}\,(p\vec{u})\rangle + 2\vec{f}\cdot\vec{u}, \tag{4}$$

est une mesure locale finie non-négative sur Q.

Où $\langle\mathrm{div}\,(p\vec{u})\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\alpha\to 0} \mathrm{div}\,\big[\big(p*\varphi_{\alpha,\varepsilon}\big)\times\big(\vec{u}*\varphi_{\alpha,\varepsilon}\big)\big]$.

L'existence de cette limite n'est pas absolument triviale mais elle nous permettra de travailler avec la quantité $\langle\mathrm{div}\,(p\vec{u})\rangle$ où la pression p appartient à $\mathcal{D}'(Q)$.

1.1 Le résultat principal

Théorème 3 *Soit $\nu > 0$ un paramètre fixé. Soit $Q =]a,b[\times B_{x,\rho}$ un domaine borné de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ et soit $(\vec{u},p)$ solution faible des équations de Navier-Stokes sur Q*

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \nu\Delta\vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla}p + \vec{f}, \quad div(\vec{u}) = 0, \\ \vec{u}(0,x) = \vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3),\ div(\vec{u}_0) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

On suppose que: $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x(Q) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(Q)$ et $p \in \mathcal{D}'(Q)$, $\vec{f} \in L^2_t H^1_x(Q)$, $\vec{u}$ est dissipative dans le sens de la Définition 1.2 donnée ci-dessus. Il existe une constante positive $\varepsilon^* > 0$, qui dépend que de ν, telle que, si pour certains points $(t_0,x_0) \in Q$ on a l'inégalité

$$\limsup_{r\to 0} \frac{1}{r} \iint_{]t_0-r^2,t_0+r^2[\times B_{x_0,r}} |\vec{\nabla}\otimes\vec{u}(t,x)|^2 dt\,dx < \varepsilon^*, \tag{6}$$

alors la solution $\vec{u}$ est bornée au voisinage de (t_0,x_0). En particulier le point (t_0,x_0) est régulier.

2 Références

Rfrences

[1] L. Caffarelli, R. Kohn & L. Nirenberg. *Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations.* Comm. Pure Appl. Math., 35:771-831 (1982).

[2] J. Duchon & R. Robert. *Inertial energy dissipation for weak solutions of incompressible Euler and Navier-Stokes equations.* Nonlinearity, 13:249-255 (2000).

[3] J. Leray. *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace.* J. Acta Math, 63:193 (1934).

[4] J. Serrin. *On the interior regularity of weak solutions of the Navier-Stokes equations.* Arch. Rat. Mech. Anal., 9:187-195 (1962).

Arbres décoiffés — la dynamique du wind-tree...

Alba Marina MÁLAGA SABOGAL (alba.malaga@albamath.com)

21 octobre 2016

Résumé:

Le wind-tree est un exemple de système dynamique qui possède une description très simple en même temps qu'une dynamique très riche. C'est un cas particulier de billard: on a une particule qui se déplace (*le vent*) tant qu'elle ne rencontre pas d'obstacle (*les arbres*) et qui rebondi élastiquement sur chaque obstacle rencontré. Il y a une infinité d'obstacles repartis irrégulièrement sur le plan. La dynamique dépendra fortement de la distribution des obstacles. Les différentes configurations vivent dans un espace de Baire — on peut donc se demander ce qui arrive pour une configuration générique (c'est-à-dire appartenant à un ensemble G_δ-dense de configurations).
Ceci est un travail en collaboration avec Serge Troubetzkoy.

Matrices de diffusion et torsion analytique

Martin Puchol

On considère une variété compacte ayant une partie isométrique à un cylindre fini, et on fait tendre la longueur de ce cylindre vers l'infini. On étudie alors l'asymptotique du spectre du Laplacien de Hodge et de la métrique L^2 de la cohomologie de de Rham de cette variété "étirée". Ces asymptotiques font intervenir des matrices de diffusions. Comme application, on donne une nouvelle démonstration, purement analytique, de la formule de recollement pour la torsion analytique. Un intérêt de cette preuve réside dans les perspectives qu'elle ouvre, contrairement à la preuve originelle, pour traiter la question parallèle (et plus générale) pour les formes de torsion analytique, question qui reste ouverte depuis 2003.

Institut Camille Jordan - Université Lyon 1
http://puchol.perso.math.cnrs.fr/index.html
martin.puchol@math.cnrs.fr

BUBBLING COMPLEX PROJECTIVE STRUCTURES WITH QUASI-FUCHSIAN HOLONOMY

LORENZO RUFFONI

Abstract. For a given quasi-Fuchsian representation $\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}_2\mathbb{C}$ of the fundamental group of a surface S of genus $g \geq 2$, we prove that a generic branched complex projective structure on S with holonomy ρ and two branch points is obtained by bubbling some unbranched structure on S with the same holonomy.

Contents

1. Introduction 1
2. Branched complex projective structures 3
2.1. Grafting 5
2.2. Bubbling 6
2.3. Movements of branch points 7
2.4. Injectively developed isotopies 9
3. Geometric decomposition in quasi-Fuchsian holonomy 12
3.1. Locating branch points 15
3.2. Classification of components for BPSs with $k = 2$ branch points 18
4. BM-configurations 22
4.1. Standard BM-configurations 23
4.2. Taming developed images and avatars 25
4.3. Visible BM-configurations 28
5. Bubbles everywhere 31
5.1. Walking around the moduli space with bubblings 38
References 39

1. Introduction

A complex projective structure on a surface S is a geometric structure locally modelled on the geometry of the Riemann sphere $\mathbb{CP}^1$ with its group of holomorphic automorphisms $\mathrm{PSL}_2\mathbb{C}$. Since $\mathbb{H}^2, \mathbb{E}^2$ and $\mathbb{S}^2$ admit models in $\mathbb{CP}^1$, these structures generalise the classical setting of constant curvature geometries; in particular, structures with (quasi-)Fuchsian holonomy play a central role in the theory of (simultaneous) uniformization of Riemann surfaces of genus $g \geq 2$ (see [10],[1]).

If $\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}_2\mathbb{C}$ is a quasi-Fuchsian representation, the quotient of the domain of discontinuity of ρ by the image of ρ is endowed with a natural complex projective structure σ_ρ with holonomy ρ, namely a hyperbolic structure. A natural

Petit guide pour les auteurs

Kamilia DAHMANI
Doctorante à l'Université Paul Sabatier, sous la direction du Pr Stefanie Petermichl
Toulouse, France.
kamilia.dahmani@gmail.com

Résumé - *En utilisant une fonction de Bellman explicite, on démontre un résultat bilinéaire lié au Laplacien associé à une variété Riemannienne compacte à poids (X, μ_φ) et à courbure de Bakry-Emery positive. Ce résultat implique une estimation à poids de la transformée de Riesz en norme L^2, indépendante de la dimension de la variété.*

Mots clés - Transformée de Riesz, Méthode de Bellman, Courbure de Bakry-Emery.

1 Introduction

La méthode de Bellman est une technique d'analyse harmonique ayant pour but de démontrer des inégalités et plus particulièrement des estimations dans L^p. Etant originellement introduite en théorie du contrôle, elle a été développée par Nazarov, Treil et Volberg dans les années 90 et a très rapidement connu un essor dans le milieu de l'analyse harmonique.

Soit (X, μ) une variété Riemannienne compacte. Etant donnée $\varphi \in C^2(X)$, on considère la mesure à poids $d\mu_\varphi(x) = e^{-\varphi(x)}d\mu(x)$, la courbure de Bakry-Emery $\mathrm{Ric}_\varphi = \mathrm{Ric} + \nabla^2\varphi$ ainsi que le Laplacien

$$\Delta_\varphi f = \Delta f - \nabla f.\nabla\varphi, \ f \in C_c^\infty(X).$$

Nous pouvons à présent définir les semi-groupes de Poisson

$$P_t = \exp(-t(-\Delta_\varphi)^{1/2}) \text{ et } \vec{P}_t = \exp(-t(-\vec{\Delta}_\varphi)^{1/2}),$$

où $\vec{\Delta}_\varphi$ est le Laplacien de Hodge-De Rham agissant sur les $1-$formes différentielles.
On considère enfin des poids ω tels que ω et ω^{-1} appartiennent à $C^\infty(X, \mu_\varphi) \cap L^2(X, \mu_\varphi)$. On s'intéresse plus précisément dans ce travail à une certaine classe de poids nommée classe de Poisson A_2 et notée $\widetilde{A}_2$. On dira que $\omega \in \widetilde{A}_2$ si et seulement si

$$\widetilde{Q}_2(\omega) := \sup_{(x,t)\in X\times\mathbb{R}_+} P_t(\omega)(x)P_t(\omega^{-1})(x) < \infty.$$

1.1 Résultats

Théorème 1 *Soit (X, μ_φ) une variété Riemannienne compacte telle que $\mathrm{Ric}_\varphi \geq 0$, $\omega, \omega^{-1} \in L^2(X, \mu_\varphi) \cap C^\infty(X, \mu_\varphi)$ et $\omega > 0$ p.p. Alors pour tous $f \in C_c^\infty(X)$ et $\vec{g} \in C_c^\infty(T^*X)$, on a*

$$\int_0^\infty \int_X |\nabla P_t f(x)||\nabla \vec{P}_t \vec{g}(x)| t \, d\mu_\varphi(x)dt \lesssim \widetilde{Q}_2(\omega)\|f\|_{L^2(X,\omega\mu_\varphi)}\|\vec{g}\|_{L^2(T^*X,\omega^{-1}\mu_\varphi)}.$$

Ce résulat est optimal en fonction de la puissance de $\widetilde{Q}_2$.

Soit $\mathcal{R}_\varphi$ la transformée de Riesz définie sur $L^2(T^*X)$ par

$$\mathcal{R}_\varphi = d \circ (-\Delta_\varphi)^{-1/2}.$$

On a le résultat suivant :

Corollaire 1 *Sous les mêmes conditions,*

$$\|\mathcal{R}_\varphi f\|_{L^2(T^*X,\omega\mu_\varphi)} \lesssim \widetilde{Q}_2(\omega)\|f\|_{L^2(X,\omega\mu_\varphi)},$$

pour tout $f \in \overline{L^2(X,\omega\mu_\varphi) \cap R(-\Delta_\varphi)}^{L^2}$.

Références

[1] A.Carbonaro, O.Dragicevic, Bellman functions and linear dimension-free estimates in a theorem of Bakry, arXiv :1105.6330v3 [math.FA] (2013).

[2] K.Domelevo, S.Petermichl, Differential subordination under change of law, arXiv :1604.01606 (2016).

[3] S.Petermich, J.Wittwer, A sharp estimate for the weighted Hilbert transform via Bellman functions, Michigan Math. J. 50 (2002).

Bonsoir,

Je voulais postuler sur une participation avec financement dans le 16ème Forum des Jeunes Mathématicien-ne-s à Strasbourg, prévu pour les 24-25 novembre 2016.

Je suis actuellement un invité à l'Albert Einstein Institute au Max-Planck Institute à Potsdam en Allemagne jusqu'à fin décembre 2016. Merci de bien vouloir trouver mon CV en fichier PDF ci-joint.

Je propose une communication de 25 minutes avec le titre suivant : La décroissance des champs de Yang-Mills SU(2) sur le trou noir de Schwarzschild pour des données initiales à symétrie sphérique avec petite énergie.

Le résumé de la communication proposée est le suivant :

D'abord, je vais présenter les équations de Yang-Mills sur des espaces-temps courbes arbitraires à valeurs dans une algèbre de Lie quelconque. Puis, je vais présenter des résultats récents avec Dietrich Häfner concernant la décroissance des champs de Yang-Mills sur le trou noir de Schwarzschild à valeurs dans l'algèbre de Lie su(2) associée au groupe de Lie SU(2). Nous supposons que les données initiales sont à symétrie sphérique, satisfaisant une certaine Ansatz, et avec une petite énergie. Nous montrons des estimées de décroissance uniformes sur une norme invariante par les transformations de gauge, pour des solutions générées par des telles données initiales, dans tout l'extérieur du trou noir, y compris l'horizon. Cela est accompli en prouvant une estimée de type Morawetz plus forte que celle qui était supposée dans un travail antérieur, sans passer par l'équation d'onde scalaire sur la courbure de Yang-Mills, en utilisant les équations de Yang-Mills directement.

Je reste à votre disposition pour toute information supplémentaire dont vous auriez besoin.

Veuillez recevoir l'expression de mes sentiments les meilleurs.

Très cordialement,
Sari

ON ISOMORPHISMS OF BEURLING GROUP ALGEBRAS

SAFOURA ZADEH

One of the most fundamental objectives in all areas of mathematics is to describe the general form of the maps that preserve the basic structure of the objects being investigated. In abstract harmonic analysis (a branch of harmonic analysis that deals with analysis on topological groups), the first paper studying this question is due to J. G. Wendel [5]. Wendel proved that if G and H are locally compact topological groups and $T : L^1(G) \to L^1(H)$ is an isometric isomorphism of the group algebras $L^1(G)$ and $L^1(H)$, then the topological groups G and H are isomorphic. In this paper, Wendel also mentioned that, in general, the algebra structure of a group algebra does not necessarily determine its underlying topological group structure. So, if only the existence of an algebra isomorphism between group algebras is assumed, then the underlying topological groups are isomorphic only if we impose some constraints for instance on the norm of the isomorphism (such as being an isometry, contractive or of small bound) or if we consider some special isomorphism such as a bipositive one. In this talk I will discuss similar results for group algebras with a weight, the so called Beurling group algebras.

References

[1] B. E. Johnson, *Isometric isomorphisms of measure algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 15 (1964), 186–188.

[2] Y. Kuznetsova and C. Molitor-Braun, *Harmonic analysis of weighted L^p-algebras*, Expo. Math., Vol. 30 (2012), no. 2, 124–153.

[3] R. S. Strichartz , *Isomorphism of group algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966), 858–862.

[4] N. J. Kalton and G. V. Wood, Homomorphisms of group algebras with norm less than $\sqrt{2}$. Pacific J. Math. 62 (1976), no. 2, 439–460.

[5] J. G. Wendel,*On isometric isomorphism of group algebras*, Pacific J. Math., Pacific Journal of Mathematics, Vol. 1 (1951), 305–311.

[6] S. Zadeh, *On Isometric Isomorphisms of Beurling Algebras*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 438 (2016), no. 1, 1–13.

[7] F. Ghahramani and S. Zadeh, *Bipositive isomorphism of Banach algebras associated with locally compact groups*, to appear in Canadian Journal of Mathematics, 2016.

Laboratoire Mathématiques de Besançon, Universite de Franche-Comte,

E-mail address: jsafoora@gmail.com