

# Sharp interface limit of an Allen-Cahn equation with conservation of the mass

Matthieu Alfaro and Pierre Alifrangis,

I3M, Université de Montpellier 2,  
CC051, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier Cedex 5, France.

## Abstract

We consider an Allen-Cahn equation with conservation of the mass with a sharp interaction between local and nonlocal terms. As a parameter related to the thickness of a diffuse internal layer tends to zero, we prove the convergence to a volume preserving mean curvature flow, under the assumption that classical solutions of the latter exist.

Key Words: mass conserved Allen-Cahn equation, singular perturbation, volume preserving mean curvature flow, matched asymptotic expansions. <sup>1</sup>

## Abstract

In this paper we consider  $u^\varepsilon = u^\varepsilon(t, x)$  the solution of an Allen-Cahn equation with conservation of the mass, namely

$$\partial_t u^\varepsilon = \Delta u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} \left\{ f(u^\varepsilon) - \frac{\sqrt{4W(u^\varepsilon)}}{\int_\Omega \sqrt{4W(u^\varepsilon)}} \int_\Omega f(u^\varepsilon) \right\} \quad \text{in } (0, \infty) \times \Omega, \quad (0.1)$$

supplemented with the homogeneous Neumann boundary conditions and the initial conditions  $u^\varepsilon(0, x) = u_{0,\varepsilon}(x)$  in  $\Omega$ . with  $\Omega$  a smooth bounded domain in  $\mathbb{R}^N$ . The small parameter  $\varepsilon > 0$  related to the thickness of a diffuse interfacial layer and we are concerned with the behavior of  $u^\varepsilon$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

The nonlinearity is given by  $f(u) := -W'(u)$ , where  $W(u)$  is a double-well potential with equal well-depth, taking its global minimum value at  $u = \pm 1$ .

We will show that the solution of the Allen-Chan equation with conservation of the mass (0.1) converges, as  $\varepsilon \rightarrow 0$ , to the step function

$$\tilde{u}(t, x) := \begin{cases} +1 & \text{in } \Omega_t^+ \\ -1 & \text{in } \Omega_t^- \end{cases} \quad \text{for all } t \in (0, T], \quad (0.2)$$

---

<sup>1</sup>AMS Subject Classifications: 35K57, 35B25, 35C20, 53A10.

where  $\Omega_t^-$  denotes the region enclosed by  $\Gamma_t$  and  $\Omega_t^+$  is the region enclosed between  $\partial\Omega$  and  $\Gamma_t$ . Here  $\Gamma = \cup_{0 \leq t \leq T} \Gamma_t \times \{t\}$  denotes the unique solution of the volume preserving mean curvature flow

$$V_n = -\kappa + \frac{1}{|\Gamma_t|} \int_{\Gamma_t} \kappa dH^{n-1} \quad \text{on } \Gamma_t, \quad (0.3)$$

starting from a smooth hypersurface  $\Gamma_0$ . Where  $V_n$  denotes the velocity of each point of  $\Gamma_t$  in the normal exterior direction and  $\kappa$  the mean curvature.

The idea is to first construct solutions  $u_k^\varepsilon$  of an approximate problem thanks to matched asymptotic expansions. Next, using the lower bound of a linearized operator around such constructed solutions, an estimate of the error  $\|u^\varepsilon - u_k^\varepsilon\|_{L^2}$  is obtained.

## References

- [1] M. Alfaro, D. Hilhorst and H. Matano, *The singular limit of the Allen-Cahn equation and the FitzHugh-Nagumo system*, J. Differential Equations **245** (2008), 505–565.
- [2] E. Bretin and M. Brassel, *A modified phase field approximation for mean curvature flow with conservation of the volume*, submitted.
- [3] X. Chen, *Spectrums for the Allen-Cahn, Cahn-Hilliard, and phase field equations for generic interface*, Comm. Partial Differential Equations **19** (7–8) (1994), 1371–1395.
- [4] X. Chen, D. Hilhorst et E. Logak, *Mass conserved Allen-Cahn equation and volume preserving mean curvature flow*, submitted.
- [5] P. de Mottoni and M. Schatzman, *Geometrical evolution of developed interfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), 1533–1589.

# Formes différentielles discrètes basées sur les splines

Aurore BACK, IRMA, Université de Strasbourg et CNRS

Eric SONNENDRUCKER, IRMA, Université de Strasbourg et CNRS

**Mots-clés** : formes différentielles discrètes, B-splines, analyse isogéométrique, Maxwell, simulation numérique.

Les équations de la physique sont des modèles mathématiques qui mettent en relations des objets géométriques. Nombreuses sont les méthodes de discrétisation de ces équations, mais peu préservent la nature physique des différents objets qui les constituent. Afin de conserver la nature géométrique des éléments de la physique, il est indispensable de changer de point de vue et d'utiliser la géométrie différentielle, y compris pour l'étude numérique. Alain Bossavit [1] est le précurseur de ce concept. Il utilise les éléments de Whitney [2] pour discrétiser les formes différentielles et donc, discrétiser les équations de Maxwell dans le langage de la géométrie différentielle.

On propose de construire les formes différentielles discrètes à l'aide des fonctions B-splines. Les équations géométriques discrètes sont alors dites lagrangiennes, c'est-à-dire qu'il n'y pas de référence à un système de coordonnées: la construction du schéma approximatif reste valide dans le cas d'un changement de coordonnées. L' utilisation de ces nouvelles fonctions s'est avérée puissante en ce sens que le fait de monter en ordre se fait par récurrence. C'est donc facile à implémenter. De plus, il est apparu que ce procédé rejoint l'analyse isogéométrique. On appliquera ce formalisme sur les équations de Maxwell géométrisées avec des conditions aux bords périodiques, avec des conditions aux bords de type conducteur parfait et également dans le cas d'un changement de variables.

## Références

- [1] BOSSAVIT, ALAIN, *Electromagnetism, from the point of view of numerical modeling*, Springer-Verlag, 1993.
- [2] RAPETTI, FRANCESCA ET BOSSAVIT, ALAIN, *Whitney forms of higher degree*, SIAM J. Numer. Anal., 47, 2009.

Aurore BACK, Irma, Université de Strasbourg, 7 rue René Descartes, 67000 Strasbourg  
aurore.back@math.unistra.fr

Eric SONNENDRUCKER, Irma, Université de Strasbourg, 7 rue René Descartes, 67000 Strasbourg  
sonnen@math.unistra.fr

# Modélisation tridimensionnelle pour les Alliages à Mémoire de Forme Magnétiques

Anne-Laure Bessoud

Les matériaux à mémoire de forme ont des applications très diverses (actionneurs, capteurs, robotique, appareils de fixation, etc...) et sont utilisés dans de nombreux domaines, en particulier le domaine bio-medical. La modélisation de ces matériaux constitue un enjeu important. Un des objectifs du travail présenté est de proposer un modèle phénoménologique tri-dimensionnel pour les matériaux à mémoire de forme (ferro)magnétiques (MSMAs). Ceci consiste en l'élaboration du modèle d'une part et sa validation par des simulations numériques [1, 2], puis en l'analyse mathématique [3].

Le modèle considéré rentre dans le cadre des problèmes d'évolution quasi-statique (rate-independent problems). En particulier, nous nous intéressons à un modèle phénoménologique formulé à l'aide de variables internes, initialement proposé par Souza *et al.* [7], puis amélioré par Auricchio et Petrini [4, 5], reconnu pour sa bonne capacité à décrire le comportement phénoménologique des matériaux à mémoire de forme (SMAs) malgré sa simplicité. Les MSMAs sont une classe particulière de SMAs capables de subir des déformations importantes par l'application d'un champ magnétique extérieur. Ceci est dû à la nature ferromagnétique de la phase martensite de ces matériaux. Le modèle proposé est obtenu en ajoutant au modèle de Souza-Auricchio une contribution magnétique, correspondant à l'énergie de Zeeman.

Le tenseur des déformations linéarisé  $\varepsilon(u) := \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla^T u)$  est décomposé en sa partie élastique  $\varepsilon_{el}$ , et  $z$ , sa partie inélastique (ou transformation) :  $\varepsilon = \varepsilon_{el} + z$ . On suppose que la magnétisation  $M$  du matériau est liée à la déformation inélastique  $z$  par la relation  $M = \alpha \mathcal{A}z$ , où  $\alpha$  est un scalaire qui décrit l'orientation locale de la magnétisation. L'énergie de Gibbs (on néglige ici les effets de la température qui est supposée constante) est définie par :

$$G(\sigma, H, z, \alpha) := -\frac{1}{2}\sigma:\mathbf{C}^{-1}:\sigma - \sigma:z + F_{SA}(z) + \frac{1}{2\delta}\alpha^2 + I_{[-1,1]}(\alpha) - \mu_0 H \cdot \alpha \mathcal{A}z. \quad (1)$$

La fonction  $F_{SA}$ , convexe et coercive, fait référence aux différents termes qui interviennent dans le modèle de Souza-Auricchio,  $H$  est le champ magnétique interne.

Si aucune dissipation n'est associée à la variable  $\alpha$ , cette dernière peut être éliminée et l'évolution de  $z$  est alors donnée en fonction de la contrainte  $\sigma$  et du champ magnétique  $H$  par la relation :

$$\partial D(\dot{z}) + \partial F_{SA}(z) \ni \sigma + \partial_z F_M(H \cdot \mathcal{A}z), \quad (2)$$

où  $D$  est la dissipation associée à  $z$  et  $z \mapsto F_M(H \cdot \mathcal{A}z)$  est une fonction continue. L'analyse du problème d'évolution (en dimension finie) (2) permettant de déterminer l'existence de solutions repose sur une formulation faible. En particulier, on utilise la formulation énergétique proposée par Mielke [6], qui consiste en une condition de stabilité et une condition d'équilibre énergétique. Plus précisément, étant donné  $\sigma \in W^{1,1}(0, T; \mathbb{R}^{3 \times 3})$ ,  $H \in W^{1,1}(0, T; \mathbb{R}^3)$  et  $z_0$  une donnée initiale convenable,  $t \mapsto z(t)$  est une *solution énergétique* de l'équation d'évolution (2) si  $z(0) = z_0$  et vérifie, pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$(S) \quad F_{SA}(z(t)) - F_M(H(t) \cdot \mathcal{A}z(t)) - \sigma(t):z(t) \\ \leq F_{SA}(\hat{z}) - F_M(H(t) \cdot \mathcal{A}\hat{z}) - \sigma(t):\hat{z} + D(z(t), \hat{z})$$

$$(E) \quad F_{SA}(z(t)) - F_M(H(t) \cdot \mathcal{A}z(t)) - \sigma(t):z(t) + \text{Diss}_D(z, [0, t]) \\ = F_{SA}(z_0) - F_M(H(0) \cdot \mathcal{A}z_0) - \sigma(0):z_0 - \int_0^t \partial_t(\dot{\sigma}(s):z(s) + F'_M(H(s) \cdot \mathcal{A}z(s))\dot{H}(s) \cdot \mathcal{A}z(s)) \, ds$$

pour tout  $\hat{z}$ . La preuve de l'existence d'une solution se fait par une discrétisation en temps du problème. En utilisant la méthode du calcul des variations, on montre que le problème discrétisé possède une

solution. Alors, en adaptant la théorie proposée par Mielke [6], on montre que la solution du problème discrétisé converge vers une solution faible du problème d'évolution.

De même, l'analyse du problème d'évolution quasi-statique (en dimension infinie), qui est obtenu en couplant les relations constitutives du modèle obtenues à partir de l'énergie de Gibbs  $G$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \partial D(\dot{z}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial_\sigma G(\sigma, H, z) \\ \partial_z G(\sigma, H, z) \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} -\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

avec l'équation d'équilibre  $-\operatorname{div} \sigma = f$ , est basée sur la formulation énergétique. L'énergie considérée est alors donnée par une fonctionnelle  $\mathcal{W} : [0, T] \times \mathcal{U} \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(t, u, z) := & \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\varepsilon(u) - z) : \mathbf{C} : (\varepsilon(u) - z) \, dx + \int_{\Omega} F_{\text{SA}}(z) \, dx + \operatorname{Var}(z) \\ & - \int_{\Omega} F_{\text{M}}(H(t) \cdot \mathcal{A}z) \, dx - \langle \ell(t), u \rangle, \end{aligned}$$

et la dissipation par la fonctionnelle  $\mathcal{D} : L^1(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3}) \times L^1(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3}) \rightarrow [0, \infty)$ ,

$$\mathcal{D}(a, b) := \int_{\Omega} D(a - b) \, dx.$$

En parallèle avec l'analyse mathématique, des essais numériques sont réalisés afin de valider le modèle.

## Références

1. F. Auricchio, A.-L. Bessoud, A. Reali and U. Stefanelli. A phenomenological model for ferromagnetism in shape-memory materials, en préparation.
2. F. Auricchio, A.-L. Bessoud, A. Reali and U. Stefanelli. Macroscopic modeling of magnetic shape-memory alloys. Oberwolfach Report, 14 (2010), 1:771-773.
3. A.-L. Bessoud and U. Stefanelli. Magnetic Shape Memory Alloys: three-dimensional modeling and analysis. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, (2010), à paraître.
4. F. Auricchio and L. Petrini. Improvements and algorithmical considerations on a recent three-dimensional model describing stress-induced solid phase transformations, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 55 (2002) 1255–1284.
5. F. Auricchio and L. Petrini. A three-dimensional model describing stress-temperature induced solid phase transformations: Solution algorithm and boundary value problems. *Internat. J. Numer. Meth. Engrg.*, 61 (2004), 807-836.
6. A. Mielke. *Evolution in rate-independent systems (ch. 6)*. In C. Dafermos and E. Feireisl, editors, Handbook of Differential Equations, Evolutionary Equations, **2**, 461-559. Elsevier B.V., 2005.
7. A. C. Souza, E. N. Mamiya and N. Zouain. Three-dimensional model for solids undergoing stress-induced transformations. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 17 (1998), 789-806.

# Optimisation de traitements anti-cancéreux

Alice Erlinger

19 septembre 2010

**Stage effectué au LATP de Marseille sous la direction de  
G. Chapuistat et F. Hubert**

Le traitement médical des cancers utilise de plus en plus la combinaison d'une chimiothérapie cytotoxique classique, destinée à détruire les cellules cancéreuses, et d'un médicament anti-angiogénique, qui inhibe la vascularisation de la tumeur et la prive ainsi des éléments nutritifs indispensables à sa croissance. Il n'est pas possible en pratique de déterminer empiriquement la posologie optimale des deux médicaments, c'est-à-dire celle qui a le maximum d'effets antitumoraux et le minimum d'effets indésirables. Le but de notre travail a été d'établir et de tester l'applicabilité d'un modèle mathématique pour calculer à la fois la dose optimale et le meilleur moment d'administration de chacun des médicaments.

Nous avons étendu le modèle utilisé par Barbolosi et. al. pour une chimiothérapie unique [1]. Cela nous a conduit à un système simple d'équations différentielles ordinaires. Après avoir démontré l'existence des solutions, ajusté les paramètres, et résolu numériquement les équations, nous avons mis en place un algorithme d'optimisation sous contraintes (contraintes de toxicité) destiné à trouver la posologie optimale.

La détermination *in silico* de posologies d'administration pour des traitements complexes pourrait améliorer sensiblement les traitements anti-cancéreux.

## Références

- [1] Barbolosi Dominique, Freyer Gilles, Ciccolini Joseph, and Athanassios Iliadis. Optimisation de la posologie et des modalités d'administration des agents cytotoxiques à l'aide d'un modèle mathématique. *Bulletin du Cancer*, 90(2) :167–75, Février 2003.
- [2] Hahnfeldt Philip, Panigraphy Dipak, Folkman Judah, and Hlatky Lynn. Tumor development under angiogenic signaling : A dynamical theory of tumor growth, treatment response, and postvascular dormancy. *Cancer Research*, 75(59) :4770–4775, October 1999.

- [3] d'Onofrio Alberto and Gandolfi Alberto. Tumor eradication by antiangiogenic therapy : analysis and extensions of the model by hahnfeldt et al. (1999). *Mathematical Biosciences*, 191 :159–184, 2004.
- [4] Lu Jian-Fend, Bruno René, Eppler Steve, Novotny William, Lum Bert, and Gaudreault Jacques. Clinical pharmacokinetics of bevacizumab in patients with solid tumors. *Cancer Chemother Pharmacol*, 62 :779–786, 2008.

# Normalisation d'un système différentiel, une application au découplage d'oscillateurs non résonnants.

Tiphaine Jézéquel

## Résumé :

Quand on étudie un système différentiel au voisinage d'un point d'équilibre, la première étape est en général d'étudier le système linéarisé au voisinage de ce point. On connaît alors tout du système linéarisé dès lors qu'on arrive à le mettre sous forme de Jordan : c'est une "normalisation" par changement de variable linéaire de la partie linéaire du système. Poincaré a eu l'idée de généraliser cette méthode en étudiant le développement limité du champs de vecteur au voisinage d'un point d'équilibre: on se retrouve alors à normaliser par changement de variable polynomial la partie polynomiale du système. A condition de trouver aussi des estimations du reste (= le grand O du développement limité), on obtient alors des informations supplémentaires que la seule étude du linéarisé ne suffisait pas à trouver.

Dans mon exposé, je décrirai les deux théorèmes de normalisation de systèmes différentiels que j'ai démontrés dans le cadre de ma thèse.

Je détaillerai plus particulièrement la première de ces normalisations avec ses conséquences : elle a pour but de "presque" découpler (je détaillerai ce qu'il y a derrière le "presque") un système en deux ensembles séparés de variables. J'ai démontré ce résultat dans le but d'adapter les théorèmes existants à un cas rencontré en physique des vibrations. Le cas le plus basique auquel mon résultat s'applique est celui de 2 pendules simples couplés A et B de périodes propres non commensurables: si on leur applique un petit forçage périodique d'une période résonnant avec celle de A, alors au voisinage de l'équilibre, le mouvement de A ne dépendra "presque" plus de celui de B.

[1] Arnold, V. (1978). *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag, New-York.

[2] Chossat, P., and Iooss, G. (1994). The Couette-Taylor problem. *Appl.Math. Sci.* 102.

[3] Elphick, C., Tirapegui, E., Brachet, M.E., Couillet, P., and G.Iooss.(1987). A simple global characterization for normal forms of singular vector fields. *Physica D* 29, 95-127.

[4] Guckenheimer, J., and Holmes, P. (1983). *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*. Applied Mathematical Science, vol.42, Springer, Berlin, Heidelberg, New York.

[5] Haragus, M., and Iooss, G. (2010). *Local bifurcations, center manifolds, and normal forms in infinite dimensional dynamical systems*. Springer Verlag, to appear.

[6] Iooss, G., and Adelmeyer, M. (1992). *Topics in Bifurcation Theory and Applications*. Advanced Series in Nonlinear Dynamics, vol. 3, World Scientific, Singapore.

- [7] Iooss, G., and Lombardi, E. (2010). Approximate invariant manifolds up to exponentially small terms. *J. Differential Equations* 248, 14101431.
- [8] Iooss, G., and Lombardi, E. (2005). Polynomial normal forms with exponentially small remainder for analytic vector fields. *J. Differential Equations* 212, 1-61.
- [9] Iooss, G., and Pérouème, M.C. (1993). Perturbed homoclinic solutions in 1:1 resonance vector fields. *J. Differential Equations* 102(1).
- [10] Kelley, A. (1967). The stable, center-stable, center, center-unstable, unstable manifolds. *J. Differential Equations* 3, 546-570. 39
- [11] Kolmogorov, A.N. (1954). On conservation of conditionally periodic motions under small perturbation of the hamiltonian. *Dokl. Akad. Nauk, SSSR*, 98:527-530.
- [12] Lombardi, E. (2000). *Oscillatory Integrals and Phenomena Beyond all Algebraic Orders*. Lecture Notes in Mathematics vol.1741. Springer.
- [13] Nekoroshev, N.N. (1977). An exponential estimate of the time of stability of nearly integrable Hamiltonian systems, I. *Usp. Mat. Nauk* 32 (1997) 5-66 *Russ. Math. Surv.* 32 (1977) 1-65.
- [14] Nekoroshev, N.N. (1979). An exponential estimate of the time of stability of nearly integrable Hamiltonian systems, II. *Tr. Semin. Petrovsk.* 5 (1979) 5-50 in: O.A. Oleineik (Ed.), *Topics in Modern Mathematics, Petrovskii Semin.*, no.5. Consultant Bureau, New York, 1985.
- [15] Poschel, J. (1993). Nekoroshev Estimates for Quasi-convex Hamiltonian Systems. *Math. Z.* 213 187-216. [16] Touzé, C., and Amabili, M. (2006). Nonlinear normal modes for damped geometrically nonlinear systems: Application to reduced-order modelling of harmonically forced structures. *Journal of Sound and Vibration* 298, 958-981.

Damien LANDON

### Probabilité de distribution des spikes dans le modèle de FitzHugh Nagumo

Le modèle le plus connu pour modéliser le potentiel d'action d'un neurone est le modèle d'Hodgkin-Huxley. Ce modèle est un système d'équations différentielles stochastiques de dimension quatre. Nous pouvons avoir des résultats numériques mais il est plus difficile d'avoir des résultats analytiques. Nous nous intéresserons ici au modèle de FitzHugh-Nagumo qui est une simplification du modèle d'Hodgkin-Huxley à deux dimensions :

$$\begin{cases} \varepsilon dx_t = \left( x_t - \frac{x_t^3}{3} + y_t \right) dt + \sqrt{\varepsilon} \sigma dW_t \\ dy_t = (\alpha - \beta x_t - \gamma y_t) dt \end{cases} \quad (\text{FHN})$$

où  $x$  est la variable rapide qui représente le potentiel d'action,  $y$  est la variable lente,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont des variables positives,  $\varepsilon$  est un petit paramètre positif ( $\varepsilon \ll 1$ ),  $\sigma$  un petit paramètre positif qui représente l'intensité du mouvement Brownien  $W$ .

Dans un premier temps, nous étudions le système déterministe associé dans le cas  $\beta = 1$  et  $\gamma = 0$ . Le système a un point d'équilibre qui, suivant les valeurs de  $\alpha$ , est stable ou instable. Quand le point d'équilibre est instable, la trajectoire, en coordonnées  $(x, y)$ , tend vers un cycle limite. Quand il est stable, nous avons une trajectoire en spirale autour du point.

Ensuite, nous observons le comportement de la solution quand on rajoute le bruit dans le cas où le point d'équilibre est stable. Nous avons alors trois cas suivant l'intensité du bruit :

- - si le bruit est faible, nous avons des petits tours autour du point d'équilibre
- - si le bruit est un peu plus élevé, nous avons des petits tours autour du point d'équilibre et de temps en temps la trajectoire sort du voisinage du point d'équilibre pour faire un grand tour proche du cycle limite.
- - si le bruit est fort, nous avons des grands tours proche du cycle limite du cas déterministe.

Il correspond trois régimes différents pour le potentiel d'action  $x$  en fonction du temps :

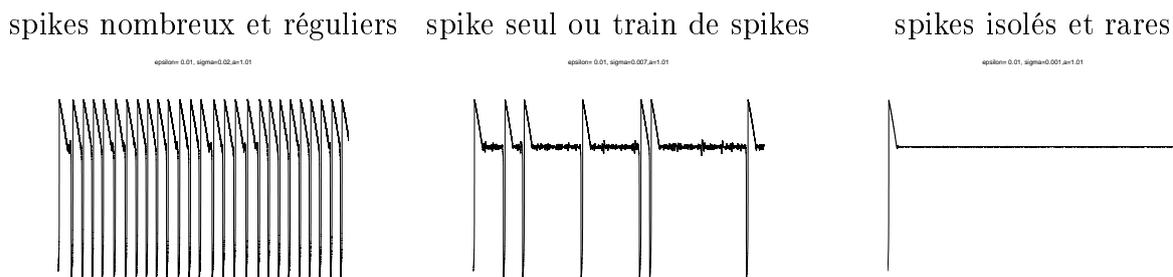


FIGURE 1 – Trois principaux régimes du potentiel de membrane

Finalement, le message nerveux étant codé par la fréquence des spikes. Nous nous intéressons à la distribution de la probabilité du temps entre deux spikes. Nous nous plaçons dans le cas particulier où  $\beta = 0$  et  $\gamma = 1$  dans l'équation (FHN). Le système est alors découplé et nous

pouvons ramener l'étude à celle d'une équation différentielle stochastique de dimension un.

$$dx_t = -\frac{1}{\varepsilon}V'(x_t)dt + \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}}dW_t$$

où  $V$  est le potentiel :

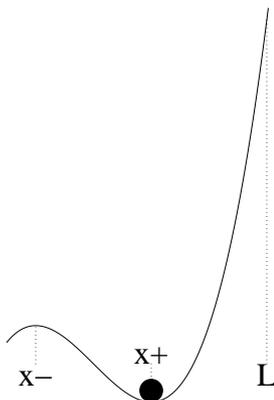


FIGURE 2 – Potentiel  $V$  avec les abscisses particulières  $x_-$ ,  $x_+$  and  $L$

Nous étudions cette équation au voisinage du point d'équilibre. En utilisant les relations entre équations différentielles stochastiques et équations différentielles ordinaires, le temps entre deux spikes peut alors être interpréter comme le temps de sortie d'un puits de potentiel. En utilisant la formule de Feynman-Kac et une transformée de Laplace inverse, nous trouvons que ce temps suit asymptotiquement une loi exponentielle de paramètre  $\lambda_1$  où

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{|V''(x_+)V''(x_-)|}}{\pi\varepsilon} \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2}[V(x_-) - V(x_+)]\right) \left[1 + O\left(\frac{\exp(-2H/\sigma^2)}{\sigma^2}\right)\right] \text{ quand } \sigma \rightarrow 0.$$

## Références

- [1] N. BERGLUND and B. GENTZ Noise-Induces Phenoma in Slow-Fast Dynamical Systems. *Springer*, 2005.
- [2] C. MURATOV and E. VANDEN-EIJENDEN. Noised-induced mixed-mode oscillations in a relaxation oscillator near the onset of a limit circle *Chaos*, 18, 2008.
- [3] B. OKSENDAL *Stochastic differential equation, an introduction with application*, *Universitext*, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

# Généralisation de la méthode des Perfectly Matched Layers

Sophie Laurens

Il est bien connu que la simulation numérique du problème de diffraction se heurte à deux difficultés : le domaine où l'on doit rechercher la solution est non borné dans l'espace ou dans l'espace temps (suivant que l'on recherche la solution dans le domaine fréquentiel ou temporel) et la rapidité des variations de la solution (d'autant plus importante que les fréquences des sources sont élevées). Bien que la mathématique concernant les principaux propagateurs soit parfaitement connue, ces deux points contribuent à la difficulté de leur simulation numérique.

Depuis plusieurs années on assiste à une utilisation de plus en plus importante des milieux fictifs absorbants pour réduire les domaines de calcul. Cette théorie, initiée par Bérenger [1], est une généralisation formelle du fait que la solution en monodimensionnel dans un domaine incluant l'obstacle n'est pas perturbée par l'introduction d'un opérateur de multiplication positif idoine dont le support est extérieur au domaine (Matched Layers de Bérenger). Pour généraliser cette technique en multidimensionnel, une idée naturelle (Perfectly Matched Layers, PML de Bérenger) a consisté alors à augmenter le nombre d'inconnues du problème de façon à ce que la partie spatiale de l'opérateur ne contienne, pour chaque équation scalaire qu'une seule direction de dérivation spatiale. Bien que les résultats numériques obtenus à partir de ce subterfuge se soient révélés pertinents, les fondements mathématiques de cette méthode sont pour le moins incertains : la partie principale de l'opérateur ainsi obtenu est faiblement hyperbolique et la perturbation par l'opérateur d'ordre zéro conduit à un problème  $L^2$  mal posé. Une autre interprétation suggérée par Chew et Wheedon [2] dans le domaine fréquentiel du système ainsi obtenu conduit à remplacer les dérivations spatiales de l'opérateur par des combinaisons complexes de celles-ci. Le déterminant du symbole de l'opérateur de certaines équations (Maxwell et ondes par exemple) étant elliptique, et donc admettant un prolongement holomorphe en dehors de zéro, on pouvait inférer que la clé de la compréhension des domaines fictifs absorbants consistait à reconsidérer le noyau de Schwartz à partir d'un tel opérateur spatial. Sa décroissance pouvait être rendue aussi rapide que l'on voulait (sur exponentielle)... En l'état, et indépendamment de la forme de l'obstacle, le domaine de calcul demeurait parallélépipédique. Un peu plus tard cette technique a été étendue à des domaines convexes en « complexifiant » les dérivations le long des normales de celui-ci.

Divers résultats d'existence d'unicité et de convergence des approximations (Collino [3], Lassas & al [5], Mazet & al [8]) ont été obtenus dans le domaine fréquentiel, bien que le système ne soit pas de Friedrichs (les matrices le composant sont symétriques complexes et évidemment non hermitiennes). Une autre façon d'obtenir un relèvement temporel de ces systèmes écrits en fréquentiel est, de façon alternative à l'écriture originelle de Bérenger, en complexifiant la fréquence, d'opérer à une transformation de Laplace inverse par rapport au temps. On obtient ainsi des systèmes causaux de Friedrichs pouvant être lus, moyennant l'addition d'inconnues subsidiaires, comme des systèmes de Friedrichs identiques aux systèmes originaux à une perturbation d'ordre zéro près, auxquels on adjoint un système d'EDO. Ces systèmes sont évidemment bien posés (même si le semi groupe associé n'est pas forcément contractant et les conditions aux limites admissibles sont bien évidemment les mêmes que pour les systèmes originels). Cependant l'enveloppe convexe de l'obstacle peut être bien plus grande que celui-ci. Il reste donc dans le domaine de calcul effectif (directement corrélé au nombre d'inconnues) une grande partie qui peut sembler superflue. La question naturelle qui se pose alors est : peut-on au plus près d'un obstacle non convexe complexifier les dérivations de façon à obtenir l'effet de « damping » souhaité ?

En partant de l'écriture par un changement de variable complexe des équations PML, une généralisation de la méthode PML est proposée. Pour cela, nous procédons de manière similaire à Lassas et Somersalo [5] en définissant un milieu PML obtenu par exhaustion de  $\mathbb{R}^3$  sur une variété plongement de dimension 3 de  $\mathbb{C}^3$ , coïncidant avec  $\mathbb{R}^3$  sur l'intérieur du volume de calcul  $\Omega$  bordé par les PML. Une fois la théorie et le formalisme introduits, il convient de définir correctement le plongement précédent, et de vérifier ses propriétés. Une écriture en système différentiel augmenté est ensuite proposée sous forme de décomposition en système de Friedrichs.

L'introduction du formalisme PML modifie les équations. Il convient donc de se demander si ces nouvelles équations admettent bien une unique solution, tant pour les problèmes instationnaires qu'harmoniques. Pour les problèmes harmoniques, les démonstrations d'existence et d'unicité nécessitent l'usage de famille d'opérateurs de type A présentant de bonnes propriétés et pour lesquels Kato[4] fournit des théorèmes puissants. Pour les problèmes instationnaires, il est montré que le système d'équations pourra être mis, in fine, sous forme de systèmes de Friedrichs. Le problème des conditions aux limites sera également introduit. Les résultats d'existence, d'unicité (à un ensemble dénombrable de fréquences près (pouvant être vide)) et de décroissance exponentielle dans les couches sont ainsi démontrés.

Une des applications sous jacente à la réalisation de PML non convexes était de pouvoir entourer au plus près une forme complexe, comme par exemple un avion. Pouvant être comparé à une croix de Lorraine, la forme d'un avion peut être décomposée en parties semblables à un L. Nous nous sommes donc naturellement intéressés à un domaine de cette forme. Après avoir appliqué des formulations étoilées, nous avons souhaité utiliser au mieux la géométrie particulière de domaine, notamment sa décomposition en une partie convexe et une partie non convexe, et nous avons introduit une formulation hybride, mélangeant des PML cartésiennes classiques à une nouvelle formulation non convexe. La continuité du changement de variable est assurée à la jonction des deux types de PML. Des résultats numériques seront présentés, concernant deux types de problèmes : la propagation d'ondes électromagnétiques dans le vide ou la réflexion d'une onde plane incidente sur un scattered parfait, aussi bien pour des problèmes harmoniques qu'instationnaires.

## Références

- [1] J.P. Berenger. A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves. *Journal of Computational Physics*, 114 :185–200, 1994.
- [2] W.C. Chew and W.H. Weedon. A 3D perfectly matched medium from modified Maxwell's equations with stretched coordinates. *Microwave and Optical Technology Letters*, 7(13), 1994.
- [3] F. Collino and P. Monk. The Perfectly Matched Layer in Curvilinear Coordinates. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 19(6) :2061–2090, 1998.
- [4] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Springer, 1966.
- [5] M. Lassas, J. Liukkonen, and E. Somersalo. Complex Riemannian metric and absorbing boundary conditions. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 80(7) :739–768, 2001.
- [6] S. Laurens. *Approximation de haute précision des problèmes de diffraction*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, 2010.
- [7] S. Laurens and P.A. Mazet. A general family of Perfectly Matched Layers for non necessarily convex domains. *submitted to Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*.
- [8] P.A. Mazet, L. Segui, and B. Dah. Sur l'existence et l'unicité des solutions pour le système de Maxwell harmonique en présence de couches de Bérenger. *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique*, 333(6) :599–604, 2001.

# Soumission pour le Forum des Jeunes Mathématiciennes : Problèmes inverses en géophysique

Ana-Maria NICU

30 septembre 2010

Etant donnée l'EDP suivante :

$$\Delta V = \begin{cases} -4\pi\rho(x) & \text{si } x \in \mathbb{B} \text{ (équation de Poisson);} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{B}^e \text{ (équation de Laplace).} \end{cases}$$

avec  $\mathbb{B}$  la boule unité et  $\mathbb{B}^e = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathbb{B}}$ , on s'intéresse à l'étude du problème inverse de la gravimétrie ainsi, en vue de sa discrétisation, qu'à un problème d'approximation par un potentiel discret (issu de masses ponctuelles). Ces questions surviennent en particulier pour la détermination du géoïde terrestre [4, 2].

Le problème inverse de la gravimétrie consiste à retrouver la densité  $\rho$  de la Terre (modélisée par  $\mathbb{B}$ ), étant données des mesures du potentiel gravitationnel  $V$  à la surface de la Terre (modélisée par la sphère unité  $\mathbb{S}$ ) ou de la force gravitationnelle  $\nabla V$  sur une orbite satellitaire [6, 3].

Le problème d'approximation consiste à trouver une distribution discrète  $\rho_N = \sum_{k=1}^N m_k \delta_{\xi_k}$  avec  $N$  masses  $m_k$  aux points  $\xi_k$  placées à l'intérieur de la Terre, telle qu'elle génère un potentiel  $V_N$  qui approxime au mieux le potentiel gravitationnel  $V$ . Résoudre ce problème revient à minimiser en norme  $L^2$  la fonctionnelle suivante (par rapport à  $\xi = (\xi_k)_{k=1, \dots, N}$  et  $(m_k)_{k=1, \dots, N}$ ) :

$$\mathcal{F}(\xi, m) = \frac{1}{2} \|V - V_N\|_{L^2(\mathbb{S})}^2 \tag{1}$$

Dans un premier temps, on étudie les propriétés de  $V$  et aussi l'existence et l'unicité du minimum de  $\mathcal{F}$ . Le problème étant mal posé, notamment du plan d'unicité, on doit imposer certaines contraintes ou proposer des espaces dans lesquels la fonctionnelle admet une solution unique [1].

Les quantités  $V$  et  $\rho$  sont mises en relation par un opérateur linéaire  $T$  et l'on remarque que minimiser (1) revient à minimiser une certaine norme de la différence des densités associée  $\rho - \rho_N$ . Ces propriétés concernant les relations entre  $\rho$  et  $V$  seront étudiées, ainsi que des classes d'approximation appropriées. On présentera aussi quelques simulations représentant des comparaisons entre la densité, le potentiel et leurs approximants respectifs [5, 7].

## Références

- [1] V. Isakov, Inverse problems for partial differential equations, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [2] B.H. Wellen Hof, H. Moritz, Physical geodesy, Second Edition, Springer-Verlag, Wien, 2006.
- [3] R. Dautray, J.-L. Lions, Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, Vol. 2, INST, 1987.
- [4] A. Abdelmoula, M. Moakher, B. Philippe, Localized spectral analysis for an inverse problem in geodesy, CARI'08, pp. 369-376, 2008.
- [5] L. Baratchart, J. Leblond, J.-P. Marmorat, Inverse source problem in a 3D ball from best meromorphic approximation on 2D slices, ETNA, Volume 25, pp. 41-53, 2006.
- [6] V. Michel, A.S. Fokas, A unified approach to various techniques for the non- uniqueness of the inverse gravimetric problem and wavelet-based methods, Inverse Problems, Volume 24, Number 4, 2008.
- [7] Moo K. Chung, R. Hartley, K.M. Dalton and R.J. Davidson, Encoding cortical surface by spherical harmonics, Statistica Sinica, Volume 18, 2008.

# On the stability by convolution product of a resurgent algebra.

Yafei OU

## Abstract

We consider the space of holomorphic functions at the origin which extend analytically on the universal covering of  $\mathbb{C} \setminus \omega\mathbb{Z}$ ,  $\omega \in \mathbb{C}^*$ . We show that this space is stable by convolution product, thus is a resurgent algebra.

## References

- [1] B. Candelpergher, C. Nosmas, F. Pham, *Approche de la résurgence*, Actualités mathématiques, Hermann, Paris (1993).
- [2] J. Ecalle, *Les algèbres de fonctions résurgentes*, Publ. Math. D’Orsay, Université Paris-Sud, 1981.05 (1981).
- [3] J. Ecalle, *Les fonctions résurgentes appliquées à l’itération*, Publ. Math. D’Orsay, Université Paris-Sud, 1981.06 (1981).
- [4] J. Ecalle, *L’équation du pont et la classification analytique des objets locaux*, Publ. Math. D’Orsay, Université Paris-Sud, 1985.05 (1985).
- [5] J. Ecalle, *Weighted products and parametric resurgence*. Analyse algébrique des perturbations singulières, I (Marseille-Luminy, 1991), xiii, xv, 7–49, Travaux en Cours, **47**, Hermann, Paris, 1994.
- [6] J. Ecalle, *Twisted resurgence monomials and canonical-spherical synthesis of local objects*. Analyzable functions and applications, 207–315, Contemp. Math. **373**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

- [7] V. Gelfreich, D. Sauzin, *Borel summation and splitting of separatrices for the Hénon map*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **51** (2001), no 2, 513-567.
- [8] J.C. Tougeron, *An introduction to the theory of Gevrey expansions and to the Borel-Laplace transform with some applications*. Preprint University of Toronto, Canada (1990).
- [9] W. Ebeling, *Functions of several complex variables and their singularities*. Graduate studies in mathematics, Vol. 83. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [10] D. Sauzin, *Resurgent functions and splitting problems*. RIMS Kokyuroku 1493,(2005),48-117.

# Opérateurs universels

Elodie Pozzi

En théorie des opérateurs, un des plus importants problèmes est le problème du sous-espace invariant pour un espace de Banach  $\mathcal{X}$  de dimension strictement plus grande que 1. Celui-ci pose la question de l'existence pour un opérateur  $T$  linéaire continu de  $\mathcal{X}$  dans  $\mathcal{X}$  d'un sous-espace invariant non-trivial pour  $T$  (noté s.e.i.n.t) ; plus précisément, existe-t-il un sous-espace fermé  $\mathcal{M} \subset \mathcal{X}$  distinct de  $\{0\}$  et de  $\mathcal{X}$  tel que  $T\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$ . On peut fournir dans certains cas très particuliers d'opérateurs et d'espaces, des réponses à ce problème [CE00]. Cependant, le problème reste ouvert si  $\mathcal{X}$  est un espace de Hilbert séparable de dimension infinie. Il est possible de ramener l'étude de l'existence d'un s.e.i.n.t pour tout opérateur sur un espace de Hilbert séparable de dimension infinie à l'étude des sous-espaces invariants d'un seul opérateur. Ces opérateurs "modèles" seront ce que l'on appelle des *opérateurs universels*.

**Notation 1.** On notera  $\mathcal{L}(H) = \{T : H \rightarrow H, \text{ linéaire et continu}\}$ . On appellera spectre de  $T \in \mathcal{L}(H)$  l'ensemble des  $\lambda \in \mathbb{C}$  tels que  $T - \lambda Id$  est non inversible dans  $\mathcal{L}(H)$ .

**Définition 2.** Soit  $H$  un espace de Hilbert. Un opérateur  $U \in \mathcal{L}(H)$  est dit universel pour  $H$  si pour tout  $T \in \mathcal{L}(H)$ , il existe une constante  $\lambda \neq 0$  et un sous-espace invariant  $\mathcal{M}$  pour  $U$  isomorphe à  $H$  tel que  $U|_{\mathcal{M}}$  est similaire à  $\lambda T$ , c'est-à-dire,  $\lambda JT = UJ$ , où  $J : H \rightarrow \mathcal{M}$  est un isomorphisme linéaire.

La proposition suivante met en lumière le lien entre le problème du sous-espace invariant et la notion d'universalité.

**Proposition 3.** Soit  $H$  un espace de Hilbert de dimension infinie et  $U \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur universel. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes.

1. Tout opérateur non nul  $T \in \mathcal{L}(H)$  a un sous-espace invariant non trivial.
2. Tous les sous-espaces invariants non triviaux pour  $U$  minimaux (au sens de l'inclusion) sont tous de dimension 1 .

Ainsi, si l'on est en mesure de donner une description complète des sous-espaces invariants d'un opérateur universel, il sera alors possible de répondre au problème du sous-espace invariant. La proposition suivante donne une condition suffisante pour qu'un opérateur soit universel.

**Théorème 4.** [Car69] Soit  $H$  un espace de Hilbert séparable de dimension infinie et  $U \in \mathcal{L}(H)$ . Supposons que

- (i)  $\ker(U)$  est de dimension infinie et
- (ii)  $\text{Im}(U)$  est  $H$ .

Alors,  $U$  est un opérateur universel d'espace de Hilbert.

**Exemple 5.** Si l'on considère sur  $\ell^2(\mathbb{N}, H)$ , l'ensemble des suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  où  $x_n$  est un élément de l'espace de Hilbert  $H$  de dimension infinie, telles que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$$

et l'adjoint du shift,  $S^*$  défini par

$$\begin{aligned} S^* : \ell^2(\mathbb{N}, H) &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{N}, H) \\ (x_0, x_1, x_2, \dots) &\longmapsto (x_1, x_2, \dots). \end{aligned}$$

alors, par le théorème de Caradus,  $S^*$  est un opérateur universel.

L'universalité des "translatés" de l'opérateur de composition, où l'opérateur de composition est de la forme  $C_\phi : f \mapsto f \circ \phi$ , sur certains espaces de fonctions, utilise également le théorème de Caradus : on peut par exemple citer le résultat de Nordgren, Rosenthal et Wintrobe [NRW87] sur l'opérateur de composition  $C_\phi$ , pour  $\phi$  un automorphisme du disque  $\mathbb{D}$  de la forme

$$\phi(z) = \frac{r+z}{1+rz}, \quad 0 < r < 1,$$

sur l'espace de Hardy du disque  $H^2(\mathbb{D})$  où  $H^2(\mathbb{D})$  désigne l'ensemble des fonction holomorphes de la forme

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \quad \text{où} \quad \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 < \infty.$$

Ils ont montré que pour  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $\sqrt{a} < |\lambda| < 1/\sqrt{a}$  où  $a = \frac{1-r}{1+r}$ ,  $C_\phi - \lambda \text{Id}$  est universel.

Un résultat plus récent, en collaboration avec J. Partington [PP], montre que si  $C_\phi$  est l'opérateur de composition sur  $L^2([0, 1])$  et  $\lambda$  est à l'intérieur du spectre,  $C_\phi - \lambda \text{Id}$  est universel. (ici,  $\phi$  appartient à une certaine classe de fonctions, on pourra plus simplement considérer  $\phi(x) = x^s$ ,  $0 < s < 1$ ). Nous avons par ailleurs obtenu l'universalité de  $C_\phi - \lambda \text{Id}$  pour  $\lambda$  à l'intérieur du spectre de  $C_\phi$ , où  $C_\phi$  est l'opérateur de composition sur l'espace de Sobolev

$$W_0([0, 1]) = \{f \text{ absolument continue telle que } f' \in L^2([0, 1]) \text{ et } f(0) = 0\}.$$

et où  $\phi$  appartient à une classe de fonctions (on pourra prendre  $\phi(x) = x^s$ , pour  $s > 1$ ).

## Références

- [Car69] S. R. Caradus. Universal operators and invariant subspaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 23(1) :526–527, 1969.
- [CE00] I. Chalendar and J. Esterle. *Le problème du sous-espace invariant*. Birkhäuser, Basel, 2000.
- [NRW87] E. Nordgren, P. Rosenthal, and F. S. Wintrobe. Invertible composition operators on  $H^p$ . *J. Funct. Anal.*, 73(2) :324–344, 1987.
- [PP] J. R. Partington and E. Pozzi. Universal shifts and composition operators. *Accepted in Journal of operators and matrices*.

# Non existence des vortex dans la zone de faible densité d'un condensat

Jimena Royo-Letelier  
CMAP, École Polytechnique

Dans un travail en collaboration avec Amandine Aftalion et Robert L. Jerrard [1], nous répondons à une question posée par Len Pitaevskii et prouvons que l'état fondamental de l'énergie de Gross Pitaevskii décrivant un condensat de Bose Einstein n'a pas des vortex dans la région de faible densité. Il en résulte que le premier état ayant des vortex les a dans son "bulk", la zone de haute densité. Ce résultat est obtenu en prouvant que pour des vitesses de rotation petites, l'état fondamental est un multiple de l'état fondamental sans rotation. Pour cela nous utilisons des estimées fines sur la décroissance de la fonction d'onde et des estimations de Jacobiens pondérées.

## References

- [1] A. Aftalion, R.L. Jerrard, J. Royo-Letelier : Non existence of vortices in the small density region of a condensate, (2010) Preprint, <http://arxiv.org/abs/1008.4801>.

# Problèmes de type Bolza en optimisation

R. SAHRAOUI

Université de Mostaganem, Faculté des sciences exactes et sciences de la nature et de la vie, Département de Mathématiques, B.P.227, Mostaganem, Algérie.

email: sahraouimosta@yahoo.fr

## Abstract

Dans ce papier, nous avons étudié dans le contexte de la dimension infinie, les problèmes d'optimisation déterministique de type Bolza à temps discret. Les données sont supposées semi-continues inférieurement et on a obtenu sous une condition de qualification générale, des conditions nécessaires d'optimalité sont aussi suffisantes dans le cas convexe.

**Keywords:** Nonsmooth analysis, subdifferential, qualification condition, convex analysis, relative interior, optimality conditions, discrete time inclusion, prox-regular set.

## References

- [1] F. BERNARD, L. THIBAUT, N. Zlateva, Characterizations of prox-regular sets in uniformly convex Banach spaces, *J. Convex Analysis* 13 (2006) 525-559.
- [2] B. S. MORDUKHOVICH, *Variational Analysis and Generalized Differentiation I and II*, Springer, New-York, 2006.
- [3] B. S. MORDUKHOVICH, Y. SHAO, Nonsmooth sequential analysis in Asplund spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* 348 (1996) 1235-1280.
- [4] R. T. ROCKAFELLAR, *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.
- [5] R. T. ROCKAFELLAR, R. J.-B. WETS, Deterministic and stochastic optimization problems of Bolza type in discrete time, *Stochastics* 10 (1983) 273-312.
- [6] R.T. ROCKAFELLAR, R. J.-B. WETS, *Variational Analysis*, Springer-Verlag, New York, 2004.

# MODELISATION DE LA REPONSE IMMUNITAIRE DES CELLULES T CD8

Christophe Arpin<sup>a</sup>, Fabien Crauste<sup>b</sup>, Clarisse Dubois<sup>a</sup>, Olivier Gandrillon<sup>c</sup>, Stéphane Genieys<sup>b</sup>,  
Isabelle Lemercier<sup>a</sup>, Jacqueline Marvel<sup>a</sup> et Emmanuelle Terry<sup>b</sup>

<sup>a</sup>U851 INSERM Team I2V (immunité, infection, vaccination)  
21 Avenue Tony Garnier, 69365 Lyon cedex 07, France

<sup>b</sup>Institut Camille Jordan, UMR CNRS 5208  
Université Claude Bernard Lyon 1  
21 avenue Claude Bernard, 69622 Villeurbanne Cedex, France  
terry@math.univ-lyon1.fr, crauste@math.univ-lyon1.fr

<sup>c</sup>Centre de Génétique Moléculaire et Cellulaire, UMR CNRS 5534  
Université Claude Bernard Lyon 1  
16 rue Raphaël Dubois, 69622 Villeurbanne Cedex, France  
gandrillon@cgmc.univ-lyon1.fr

Mot-clés: réponse immunitaire, cellule T CD8, équations différentielles ordinaires, équations à retard

La réponse immunitaire se produit en réaction à une infection, c'est-à-dire à l'introduction d'un pathogène dans l'organisme. Nous considérons ici une réponse primaire, c'est-à-dire que le pathogène n'a jamais été rencontré auparavant par l'organisme. Nous nous intéressons à une population de cellules spécifique de la réponse, les lymphocytes T CD8. Cette réponse immunitaire se produit en deux phases : une phase d'expansion, pendant laquelle le nombre de cellules T CD8 augmente rapidement et fortement, puis une phase de contraction. La contraction, pendant laquelle la plupart des cellules générées sont éliminées, constitue une régulation de la population. Cette phase est suivie d'une génération de cellules mémoires, spécifiques de l'antigène mis en cause dans l'infection : les cellules mémoires seront capables de réagir plus vite et plus fortement lors d'une seconde infection par le même pathogène. Des modèles de la réponse immunitaire T CD8 ont déjà été proposés par différents auteurs [1,2,3]. Certains de ces modèles ne prennent pas en compte de régulation de la réponse immunitaire [1,3], d'autres au contraire présentent par le détail un grand nombre d'évènements cellulaires et de sous-populations de cellules [2].

Nous présenterons deux modèles de réponse primaire, dans lesquelles des non-linéarités permettent de tenir compte d'une régulation dans la dynamique des cellules. Le premier est basé sur un système d'équations différentielles ordinaires, le second sur un système d'équations différentielles à retard : le retard tient compte du temps mis par les cellules pour se différencier d'un état à l'autre. Nous discuterons en particulier des rôles et de la pertinence des rétro-contrôles introduits pour réguler la réponse. Nous nous intéresserons également à l'existence et à la stabilité des états d'équilibre pour ces systèmes. Enfin, nous montrerons et comparerons quelques simulations pouvant être obtenues à partir de ces modèles.

## Bibliographie

- [1] Antia R., Ganusov V.V. and Ahmed R., "The role of models in understanding CD8+ T-cell memory", *Nature Reviews*, v.5, p.101-111, 2005.
- [2] Kim P.S., Lee P.P. and Levy D., "Modeling regulation mechanisms in the immune system", *J. Theor. Biol.*, v.246, p.33-69, 2007.
- [3] Rouzine I.M., Murali-Krishna K. and Ahmed R., "Generals die in friendly fire, or modeling immune response to HIV", *J. Computational and Appl. Math.*, v.184, p.258-274, 2005.

# Contrôle des écoulements en boucle fermée

Laetitia Thevenet \*

27 octobre 2010

Dans cette présentation, nous nous intéressons au contrôle d'écoulements autour d'un obstacle, par exemple un cylindre ou un profil d'aile. Après avoir rappelé quelques notions sur le contrôle et plus précisément du contrôle en boucle fermée, nous étudierons le problème suivant.

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  et  $\Gamma$  sa frontière. On considère un écoulement stationnaire dans cet ouvert et on note  $(\mathbf{z}_s, \chi)$  respectivement la vitesse et la pression du fluide, solution des équations de Navier-Stokes stationnaires incompressibles

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\mathbf{z}_s + (\mathbf{z}_s \cdot \nabla)\mathbf{z}_s + \nabla\chi &= \mathbf{f}, & \operatorname{div} \mathbf{z}_s &= 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{z}_s &= \mathbf{g} & \text{sur } \Gamma, \end{aligned} \tag{1}$$

o  $\nu$  est le coefficient de viscosité du fluide et  $\mathbf{f}$  une force volumique. Nous supposons que cette solution stationnaire est instable.

Considérons maintenant les équations de Navier-Stokes incompressibles, données par

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathbf{z}}{\partial t} - \nu\Delta\mathbf{z} + (\mathbf{z} \cdot \nabla)\mathbf{z} + \nabla q &= \mathbf{f}, & \operatorname{div} \mathbf{z} &= 0 & \text{dans } (0, \infty) \times \Omega, \\ \mathbf{z} &= \mathbf{g} + m\mathbf{u} & \text{sur } (0, \infty) \times \Gamma, & \mathbf{z}(0) = \mathbf{y}_0 + \mathbf{z}_s & \text{dans } \Omega, \end{aligned} \tag{2}$$

o  $\mathbf{y}_0$  une perturbation de la condition initiale (la fonction  $m$  apparaissant dans (2) permet de localiser le contrôle  $\mathbf{u}$  qui n'est appliqué que sur une partie de la frontire  $\Gamma$ ).

On s'intéresse alors au problème de stabilisation suivant : comment déterminer  $\mathbf{u}$  nous permettant de revenir à l'état d'équilibre ? Plus précisément, on cherche  $\mathbf{u}$  sous la forme

$$\mathbf{u} = K(\mathbf{z} - \mathbf{z}_s), \tag{3}$$

où  $K$  est un opérateur à déterminer, de telle sorte que la solution de (2) avec  $\mathbf{u}$  défini par (3) vérifie

$$|\mathbf{z}(t) - \mathbf{w}|_{L^2(\Omega)} \leq Ce^{-\alpha t}, \tag{4}$$

où  $\alpha > 0$  est une constante fixée.

Dans [2], l'auteur a constuit un contrôle frontière en boucle fermée capable de stabiliser localement et exponentiellement les équations de Navier-Stokes. La loi de contrôle obtenue dans [2] est une loi linéaire, construite à partir d'un problème de contrôle résolu sur l'équation linéarisée.

La construction de la loi linéaire provenant de [2] fait intervenir une équation de Riccati algébrique de dimension infinie, qui est, 'a ce jour, très difficile à résoudre numériquement. En

---

\*LATP, Centre de Mathématiques et Informatique, 13454 Marseille Cedex, France,  
email:thevenet@cmi.univ-mrs.fr.

effet, les matrices apparaissant dans la version discrète de cette équation de Riccati sont de très grande dimension, et la solution de cette équation est également une matrice de grande taille et pleine. Cela entraîne des problèmes de mémoire rendant la résolution numérique difficile.

Pour traiter le problème de dimension apparaissant dans la résolution numérique des équations de Riccati, la méthode que nous avons utilisée consiste à ne stabiliser que les modes instables de l'opérateur linéarisé. Cette méthode a déjà été utilisée notamment en ce qui concerne les équations linéaires paraboliques par Triggiani dans [4]. Pour les équations de Navier-Stokes linéarisées, cette méthode a également été utilisée et a permis à Barbu et Triggiani d'obtenir un résultat de stabilisation locale en utilisant un contrôle interne de dimension finie (voir [1]).

L'avantage d'une telle méthode est que l'équation de Riccati obtenue est de très petite dimension (de dimension inférieure ou égale à la dimension de l'espace instable) et peut donc être résolue numériquement. On détermine ainsi une nouvelle loi de contrôle linéaire et on montre dans [3] que ce nouveau contrôle stabilise localement les équations de Navier-Stokes.

## Références

- [1] V. Barbu, R. Triggiani, Internal stabilization of Navier-Stokes equations with finite-dimensional controllers, *Indiana University Mathematics Journal*, Vol. 53 (2004), 1443-1494.
- [2] J.-P. Raymond, Boundary feedback stabilization of the two dimensional Navier-Stokes equations, *SIAM J. Control and Optim.*, Vol. 45 (2006), 790-828.
- [3] J.-P. Raymond, L. Thevenet, Boundary feedback stabilization of the two dimensional Navier-Stokes equations with finite dimensional controllers, *DCDS-A*, Vol. 27 (2010), 1159-1187.
- [4] R. Triggiani, On the stabilizability problem in Banach space, *J. Math. Anal. Appl.* 52 (1975), 383-403.

# Modèles de Markov Cachés Harmoniques pour la modélisation des signaux EEG

Bruno Torrèsani, Emilie Villaron

## Résumé :

Dans cet exposé, je décrirai une nouvelle approche pour modéliser des signaux multi-capteurs par l'utilisation de modèles à états cachés dans le plan temps-fréquence.

Les signaux multi-capteurs sont exprimés dans une base de cosinus locaux (appelée base MDCT) et les coefficients (indexés en temps et en fréquence) de cette décomposition sont modélisés comme des variables aléatoires multivariées dont la distribution est gouvernée par une chaîne de Markov cachée à valeurs dans un espace d'états fini.

Plusieurs modélisations possibles sont décrites pour les matrices de covariance, et on développe pour chacune d'elles des algorithmes d'estimation par maximum de vraisemblance de type EM.

Ce modèle est ensuite appliqué à des signaux de type EEG (électroencéphalogrammes) et on montre que ces matrices de variance-covariance indexées par les « capteurs » et les « fréquences » apportent des informations pertinentes sur les signaux analysés.

Ce dernier point est illustré par un cas d'étude sur la caractérisation de la désynchronisation des ondes alpha chez les patients atteints de sclérose en plaques.

## Bibliographie :

[1] F. Bijma and J. C. De Munck. A space-frequency analysis of MEG background processes. *Neuroimage*, 43:478–488, 2008.

[2] R. Carmona, W. Hwang, and B. Torrèsani. Practical Time-Frequency Analysis: continuous wavelet and Gabor transforms, with an implementation in S, volume 9 of *Wavelet Analysis and its Applications*. Academic Press, San Diego, 1998.

[3] K. S. Cover, H. Vrenken, J. J. Geurts, B. W. van Oosten, B. Jelles, C. H. Polman, C. J. Stam, and B. W. van Dijk. Multiple sclerosis patients show a highly significant decrease in alpha band interhemispheric synchronization measured using MEG. *NeuroImage*, 29(3):783–788, February 2006.

[4] P. Flandrin. Temps-Fréquence. *Traité des Nouvelles Technologies Série Traitement du Signal*. Hermès, Paris, 1993.

[5] M. Fornasier and H. Rauhut. Recovery algorithms for vector valued data with joint sparsity constraints. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 46(2):577–613, 2008. to appear.

[6] M. Kowalski and B. Torrèsani. Décompositions parcimonieuses et persistantes de signaux multicanaux. *Applicat aux signaux MEEG*. In F. d'Alché Buc, editor, *Proceedings of CAP'08, 10eme Conference d'Apprentissage Porquerolles*, pages 105–120, Porquerolles, France, May 2008. Cepadues Editions.

[7] S. Molla and B. Torrèsani. An hybrid audio scheme using hidden Markov models of

waveforms.

Applied and Computational Harmonic Analysis, 18(2):137–166, 2005.

[8] L. Rabiner. A tutorial on hidden markov models and selected applications in speech recognition.

Proceedings of the IEEE, 77:257–286, 1989.

[9] P. Soendergaard. LTFAT, the linear time-frequency analysis toolbox, 2010.

[10] D. Studer, U. Hoffmann, and T. Koenig. From EEG dependency multichannel matching pursuit to sparse topographic

EEG decomposition. Journal of Neuroscience Methods, 153(2):261–275, June 2006.