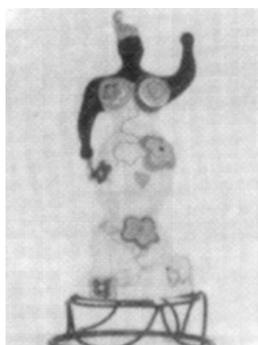


femmes & math

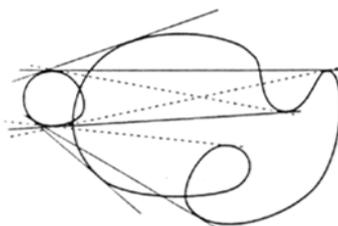
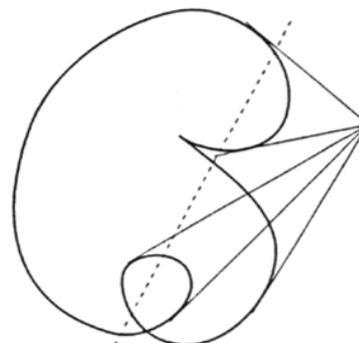


'P Å, Supplément

Octobre 2000

Sommaire

Editorial
Vie de l'association
A propos de *mathématiques*
A propos de *femmes*



Revue de l'Association
femmes et mathématiques

Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05

Niki de St Phalle
Nana with Golden turt
1986

Women's art magazine
Sept/oct 1993

Eileen Cooper
Woman with birds
1989

L'ouvert
juin 1994

Women's art magazine
jan/feb 1992

Claude Cahun
Autoportrait
1929

L'ouvert

juin 1994

Women's art
magazine
sept/oct 1995

Éditorial

Les deux premiers forums des jeunes mathématiciennes se sont tenus à l'Institut Henri Poincaré à Paris en novembre 1996 et janvier 1997 et leurs actes sont parus dans les suppléments aux numéros 2 et 3 de la revue *femmes et math*. Le présent volume regroupe les actes des troisième et quatrième éditions qui se sont tenues en février 1998 et février 1999. Mais l'histoire ne s'arrête pas là ! Les actes de la cinquième édition qui s'est tenue en janvier 2000 paraîtront dans un prochain numéro. Le forum est ainsi devenu un événement régulier de la vie mathématique en France et nous nous en réjouissons.

Dès 1996 le forum a été un lieu de rencontre entre mathématiciennes de tous âges et de tous les coins de France. Les jeunes mathématiciennes ont là l'occasion d'exposer leurs travaux dans un lieu où les jeunes et les femmes sont majoritaires, ce qui est inhabituel en mathématiques. Elles peuvent s'imaginer en mathématicienne et se représenter leur avenir professionnel plus facilement qu'en étant entourées presque exclusivement d'exemples masculins, ce qui renforce la motivation de certaines d'entre elles. Elles rencontrent également des jeunes mathématiciennes de leur âge avec qui elles restent en contact, notamment au travers des forums. Nous espérons ainsi les aider à se sentir à leur place dans la communauté mathématique, peut-être aussi créer un lieu où les échanges se feraient sur une base un peu différente et où la confiance en soi serait plus facile à trouver. Un lieu où l'on fait des mathématiques et où l'on réfléchit aussi sur le fonctionnement social des mathématiques, sur ce que cela signifie d'être une mathématicienne.

Le programme des forums rend compte de ces deux volets. Outre les débats lors d'ateliers et de tables rondes, il y eut lors du forum 1998 un atelier organisé par Luce Irigaray, linguiste, psychanaliste et philosophe, sur *la place de l'autre en mathématiques* et une intervention d'Eva Bayer sur les diverses voies ouvertes par une thèse en mathématiques. Lors du forum 1999 Christine Fontanini a présenté sa thèse sur *l'Analyse de la sous-représentation du sexe féminin dans les classes préparatoires math-physique* (le texte de cet exposé se trouve sur le site de l'association à l'adresse <http://www.desargues.univ-lyon1.fr/home/fem/agfev99.html>).

Dans ce volume vous trouverez les exposés mathématiques ainsi que le texte de l'intervention d'Eva Bayer et un bref compte-rendu de la discussion qui avait suivi.

Nous souhaitons remercier les formations doctorales et les équipes qui ont dans de nombreux cas pris en charge les déplacements des participantes au forum.

Françoise Delon et Natacha Portier

Table des matières

Éditorial	1
Table des matières	3
Exposés du forum 1998 :	
• Régularité de l'attracteur pour l'équation de Schrödinger non linéaire faiblement amortie <i>Naïma Akroune</i>	5
• Diffusion processes and nonlinear parabolic equations <i>Yana Belopolskaya</i>	10
• Analyse sur l'espace des matrices symétriques <i>Nicole Bopp</i>	15
• Filtrage d'un processus partiellement observé dans le cas d'un grand rapport signal-bruit pour un système corrélé <i>Marie-Noelle Dietsch</i>	21
• Sur certaines transformations issues de systèmes de numérations <i>Maria Doudéková-Puydebois</i>	26
• Structure galoisienne des S -unités <i>Isabelle Dubois</i>	29
• Zéros des polynômes aléatoires à coefficients gaussiens complexes <i>Frédérique Bienvenü-Duheille</i>	33
• Unicité des solutions «mild» des équations de Navier-Stokes dans L^3R^3 <i>Giulia Furioli</i>	38
• Classification des objets injectifs dans certaines catégories de K -modules instables sur l'algèbre de Steenrod <i>Dagmar M. Meyer</i>	43
• Multiples de formes trace <i>Marina Monsurro</i>	48
• Principe d'invariance local pour les chaînes de Markov <i>Caroline Noquet</i>	52
• Quelques nouveaux résultats sur les mosaïques poissonniennes <i>Katy Paroux</i>	56
• Comportement asymptotique d'une somme d'exponentielles de moyennes mobiles <i>Nelly Torrent</i>	61

- Champs de vecteurs adjoints sur l'espace tangent d'un espace symétrique semi-simple
Rosane Ushirobira66
- Stabilité asymptotique faible d'équations d'évolution du second ordre soumises à des contrôles non linéaires, non monotones
Judith Vancostenoble 69
- Invariants par conjugaison dans le dual de l'algèbre de Steenrod
Sarah Whitehouse 73
- Que faire après un doctorat?
Eva Bayer 77

Exposés du forum 1999 :

- Analyse harmonique sur les groupes et les espaces symétriques
Pascale Harinck82
- Techniques d'analyse complexe appliquées au problème des moments et au problème du sous-espace invariant
Isabelle Chalendar 90
- Déterminants associés aux traces pondérées
Catherine Ducourtioux 95
- Traces au bord d'un ouvert de solutions d'équations elliptiques
Michèle Grillot105
- Drap brownien fractionnaire
Stéphanie Léger108
- Problèmes de contrôle optimal parabolique avec contraintes sur le contrôle
Nora Merabet 113
- Groupes de Hecke et Surfaces modulaires de Hilbert
Andrea Moreira 118
- Le problème des grandes puissances et celui des grandes racines : une introduction à la complexité sur les corps et les corps différentiels
Natacha Portier 123

Régularité de l'attracteur pour l'équation de Schrödinger non linéaire faiblement amortie

Naïma AKROUNE

Résumé : Nous étudions le comportement asymptotique lorsque le temps tend vers l'infini des solutions des équations de Schrödinger en présence d'un terme de force et d'un terme de dissipation, la variable d'espace x étant dans \mathbb{R} . Nous montrons que ce comportement est décrit par un attracteur qui capture toutes les trajectoires dans $H^1(\mathbb{R})$. Un de nos résultats principaux concerne l'existence d'un effet régularisant asymptotique pour ces équations. En d'autres termes, cet attracteur est inclus et compact dans $H^2(\mathbb{R})$.

1 Introduction

Nous nous intéressons au comportement pour les grands temps de l'équation de Schrödinger non linéaire faiblement amortie définie par

$$u_t + \alpha u + iu_{xx} - iu + i|u|^2u = f \quad (1)$$

où u est une application de \mathbb{R}_+ à valeurs dans l'espace des fonctions complexes

$$H^1(\mathbb{R}) = \left\{ u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, u, \frac{\partial u}{\partial x} \in L^2(\mathbb{R}) \right\}.$$

On définit la condition de Cauchy associée à cette équation par

$$u(0) = u_0 \text{ dans } H^1(\mathbb{R}).$$

Le semi-groupe $S(t)$ qui agit de $H^1(\mathbb{R})$ sur lui-même est défini par

$$u(t) = S(t)u_0,$$

où $u(t)$ est la solution de (1).

Il est bien connu que ce semi-groupe est dissipatif : il possède un borné absorbant (c'est-à-dire un sous-ensemble borné de $H^1(\mathbb{R})$ dans lequel sont confinées toutes les trajectoires après un temps fini) et même un attracteur global \mathcal{A} dans $H^1(\mathbb{R})$, voir [L].

Nous cherchons à montrer un effet régularisant asymptotique (suivant la terminologie de [H]) pour ce semi-groupe, i.e. que \mathcal{A} est inclus dans un espace de fonctions plus régulières.

Notons que [G] a démontré le même résultat dans l'espace $H_{per}^1([0, 1])$.

Nous renvoyons à [T] pour des références plus complètes.

2 Existence globale de la solution et le borné absorbant

Etant donné u_0 dans $H^1(\mathbb{R})$, on obtient aisément, en utilisant les méthodes classiques, l'existence globale et l'unicité de la solution de (1). Il en résulte alors les deux propositions suivantes :

Proposition 1. *Pour $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$, l'équation (1) admet une unique solution*

$$u \in C_b([0, +\infty[, H^1(\mathbb{R}))$$

et l'application $S(t) : u_0 \longrightarrow u(t)$ est continue sur $H^1(\mathbb{R})$

Remarque 1. $C_b([0, +\infty[, H^1(\mathbb{R}))$ désigne l'espace des fonctions continues et bornées à valeurs dans $H^1(\mathbb{R})$.

Proposition 2. *Pour tout borné B de $H^1(\mathbb{R})$, il existe t_0 qui dépend de B , tel que, pour $t \geq t_0$, et $u_0 \in B$ on a*

$$|S(t)u_0|_{H^1} \leq M_1$$

où M_1 dépend de α et f .

Preuve : Voir [Gh] et [L].

3 Existence de l'attracteur dans $H^1(\mathbb{R})$

En utilisant les méthodes de [L], et l'argument de Ball [B], on montre que l'ensemble \mathcal{A} défini par :

$$\mathcal{A} = \{\alpha \in B, \exists \varphi_n \in B, t_n \rightarrow +\infty, \text{ tel que } S(t_n)\varphi_n \rightarrow a \text{ dans } H^1(\mathbb{R})\}$$

est un attracteur global et compact dans $H^1(\mathbb{R})$.

D'où le théorème suivant :

Théorème 1. *$S(t)$ possède un attracteur global, inclus et compact dans $H^1(\mathbb{R})$.*

4 Régularité de l'attracteur

Nous esquissons ici notre résultat dont la preuve complète apparaîtra dans [A].

Soit u solution de l'équation (1) qui s'écrit sous la forme :

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

Pour un niveau donné N , on définit la partie basse fréquence de u :

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| \leq N} \hat{u}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

Notons que y est C^∞ par rapport à x . De même, on définit la partie haute fréquence de u :

$$z(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| \geq N} \hat{u}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

Notons que z est solution de l'équation non autonome suivante :

$$\begin{cases} z_t + \alpha z + iz_{xx} - iz + iQ(|y + z|^2(y + z)) = Qf \\ z(0) = Qu_0 = z_0 \end{cases}$$

où Q est le projecteur orthogonal sur

$$QH^1 = \left\{ z = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| \geq N} \hat{u}(\xi) e^{ix\xi} d\xi, z \in H^1(\mathbb{R}) \right\}.$$

Pour N fixé et pour une solution u , soit $y = Pu = (Id - Q)u$;
on introduit alors $Z : [t_0, +\infty[\rightarrow QH_1$ vérifiant l'équation suivante :

$$\begin{cases} Z_1 + \alpha Z + iZ_{xx} - iZ + iQ(|y + Z|^2(y + Z)) = Qf \\ Z(t_0) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Remarque 2. t_0 est défini comme dans la proposition 2.

Proposition 3. *Il existe une unique solution Z de (2) continue et bornée dans QH_2 , qui satisfait de plus à*

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |Z(t) - z(t)|_{H^1} = 0$$

Preuve : En utilisant des estimations a priori, on montre alors que Z est une solution globale dans $H^2(\mathbb{R})$. De plus, il existe C dépendant de a et f , tel que

$$|Z(t) - z(t)|_{H^1} \leq Ce^{-\alpha t}$$

Théorème 2. *L'attracteur \mathcal{A} est inclus, borné et compact dans $H^2(\mathbb{R})$.*

Preuve : La Proposition 3 implique que \mathcal{A} est un sous-ensemble borné de H^2 (voir [G]). Pour montrer la compacité, on introduit l'équation d'énergie vérifiée par u :

$$\phi(S(t)u_0) = \phi(u_0)e^{2\alpha t} + \alpha \int_0^t e^{2\alpha(t-s)} \psi(S(s)u_0) ds \quad (3)$$

où

$$\phi(u) = |u|_{H^2}^2 - 2Im \int f \overline{u_{xx}} - \int |u_x|^2 |u|^2 - 2 \int [Re(u_x \bar{u})]^2$$

$$\begin{aligned} \psi(u) = & -\alpha Im \int f \overline{u_{xx}} + \alpha \int |u|^2 - 2 \int Re(u_x \bar{u}) \int Re(u_x \bar{u}_t) \\ & + \int Re(u \bar{u}_t) - \int Re(u \bar{u}_t) |u_x|^2. \end{aligned}$$

Soit une suite (x_j) dans \mathcal{A} . Comme \mathcal{A} est borné dans $H^2(\mathbb{R})$ et compact dans $H^1(\mathbb{R})$, alors il existe une sous-suite $(x_{j'})$ qui converge faiblement vers

$$\limsup_{j' \rightarrow +\infty} |x_{j'}|_{H^2} \leq |\beta|_{H^2}$$

d'où le résultat.

Bibliographie

- [A] *N. Akroune*, Thèse d'université, en préparation.
- [B] *J. Ball*, A proof of the existence of global attractors for damped semi-linear wave equations, à paraître.
- [G] *O. Goubet*, Regularity of the attractors for a weakly damped nonlinear Schrödinger equation, *Applicable Analysis*, Vol 60, 99-119 (1995).
- [Gh] *J.-M. Ghidaglia*, Finite dimensional behaviour for weakly damped driven Schrödinger equations, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 5, 365-405 (1988).
- [H] *A. Haraux*, Two remarks on hyperbolic dissipative problems, in Non-linear Partial Differential Equations and their Applications, *Collège de France Seminar*, Vol 7, H. Brézis, J.-L. Lions (Eds), Pitman, London (1985).
- [L] *P. Laurençot*, Long time behaviour for weak damped driven nonlinear Schrödinger equation in \mathbb{N} , $N \leq 3$, No DEA (1995).
- [T] *R. Temam*, Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, Appl. Math. Sc. 68, *Springer-Verlag, New York*, Second Edition (1997).

Université de Cergy-Pontoise
2, Avenue Adolphe Chauvin
95302 Cergy-Pontoise, France
Naima.Akroune@math.u-cergy.fr

Diffusion processes and nonlinear parabolic equations

Yana Belopolskaya

From the very first steps of the development of the diffusion process theory its deep connections with PDE theory were acknowledged and fruitfully used. At the beginning PDE results were used to study properties of transition probabilities of diffusion processes. Later the results of stochastic differential equation (SDE) theory come to be very effective in deriving results in PDE. Actually SDE methods allow to derive a priori estimates of PDE solutions with constants independent of the dimension of the phase space and hence show the way to deal with infinite dimensional PDEs. In addition they were less sensitive to the degeneration of principal terms in PDE equations than classical methods of investigation.

Starting from the works by H. McKean [1] and M. Freidlin [2] it was revealed that probabilistic approach could be applied to investigation of a large class of quasilinear elliptic and parabolic equations as well. Later this approach was applied to study fully nonlinear PDE and systems of such equations (see [4]-[7]).

To give a more detailed description of the probabilistic approach let us introduce some notation. Let (Ω, \mathcal{F}, P) denote a complete probability space, $H_+ \subset H \subset H_-$ be a Gelfand triple of Hilbert spaces, $\dim H = n \leq \infty$. Denote by $w(t) \in H_-$ a Wiener process defined on Ω and associated with this triple, $a(t, x) \in H, A(t, x) \in L_{12}(H), x \in H, t \in [0, T]$ where $L_{12}(H)$ is a space of Hilbert-Schmidt operators with the norm $\sigma(A) = (\text{Tr}[A^*A])^{\frac{1}{2}}$.

The connection between PDE and SDE theories is based on the fact that the transition probability $P(s, x, t, dy) = P(\xi(t) \in dy | \xi(s) = x), 0 \leq s \leq t \leq T$ of the Markov process $\xi(t) \in H$ which solves

$$d\xi(t) = a(t, \xi(t))dt + A(t, \xi(t))dw, \xi(s) = x \quad (1)$$

gives rise to an evolution family $V(t, s)f(x) = Ef(\xi_{s,x}(t))$ where $\xi_{s,x}(t)$ is the solution to (1). The family $V(t, s)$ acts in the space $B(H)$ of bounded measurable functions on H and the restriction of its generator of to the space $C^2(H)$ of twice differentiable functions has the form

$$\mathcal{A}(s)f(x) = \frac{1}{2}\text{Tr}f''(A(s, x), A(s, x)) + (f', a(s, x)).$$

Hence $u(s, x) = Ef(\xi_{s,x}(t))$ solves the Cauchy problem

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \mathcal{A}(s)u = 0, u(t, x) = f(x).$$

Here $f' = \frac{\partial f}{\partial x}, \text{Tr}f''(A, A) = \sum_{i,j,k=1}^n f''_{x_i x_j} A_i^k A_j^k$.

Following this line consider a stochastic equation

$$d\xi = a(t, \xi(t), u(t, \xi(t)))dt + A(t, \xi(t), u(t, \xi(t)))dw, \xi(s) = x \quad (2)$$

where $u(t, x)$ is an unknown function and choose

$$u(s, x) = Ef(\xi_{s,x}(t)) \quad (3)$$

This idea which is due to McKean [1] and Freidlin [2] was developed later in [3], [4]. Under certain assumptions on a , A and f (see [3]) we can prove the existence and uniqueness of the solution to (2),(3) and check that $u(s, x)$ given by (3) is a (generally speaking) generalized solution of the Cauchy problem

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2}\text{Tr}u''(A(s, x, u), A(s, x, u)) + (a(s, x, u), u') = 0, u(t, x) = f(x), t \geq s. \quad (4)$$

The next extension of the theory is connected with the so called multiplicative operator functionals of Markov processes and allows to apply the above results to systems of PDE and state smooth property of $u(s, x)$.

Let H_1 be another Hilbert space, $\dim H_1 = m \leq \infty$, $c(s, x) \in L(H_1)$, $C(s, x) \in L_{12}(H, L(H_1))$ where $L(H_1)$ is a space of bounded linear operators in H_1 . Consider a system

$$d\xi = a(\xi(\theta), v(t - \theta, \xi(\theta)))d\theta + A(\xi(\theta), v(t - \theta, x(\theta)))dw, \quad (5)$$

$$d\eta = c(\xi(\theta), v(t - \theta, \xi(\theta)))\eta(\theta)d\theta + C(\xi(\theta), v(t - \theta, x(\theta)))(\eta(\theta), dw), \quad (6)$$

$$(h, v(t, x)) = E(\eta(t), f(\xi(t))), \xi(0) = x \in H, \eta(0) = h \in H_1. \quad (7)$$

Systems of this type were studied in [3],[4]. In particular there were stated conditions on coefficients and initial data to ensure the existence and uniqueness of solution to (5)-(7) and to prove that $v(t, x)$ determined by (7) is a generalized solution to

$$\frac{\partial v_l}{\partial t} = \frac{1}{2}\text{Tr}v_l''(A, A) + (v_l', a) + \sum_{k=1}^n \sum_{q=1}^m C_{lq}^k(v_l', A^k) + \sum_{q=1}^m c_{lq}v_q, v_l(0, x) = f_1(x). \quad (8)$$

Notice that in general case we can prove only the existence of a local (in time) solution and state some conditions leading to the existence of a global solution.

Further development of the theory is connected with applying the whole machinery to the fully nonlinear parabolic equations and systems as well as treating all the problems in the framework of smooth manifolds and fibre bundles rather than linear spaces.

Actually the probabilistic approach described above could be directly applied to the investigation of the solution to the Cauchy problem for nonlinear equations

and systems. One more extension allows to apply the above approach to investigation of the first initial boundary value problem in a smooth bounded region $G \subset \mathbb{R}^n$ for PDEs and systems [5],[6].

To deal with Dirichlet boundary conditions in elliptic case and first initial boundary value problem in parabolic case one could reduce the problem under investigation to the auxiliary Cauchy problem. This reduction is based on an observation due to Krylov [7] which allows to reduce the first initial boundary-value problem for a parabolic equation in a domain $G \subset \mathbb{R}^n$ with a smooth boundary $\partial G = \{x \in \mathbb{R}^n : \psi(x) = 0\}$ to an auxiliary Cauchy problem on a surface $G \subset \mathbb{R}^{n+4}$ determined by

$$U = \{y = (x, \hat{y}) \in \mathbb{R}^{n+4} : \psi(x) = \sum_{i=n+1}^{n+4} \hat{y}_i^2 > 0\}.$$

To explain how one could apply SDE theory to construct a solution to a Cauchy problem for a fully nonlinear PDE consider the problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \Phi(t, x, u, u', u'') = 0, u(0, x) = f(x) \quad (9)$$

and reduce it to a system of quasilinear parabolic equations with respect to a function $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ where $v_1 = u, v_2 = u', v_3 = u'', v_4 = u'''$. To this end let us differentiate (9) with respect to x variable and notice that the resulting system could be rewritten in the form (8) under some assumptions on the data in (9).

To be more precise assume that $\Phi(t, x, u, p, r)$ defined on $[0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2}$ is at least three times continuously differentiable with respect to (x, u, p, r) . Let in addition Φ'_r be positive for all values of its arguments and $\Phi'_r = A * A$. Differentiating (9) three times one could see that the resulting system of equations could be rewritten in the form (8) where $a(t, x, v)$ denotes a factor of diagonal first order terms in it, $B(t, x, v)$ is a factor of nondiagonal first order terms and $c(t, x, v)$ is a factor of zero order terms. Let in addition $k(t, x)$ correspond to terms of the form $\Phi'_x(t, x, 0, 0, 0), \dots, \Phi'''(t, x, 0, 0, 0)$.

Finally suppose that there exist positive constants C, C_1, C_2, ρ_1 , positive bounded K and a constant ρ_0 such that

$$\|a(t, x, v) - a(t, x_1, v_1)\|^2 + \sigma^2(A(t, x, v) - A(t, x_1, v_1)) \leq C[\|x - x_1\|^2 + K(v, v_1)\|v - v_1\|^2],$$

$$\|a(t, x_1, v)\|^2 + \sigma^2(A(t, x, v)) \leq C_1[1 + \|x\|^2 + \|v\|^p],$$

$$\sigma^2(B(t, x, v)h) \leq C_2[1 + \|v\|^p], h \in \mathbb{R}^\alpha, \alpha = n + n^2 + n^3 + 1,$$

$$(c(t, x, v)h, h) \leq [\rho_0 + \rho_1\|v\|^p]\|h\|^2,$$

We say C.1 is valid if all above assumptions are satisfied.

Theorem 1. Assume that C.1 is valid. Then there exists a unique (local in time) solution to Cauchy problem (9). If in addition ρ_0 is negative and have large enough

absolute value then there exists a unique global solution to (9). Moreover there exists a Markov process $\xi(t) \in \mathbb{R}^n$ and a multiplicative functional of $\xi(t)$ generated by the process $\eta(t) \in \mathbb{R}^\alpha$ such that the solution to (9) admits the probabilistic representation in terms of $\xi(t)$ and $\eta(t)$.

In fact for a number of interesting fully nonlinear equations and systems the assumption that Φ'_r is nonnegative for all values of its arguments is too strong and should be modified. Eventually it is reasonable to demand Φ'_r to be nonnegative at least on solutions of the problem or on some more or less good subsets of the space of functions valued in $R^n \times R^1 \times R^n \times R^{n^2}$. In this case the probabilistic approach could be used to derive the a priori estimates necessary to allow the application of a fixed point theorem. The corresponding results could be seen in the series of works by N.Krylov devoted to Bellman equation (see [7] and references there). Systems of fully nonlinear parabolic and elliptic equations on this way were studied in [8] .

The work is supported by grant RFBR 96-01-01199.

Bibliographie

- [1] *H. McKean*, A class of Markov processes associated with nonlinear parabolic equations. *Proc.Nat. Acad. Sci. USA* **59**, 6 (1966), 1907-1911 .
- [2] *M. Freidlin*, Quasilinear parabolic equations and measures in function space. *Funct. Anal. Appl.* V. 1, N. 3 (1967), 237-240.
- [3] *Ya. Belopolskaya, Yu. Dalecky*, Investigation of a Cauchy problem for quasilinear parabolic system with finite and infinite dimensional arguments with help of Markov random processes. *Izv. Vysh. Uchebn.Zaved. Math* **2**, 6 (1978), 5-17.
- [4] *Ya. Belopolskaya, Yu. Dalecky*, Markov processes associated with nonlinear parabolic systems. *DAN AN SSSR* V. 250, 1 (1980), 521-524.
- [5] *Ya. Belopolskaya*, Probabilistic approach to solution of nonlinear parabolic equations. *Problems of mathematical analysis* V. 13 (1992), 156-170.
- [6] *Ya. Belopolskaya, Yu. Dalecky*, Stochastic Equations and Differential Geometry. *Kluwer Acad. Publ.* 1990, p. 260.
- [7] *N. Krylov*, Nonlinear elliptic and parabolic equations of second order. Nauka, Moscow 1985, p. 376. *Engl. transi. by Reidel, Dordrecht* 1987.

- [8] *Ya. Belopolskaya*, A priori estimates for solutions to first initial-boundary value problem for systems of fully nonlinear PDE. *Ukr. Math J.* 49, N. 3 (1997), 338-363.

Yana Belopolskaya
St.Petersburg Architecture Building University, Russia and
University of Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, France
2 Krasnoarmejskaya 4, St. Petersburg, Russia
yana@yana.abu.spb.ru

Analyse sur l'espace des matrices symétriques

Nicole Bopp

Le \mathbb{R} -espace vectoriel $V = \text{Sym}(n, \mathbb{C})$ des matrices symétriques $n \times n$ à coefficients dans \mathbb{C} est muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée donnée par $(X|Y) = \text{Re}(\text{trace}(XY))$. Ceci permet de définir la transformée de Fourier d'une « bonne » fonction f définie sur V par

$$[\mathcal{F}f](Y) = \int_V f(X) e^{4i\pi(X|Y)} dX ,$$

où dX est une mesure de Lebesgue sur V . Les propriétés de cette transformation sont bien connues (formule de Plancherel, formule d'inversion) et leur étude est l'objet de *l'analyse harmonique dite commutative* car elle est liée à la structure de groupe commutatif (pour l'addition) de V . En particulier les applications $X \mapsto e^{4i\pi(X|Y)}$ sont les morphismes du groupe V dans le groupe multiplicatif $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

D'autre part le groupe $G = GL(n, \mathbb{C})$ opère sur V par

$$(G \times V) \ni (g, X) \mapsto gX^t g \text{ où } {}^t g \text{ est la transposée de la matrice } g .$$

C'est une représentation de G sur V c'est-à-dire un morphisme de groupe de G dans $GL(V)$. Les représentations sont les objets (remplaçant les exponentielles) permettant de faire *l'analyse harmonique dite non commutative* des espaces de fonctions sur G .

Ces deux analyses faites simultanément (mises en valeur dans [8] pour l'action de $GL(n, \mathbb{C}) \times GL(n, \mathbb{C})$ sur $M(n, \mathbb{C})$) font l'intérêt de cet espace qui est un cas particulier d'exemples plus généraux à savoir les algèbres de Jordan [6] ou certains espaces préhomogènes [7].

Le groupe G admet une seule orbite ouverte qui est dense dans V à savoir

$$\Omega = \{g I {}^t g \mid g \in G\} = \{X \in V \mid \det X \neq 0\} .$$

Comme le stabilisateur dans G de la matrice identité I est égal au groupe $H = O(n, \mathbb{C})$, l'ouvert Ω est homéomorphe à l'espace G/H qui est un espace symétrique réductif. En effet G est un groupe réductif c'est-à-dire égal au produit de son centre par un groupe semi-simple (ici $SL(n, \mathbb{C})$) et H est le

sous-groupe des points fixes de l'involution σ de G donnée par $\sigma(g) = {}^t g^{-1}$ pour $g \in G$. Les problèmes posés par l'analyse harmonique des espaces de fonctions sur G/H sont exposés dans [1].

Nous allons tout d'abord examiner le cas des fonctions les plus simples sur V à savoir

1. Les fonctions polynomiales sur V

La représentation de G sur V induit une représentation de G sur l'espace $\mathcal{P}(V)$ des fonctions polynomiales sur V (c'est-à-dire des fonctions qui s'expriment comme des polynômes en les coefficients d'une matrice symétrique) donnée par

$$G \ni g \mapsto [\mathcal{P}(V) \ni P \mapsto g.P] \text{ où } (g.P)(X) = P({}^t g X g) \text{ (} X \in V \text{)} .$$

Une question naturelle en théorie des représentations est la suivante :

Peut-on décomposer $\mathcal{P}(V)$ en somme directe de sous-espaces minimaux stables sous l'action de G ?

La restriction de la représentation de G à un tel sous-espace est dite irréductible.

Il est clair que les sous-espaces des polynômes homogènes (qui sont de dimension finie) sont stables sous l'action du groupe G . La théorie classique des représentations de dimension finie des groupes réductifs permet alors d'affirmer que la réponse est positive et d'écrire facilement la décomposition.

Pour cela on introduit les polynômes $V \ni X \mapsto \Delta_j(X) (j = 1, \dots, n)$ qui sont les mineurs principaux de la matrice X , Δ_n étant le déterminant. Pour $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathbb{N}^n$ on note Δ^ℓ le polynôme $\prod_{j=1}^n \Delta_j^{\ell_j}$ et on appelle \mathcal{P}_ℓ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}(V)$ engendré par les $g.\Delta^\ell$ pour $g \in G$. Le théorème ci-dessous est connu depuis longtemps. On peut en trouver une démonstration dans [6] p. 226 ou dans [7] p. 417.

Théorème 1. *L'espace $\mathcal{P}(V)$ se décompose en*

$$\mathcal{P}(V) = \bigoplus_{\ell \in \mathbb{N}^n} \mathcal{P}_\ell .$$

Pour tout $\ell \in \mathbb{N}^n$ l'espace \mathcal{P}_ℓ est stable sous l'action de G et la représentation de G sur cet espace est irréductible.

On montre aisément qu'on obtient ainsi presque toutes les représentations irréductibles de dimension finie de G admettant un vecteur H -invariant c'est-à-dire un élément $Q \in \mathcal{P}_\ell$ tel que $h.Q = Q$ pour tout $h \in H$. Ce polynôme Q est obtenu en intégrant sur le groupe compact $O(n)$ (pour la mesure de Haar) la famille des $h.\Delta^\ell$ ($h \in O(n)$).

Il est alors naturel de généraliser les fonctions Δ^ℓ à des puissances non entières. On considère donc

2. Les fonctions Δ_ℓ^s

Elles sont définies pour $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{C}^n$ et $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathbb{Z}^n$ par

$$\Delta_\ell^s(X) = \prod_{j=1}^n |\Delta_j(X)|^{s_j} \times \left(\frac{\Delta_j(X)}{|\Delta_j(X)|} \right)^{\ell_j} \quad (X \in V) .$$

Bien entendu elles ne sont pas définies aux zéros des mineurs. Si $\text{Res}_j > 0$ pour $j = 1, \dots, n$ on peut cependant les considérer comme des distributions tempérées c'est-à-dire considérer les applications qui à une fonction f appartenant à l'espace de Schwartz sur V ($f \in \mathcal{S}(V)$) associent

$$Z(f, s, \ell) = \int_V f(X) \Delta_\ell^s(X) dX .$$

Un résultat classique de [2] montre qu'on peut les prolonger méromorphiquement en s en des distributions encore tempérées. Une question naturelle est

Où se trouvent les singularités de ce prolongement méromorphe ?

Dans le cas où $n = 1$ ($V = \mathbb{C}$), $Z(f, s, \ell)$ est la fonction zêta locale (pour le corps \mathbb{C}) définie par Tate (Voir [9] pour comprendre la relation entre la fonction zêta classique et les fonctions zêta de Tate, dites locales, car associées aux corps locaux). Tate obtient une description des pôles en introduisant la transformée de Fourier $\mathcal{F}f$ d'une fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{C})$ et en démontrant la relation suivante :

$$Z(f, s, \ell) = \rho(s, \ell) Z(\mathcal{F}f, -s - 2, -\ell) ,$$

où $\rho(s, \ell)$ est une fonction méromorphe dont on connaît explicitement les pôles car c'est un quotient de fonctions gammas. On peut alors conclure car $Z(f, s, \ell)$ est holomorphe pour $\text{Res} > -2$ et $Z(\mathcal{F}f, -s - 2, -\ell)$ est holomorphe pour $\text{Res} < -1$.

Dans le cas où $n > 1$, nous avons obtenu une relation analogue ([3] p.724) :

Théorème 2. Pour $f \in \mathcal{S}(V)$ on a

$$Z(f, s, \ell) = \gamma(s, \ell) Z(\mathcal{F}^* f, v(s) - (n+1), v(\ell)) ,$$

où $v(s) = (s_{n-1}, s_{n-2}, \dots, s_1, -s_1 - \dots - s_n)$, $s - m = (s_1, \dots, s_{n-1}, s_n - m)$,
où $\gamma(s, \ell)$ est une fonction méromorphe dont on connaît explicitement les pôles et où \mathcal{F}^* est la transformation de Fourier « tordue » ainsi

$$[\mathcal{F}^* f](X) = [\mathcal{F} f](\gamma X \gamma) \text{ où } \gamma = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} .$$

Ce résultat permet de déterminer les singularités dans certains domaines de \mathbb{C}^n mais pas partout. Pour autant que je sache le problème est encore ouvert.

3. Intérêt des $Z(f, s, \ell)$ pour l'analyse harmonique de $L^2(G/H)$

On considère maintenant non plus la mesure dX qui est invariante par translations sur V mais la mesure $d^*X = \frac{dX}{|\Delta_n(X)|^{n+1}}$ qui, elle, est une mesure sur $\Omega \simeq G/H$ invariante sous l'action de G . L'action de G sur Ω induit, comme dans le cas des fonctions polynomiales, une représentation de G sur l'espace $L^2(G/H)$ des fonctions de carré intégrable (relativement à la mesure d^*X) sur G/H . Cette représentation est *unitaire* car $L^2(G/H)$ est muni naturellement d'une structure d'espace de Hilbert et tout élément de G est envoyé sur un opérateur unitaire de cet espace.

L'espace $L^2(G/H)$ se décompose cette fois non pas en somme mais en intégrale hilbertienne ([5]) d'une famille (paramétrée par un espace topologique Λ) de représentations irréductibles de G sur des espaces de Hilbert \mathcal{H}_λ ($\lambda \in \Lambda$) ([1] p.73). Les résultats de Delorme, van den Ban et Schlichtkrull (voir [1]) décrivant cette décomposition (c'est ce qu'on appelle la formule de Plancherel sur G/H) impliquent qu'ici Λ est une partie de $\{(s, \ell) | s \in \mathbb{C}^n; \ell \in \mathbb{Z}^n\}$. Ceci vient du fait que ces représentations admettent des vecteurs H -invariants qui à peu de choses près sont les distributions $Z(f, s, \ell)$.

On modifie cette fois la transformée de Fourier $\mathcal{F}f$ d'une fonction $f \in L^2(\Omega)$ en posant

$$(\tilde{\mathcal{F}}f)(Y) = |\Delta_n(Y)|^{-\frac{n+1}{2}} \mathcal{F}\left(|\Delta_n(X)|^{-\frac{n+1}{2}} f(X^{-1})\right) \text{ pour } Y \in \Omega .$$

On vérifie que l'opérateur $\tilde{\mathcal{F}}$ est un opérateur unitaire sur $L^2(G/H)$ et commute à l'action de G . On sait que si un endomorphisme Γ a toutes ses valeurs propres distinctes, un endomorphisme F commutant avec Γ opère scalairement sur chacun des sous-espaces propres. On montre de même que $\tilde{\mathcal{F}}$ opère scalairement sur chacun des espaces de Hilbert \mathcal{H}_λ ($\lambda \in \Lambda$). Si $c(\lambda)$ est le scalaire correspondant on déduit du théorème 2 le

Théorème 3. *Si λ correspond au paramètre (s, ℓ) alors*

$$c(\lambda) = \gamma(s, \ell) .$$

Remarque 1. – E.M. Stein ([8]) calcule les $c(\lambda)$ en utilisant la formule de Plancherel sur $GL(n, \mathbb{C})$ puis en déduit le théorème 2 alors que nous déduisons le théorème 3 (qui donne des informations sur l'analyse harmonique de G/H) du théorème 2.

Remarque 2. – On peut bien entendu tenter le même genre d'analyse pour les matrices symétriques réelles. La situation se complique car il y a plusieurs orbites ouvertes qui sont homéomorphes respectivement aux espaces symétriques $GL(n, \mathbb{R})/O(p, q)$ pour $p+q = n$. Nous obtenons un résultat analogue au théorème 2 ([4]).

Bibliographie

- [1] *E. van den Ban, M. Flensted-Jensen, H. Schlichtkrull*, Basic harmonic analysis on pseudo-riemannian symmetric spaces, in *Non compact Lie groups and some of their applications*, Kluwer Ac. Publ., (1994), 69-101.
- [2] *I.N. Bernstein, S.I. Gelfand*, Meromorphic Properties of the P^λ , *Funct. Anal. Appl.*, **3**, (1969), 68-69.
- [3] *N. Bopp, H. Rubenthaler*, Fonction zêta associée à la série principale sphérique de certains espaces symétriques, *Ann. Scient. de l'E.N.S.*, **26**, (1993), 701-745.
- [4] *N. Bopp, H. Rubenthaler*, Une fonction zêta associée à certaines familles d'espaces symétriques réels, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **325**, (1997), 355-360.
- [5] *J. Dixmier*, Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien, *Gauthier-Villars, Paris*, (1969).
- [6] *J. Faraut, A. Koranyi*, Analysis on Symmetric Cones, *Oxford Science Publ.*, (1994).

- [7] *H. Rubenthaler, G. Schiffmann*, Opérateurs différentiels de Shimura et espaces préhomogènes, *Invent. Math.* **90**, (1987), 409-442.
- [8] *E.M. Stein*, Analysis in matrix spaces and some new representations of $SL(n, \mathbb{C})$, *Ann. Math.* **86**, (1967), 461-490.
- [9] *J.T. Tate*, Fourier analysis in number field theory and Hecke's zeta-function, in *Algebraic number theory (Cassels and Fröhlich editors)*, *Acad. Press*, (1967), 305-347.

IRMA et Département de Mathématiques
Université Louis Pasteur
7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex
bopp@math.u-strasbg.fr

Filtrage d'un processus partiellement observé dans le cas d'un grand rapport signal-bruit pour un système corrélé

Marie-Noelle Dietsch

Nous nous proposons d'étudier un problème de filtrage non linéaire dans le cas d'un grand rapport signal-bruit, lorsque seule une des composantes du signal est observée.

Un problème de filtrage comporte deux équations, l'une régissant un signal que nous noterons X_t et l'autre donnant une observation notée Y_t (qui est connue), le signal dépendant de l'observation et cherchant à être estimé grâce à la connaissance de ces observations. En fait nous cherchons à calculer la meilleure approximation de la loi de X_t grâce aux observations de Y jusqu'à l'instant t : il s'agit de la loi conditionnelle de X_t sachant $\mathcal{Y}_t = \sigma(Y_s, 0 \leq s \leq t)$, la tribu engendrée par les trajectoires de l'observation jusqu'au temps t (c'est-à-dire le passé des observations). Pour ce faire, nous définissons, pour toute fonction continue φ , le filtre π_t associé au problème de filtrage par $\pi_t(\varphi) = E[\varphi(X_t)/\mathcal{Y}_t]$, qui représente la loi conditionnelle de X_t sachant \mathcal{Y}_t et le filtre non normalisé ρ_t associé au problème de filtrage par $\rho_t(\varphi) = \tilde{E}[\varphi(X_t)\Gamma_t/\mathcal{Y}_t]$ (la probabilité \tilde{P} sous laquelle nous prenons l'espérance conditionnelle et le processus Γ_t seront définis dans la suite). Ces filtres sont reliés par la formule de Kallianpur-Striebel (voir [4]) $\pi_t(\varphi) = \frac{\rho_t(\varphi)}{\rho_t(1)}$. Nous montrons alors que le filtre est solution d'une équation aux dérivées partielles stochastique appelée l'équation de Kushner-Stratonovitch et que le filtre non normalisé est solution d'une équation aux dérivées partielles stochastique linéaire, l'équation de Zakai, qui est utilisée numériquement.

Nous nous plaçons dans un cas particulier où le signal X_t est de dimension deux, c'est-à-dire que $X_t = (X_t^1, X_t^2)$ et que seule la composante X_t^1 dépend de l'observation, c'est pourquoi nous parlons de processus partiellement observé. De plus, nous faisons dépendre l'observation d'un paramètre ε qui est supposé petit et qui entraîne un grand rapport entre le signal et le bruit (i.e. le processus de Wiener) dont dépend l'observation.

Soient donc ε un réel strictement positif et $X_t = (X_t^1, X_t^2)$ et Y_t le couple de martingales solution du problème de filtrage suivant

$$\begin{cases} X_t^1 = X_0^1 + \int_0^t f_1(X_s^1, X_s^2)ds + \int_0^t k(X_s^1)dV_s^1 \\ X_t^2 = X_0^2 + \int_0^t f_2(X_s^1, X_s^2)ds + \int_0^t l(X_s^2)dV_s^2 + \int_0^t b(X_s^2)dW_s \\ Y_t = \int_0^t h(X_s^1)ds + \varepsilon W_t \end{cases} \quad (1)$$

où V_t^1, V_t^2, W_t sont des processus de Wiener unidimensionnels indépendants, f_1, f_2, k, l, b et h appartiennent à $C_b^3(\mathbb{R})$, $k \neq 0$, h est injective par rapport à X^1 et il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < h'(x)$.

De plus, nous supposons que pour tout (x^1, x^2) dans \mathbb{R}^2 , la fonction g définie par $g(x^1, x^2) = \int_0^{x^1} [k^2(u)]^{-1} f_1(u, x^2) du$ est bornée ainsi que ses trois premières dérivées.

Les filtres approchés associés à de tels problèmes ont été étudiés, pour des processus unidimensionnels avec $b = 0$ et g constant par R.Katzur, B.Bobrovski et Z.Schuss [5] et par A.Bensoussan [1]. J.Picard [7] a étudié ce problème dans le cas d'une diffusion vectorielle avec $b = 0$. Le cas X dans \mathbb{R}^2 et $b = 0$ a été traité par A.Gégout-Petit [3] et nous généralisons ce résultat lorsque $b \neq 0$.

Nous voulons donc déterminer les équations du filtrage pour (1), i.e. trouver une bonne approximation de la loi de X_t sachant $\mathcal{Y}_t = \sigma(Y_s, 0 \leq s \leq t)$, ce qui revient dans notre cas, comme h observe X^1 , à calculer $E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{Y}_t]$ pour φ variant dans une grande classe de fonctions (car il est alors facile de calculer une bonne approximation de $E[X_t^1/\mathcal{Y}_t]$).

Nous allons utiliser une méthode de filtres approchés (voir A.Gégout-Petit [3]) de la façon suivante : Y.Takeuchi et H.Akashi (voir [8]) ont montré que $E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{Y}_t]$ tend en probabilité vers $E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{X}_t^1]$ quand ε tend vers 0, ce qui nous ramène à un problème de filtrage où X^2 est le signal et X^1 l'observation. Nous cherchons alors un filtre approché pour $E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{X}_t^1]$ et l'ordre de ce filtre approché par rapport à $E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{Y}_t]$. Ensuite nous établissons une équation de type Kushner-Stratonovitch pour le filtre approché (équation qui aura l'avantage d'être indépendante de X^1 , ce qui n'est pas le cas de l'équation de Kushner-Stratonovitch vérifiée par $E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{Y}_t]$, et nous aurons alors une estimation de $E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{Y}_t]$ par passage à la limite quand ε tend vers 0 grâce à la continuité du filtre par rapport à l'observation (voir M.Chaleyat-Maurel et D.Michel [2]).

1 Un filtre approché pour X^1

Considérons le processus stochastique $M_t = X_0^1 + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t k(M_s)(dY_s - h(M_s)ds)$.

Théorème 1. *Soit $T > 0$ fixé. Sous la probabilité P nous avons, pour tout $t \in [0, T]$,*

$$X_t^1 - M_t = O(\sqrt{\varepsilon}) \text{ et } E[X_t^1/\mathcal{Y}_t] - M_t = O(\sqrt{\varepsilon}).$$

Remarque. *Nous disons alors que M_t est un filtre approché d'ordre $\sqrt{\varepsilon}$ de X_t^1 . Avoir un filtre approché pour X^1 nous permettra de trouver l'ordre entre $E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{Y}_t]$ et son filtre approché μ_t , car la différence $E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{Y}_t] - \mu_t$ s'exprime en fonction de $X_t^1 - M_t$ dont nous connaissons à présent l'ordre.*

2 Un changement de probabilité

Soit Γ_t le processus stochastique défini par

$$\Gamma_t = \exp \left(\int_0^t [k^2(X_s^1)]^{-1} f_1(X_s^1, X_s^2) dX_s^1 - \frac{1}{2} \int_0^t [k^{-1}(X_s^1) f_1(X_s^1, X_s^2)]^2 ds \right)$$

Supposons que $E(\Gamma_t^{-1}) = 1$ pour tout $t \geq 0$.

Alors, d'après le théorème de Girsanov, sous la probabilité \tilde{P} définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ par $\left. \frac{d\tilde{P}}{dP} \right|_{\mathcal{F}_t} = \Gamma_t^{-1}$, le processus stochastique $\tilde{X}_t^1 = \int_0^t k^{-1}(X_s^1) dX_s^1$ est un \mathcal{F}_t -processus de Wiener.

De plus, si nous supposons que $\mathcal{X}_t^1 = \tilde{\mathcal{X}}_t^1$, alors, sous \tilde{P} , le processus stochastique X_t^1 est indépendant de V_t^2 et W_t .

Par ailleurs, en appliquant la formule d'Itô à $g(X_t^1, X_t^2)$ nous obtenons

$$\begin{aligned} \Gamma_t = \exp & \left(g(X_t^1, X_t^2) - g(X_0^1, X_0^2) - \int_0^t (\mathcal{L}_{s, X_s^1} g)(X_s^2) ds \right. \\ & + \int_0^t k^{-1}(X_s^1) f_1(X_s^1, X_s^2) \frac{\partial k}{\partial x_1}(X_s^1) ds - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_s^1, X_s^2) ds \\ & - \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x_2}(X_s^1, X_s^2) b(X_s^2) dW_s - \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x_2}(X_s^1, X_s^2) l(X_s^2) dV_s^2 \\ & \left. - \frac{1}{2} \int_0^t [k^{-1}(X_s^1) f_1(X_s^1, X_s^2)]^2 ds \right) \end{aligned}$$

où $(\mathcal{L}_{s, X_s^1} g)(X_s^2) = \frac{\partial g}{\partial x_2}(X_s^1, X_s^2) f_2(X_s^1, X_s^2) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(X_s^1, X_s^2) (l^2(X_s^2) + b^2(X_s^2))$.

Alors, pour toute trajectoire $x \in C([0, T]; \mathbb{R})$ définissons $X_t^2(x)$ et $\Gamma_t(x)$ en remplaçant, dans la définition de X_t^2 et dans l'expression de Γ_t ci-dessus, X_s^1 par x et X_s^2 par $X_s^2(x)$.

Remarque. h étant injective par rapport à X^1 , X^1 peut être considéré comme étant l'observation du système (1), et il est alors naturel de faire un changement de probabilité par rapport à X^1 .

3 Un filtre approché pour $E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{Y}_t]$

Dans le but de définir un filtre approché μ_t pour $E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{Y}_t]$, posons $\tilde{X}_t^2 = X_t^2(M)$, $\tilde{\Gamma}_t = \Gamma_t(M)$ et définissons alors, pour tout $\varphi \in C_b^2(\mathbb{R})$, $\mu_t(\varphi) = \frac{\tilde{E}[\varphi(\tilde{X}_t^2) \tilde{\Gamma}_t / \mathcal{M}_t]}{\tilde{E}[\tilde{\Gamma}_t / \mathcal{M}_t]}$

En fait, le processus stochastique X^1 étant proche de M , nous nous attendons à ce que $\mu_t(\varphi)$ soit proche de $\frac{\tilde{E}[\varphi(X_t^2) \Gamma_t / \mathcal{M}_t]}{\tilde{E}[\Gamma_t / \mathcal{M}_t]} = E[\varphi(X_t^2) / \mathcal{X}_t^1]$ (cette relation

est la formule de Kallianpur-Striebel) et alors, comme $E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{Y}_t]$ tend vers $E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{X}_t^1]$ en probabilité lorsque ε tend vers 0, nous pensons obtenir un processus stochastique proche de $E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{Y}_t]$.

Proposition 1. *Soit $T < \infty$ fixé. Si pour tout $\varphi \in C_b^2(\mathbb{R})$, il existe n tel que*

$$\tilde{E}[\varphi(X_t^2)\Gamma_t/\mathcal{Y}_t] - \tilde{E}[\varphi(\tilde{X}_t^2)\tilde{\Gamma}_t/\mathcal{Y}_t] = O(\varepsilon^n),$$

alors, pour tout $t \in [0, T]$, $\mu_t(\varphi) - E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{Y}_t] = O(\varepsilon^n)$.

Théorème 2. *Soit $T > 0$ fixé. Alors pour tout $t \in [0, T]$ nous avons*

$$\tilde{E}[\varphi(X_t^2)\Gamma_t/\mathcal{Y}_t] - \tilde{E}[\varphi(\tilde{X}_t^2)\tilde{\Gamma}_t/\mathcal{Y}_t] = O(\sqrt{\varepsilon})$$

4 Une équation pour le filtre approché $\mu_t(p)$

Dans cette partie nous obtenons une équation de type Zakai pour $\sigma_t(\varphi) = \tilde{E}[\varphi(\tilde{X}_t^2)\tilde{\Gamma}_t/\mathcal{Y}_t]$ (qui est un filtre approché d'ordre $\sqrt{\varepsilon}$ du filtre non normalisé) et ensuite une équation de type Kushner-Stratonovitch pour $\mu_t(\varphi)$ (qui est un filtre approché d'ordre $\sqrt{\varepsilon}$ du filtre), indépendante de X^1 .

Théorème 3. *Pour tout $\varphi \in C_b^2(\mathbb{R})$, $\sigma_t(\varphi)$ est solution de l'équation de type Zakai suivante :*

$$\begin{aligned} \sigma_t(\varphi) &= \sigma_0(\varphi) + \int_0^t \sigma_s(\mathcal{L}_{s, M_s} \varphi) ds + \int_0^t \sigma_s \left(\frac{1}{\varepsilon} \varphi' b (h(M_s) - h(X_s^1)) \right) ds \\ &+ \int_0^t \sigma_s (k^{-1}(M_s) f_1(M_s, \cdot) \varphi' b) ds + \int_0^t \sigma_s (k^{-2}(M_s) f_1(M_s, \cdot) \varphi + k^{-1}(M_s) \varphi' b) dM_s. \end{aligned}$$

Théorème 4. *Pour tout $\varphi \in C_b^2(\mathbb{R})$, $\sigma_t(\varphi)$ est solution de l'équation de type Kushner-Stratonovitch suivante :*

$$\begin{aligned} \mu_t(\varphi) &= E[X_0^2] + \int_0^t \left(\mu_s(\mathcal{L}_{s, M_s} \varphi) + \mu_s \left(\frac{1}{\varepsilon} (h(M_s) - h(X_s^1)) \varphi' b \right) + \mu_s (k^{-1}(M_s) f_1(M_s, \cdot) \varphi' b) \right) ds \\ &+ \int_0^t \left[\mu_s (k^{-2}(M_s) f_1(M_s, \cdot) \varphi + k^{-1}(M_s) \varphi' b) - \mu_s(\varphi) \mu_s (k^{-2}(M_s) f_1(M_s, \cdot)) \right] \\ &\quad \times [dM_s - \mu_s (k^{-2}(M_s) f_1(M_s, \cdot)) k^2(M_s) ds]. \end{aligned}$$

L'article complet contenant ces résultats est à paraître dans *Stochastic Analysis and Applications*.

Bibliographie

- [1] *A. Bensoussan*, On some approximation techniques in nonlinear filtering. *Stochastic Differential Systems, Stochastic Control and Application*, (Mineapolis 1986), Springer (1988).
- [2] *M. Chaleyat-Maurel, D. Michel*, Une propriété de continuité en filtrage non linéaire, *Stochastics* **19** (1986), 11-40.
- [3] *A. Gegout-Petit*, Filtrage d'un processus partiellement observé et équations différentielles stochastiques rétrogrades réfléchies, *Thèse*, Université de Provence (1995).
- [4] *G.Kallianpur*, Stochastic filtering theory, Springer (1980).
- [5] *R.Katzenberg, B.Bobrovski, Z.Schuss*, Asymptotic analysis of the optimal filtering problem for one-dimensional diffusions measured in a low noise Chanel. *SIAM J. Applied Math.* **44** (1984) Part I : 591-604, Part II : 1176-1191.
- [6] *E.Pardoux*, Filtrage non linéaire et équations aux dérivées partielles stochastiques associées, Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XIX, *Lectures Notes in Mathematics* **1464**, Springer Verlag, Berlin (1991) 67-163.
- [7] *J.Picard*, Filtrage de diffusions vectorielles faiblement bruitées, Analysis and Optimisation of Systems, *Lectures Notes in Control and Informatic Sciences* **83**, Springer (1986).
- [8] *Y. Takeuchi and H.Akashi*, Least-squares state estimation of systems with state dependent observation noise, *Ann. of Probability*, **6** (1978), 19-41.
- [9] *M. Zakai*, On the optimal filtering of diffusion processes, *Zeit. Wahr. Verw. Gab.*, **11** (1969), 230-243.

Département de Mathématiques
Université de Metz
Ile du Saulcy, BP 80794, F-57012 Metz FRANCE
dietsch@poncelet.sciences.univ-metz.fr

Maria Doudéková-Puydebois

*Équipe DSA, rattachée à l'Institut de Mathématiques de Luminy
CMI, Université de Provence
39, rue F. Joliot Curie, 13534 Marseille cedex 13*

Domaine de Recherche

Le domaine de recherche dans lequel je m'investis est à l'intersection de la Théorie Ergodique, de la Théorie des Nombres et des Systèmes Dynamiques. Plus précisément, je me suis intéressée aux systèmes de numérations généralisés et à leur représentation comme des systèmes symboliques. L'action d'additionner 1 dans l'ensemble des entiers est décrite comme une action sur un espace symbolique, mais aussi comme une transformation ergodique sur l'intervalle unité. Ces transformations peuvent être vues comme l'action du shift (décalage) sur un espace symbolique associé à une substitution.

L'article de départ a été "*Odometers and systems of numérations*" de Grabner, Liardet et Tichy [Gra-Li-Ti]. Une première étape a été l'étude de la dynamique provenant de l'addition de 1 sur les entiers en tant que dynamique sur l'intervalle $[0, 1[$. L'application d'additionner 1, appelée odomètre, est définie relativement à une base de numération et aux développements des entiers dans cette base. La famille étudiée $\Lambda^{(q)}$ est très proche de la base q -adique classique, ($q \geq 2$ entier), mais la dynamique associée s'en éloigne nettement. Cette base de numération est intéressante, car l'odomètre correspondant n'est plus défini sur un groupe, comme c'est le cas pour les bases q -adique, de Cantor ou d'Ostrowski (voir [Gra-Li-Ti]).

La transformation sur $[0, 1[$ correspondant à l'odomètre associé à $\Lambda^{(q)}$ est construite par la méthode géométrique cutting-stacking (couper-empiler) introduite par Friedman [Frie]. Nous montrons que cette transformation de $[0, 1[$ est une transformation d'échange d'intervalles et qu'elle est métriquement isomorphe à l'odomètre étudié.

Sur certaines transformations issues de systèmes de numérations

Maria Doudéková-Puydebois

Les odomètres associés à des systèmes de numération ont de nombreuses propriétés topologiques et métriques. Dans [Gra-Li-Ti] une présentation générale du sujet est donnée et les odomètres généralisés sont introduits. L'exemple classique est le q -odomètre, relié à la base de numération $1, q, q^2, \dots$ des puissances d'un entier $q \geq 2$. L'odomètre étudié ici est proche du q -odomètre par sa définition arithmétique, mais ses propriétés dynamiques sont très différentes. Ces odomètres sont décrits comme des transformations sur l'intervalle unité. D'autre part, on peut aussi en donner une représentation symbolique.

Un système (ou base) de numération G est une suite strictement croissante d'entiers $(G_n)_n$ avec $G_0 = 1$. Chaque entier N a une représentation unique donnée par la propriété

$$\forall \ell \geq 0, \quad e_\ell \geq 0 \quad \& \quad e_0 G_0 + e_1 G_1 + \dots + e_\ell G_\ell < G_{\ell+1}$$

avec $N = \sum_{0 \leq j \leq k} e_j G_j$. La représentation de tout entier dans la base G est une suite de l'espace produit $X_G = \prod_{\ell=0}^{\infty} \{0, \dots, n_\ell\}$, où n_ℓ est le plus grand entier vérifiant $0 < n_\ell \leq G_{\ell+1}/G_\ell$. L'espace X_G , muni de la topologie produit des topologies discrètes, est un espace métrisable compact.

Les suites vérifiant (1) sont appelées suites G -admissibles et sont des éléments de X_G . On notera \mathcal{K}_G l'ensemble compact des suites admissibles, appelé aussi le G -compactifié de \mathbb{N} , et il sera muni de la topologie induite de la topologie produit sur X_G .

Définition. *L'addition de 1 sur les entiers naturels, prolongée aux suites G -admissibles, définit une application $\tau : \mathcal{K}_G \rightarrow \mathcal{K}_G$, appelée G -odomètre. Le système (\mathcal{K}_G, τ) est également appelé G -odomètre.*

La famille des systèmes de numération considérés $\{\Lambda^{(q)}, q \geq 2\}$, est donnée par la relation de récurrence

$$\Lambda_{n+1}^{(q)} = q\Lambda_n^{(q)}.$$

Nous noterons aussi $\Lambda = \Lambda^{(q)}$ et nous avons un premier résultat :

Théorème. *Les suites Λ -admissibles sont un sous-ensemble de $\{0, 1, \dots, q\}^\infty$, donné par*

$$\mathcal{K}_\Lambda = \{0, 1, \dots, q-1\}^\infty \cup \bigcup_{n \geq 0} 0^{(n)} q \{0, 1, \dots, q-1\}^\infty$$

La connaissance des suites Λ -admissibles permet de décrire explicitement l'odomètre τ associé. Une question importante est la continuité de τ sur \mathcal{K}_G , la continuité en un point $x \in \mathcal{K}_G$ pouvant être exprimée par le fait que, si un autre point $y \in \mathcal{K}_G$ est suffisamment proche de x , c'est-à-dire si x et y ont un début identique suffisamment long, leurs images par τ sont arbitrairement proches.

Proposition. *L'application $\tau : \mathcal{K}_\Lambda \rightarrow \mathcal{K}_\Lambda$ est injective, non surjective, n'est pas continue.*

La méthode géométrique du cutting-stacking [Frie] permet de représenter l'odomètre associé à $\Lambda^{(q)}$ comme une transformation T d'échange infini d'intervalles sur $[0, 1[$. À l'aide de cette construction, nous prouvons aussi l'ergodicité, le mélange faible et l'absence de mélange fort de T . Nous montrons également que le spectre du système correspondant au cas étudié est continu, alors que celui du cas q -adique est discret.

Nous étudions aussi le système dynamique symbolique correspondant à l'odomètre T . Ce système est engendré par des substitutions non primitives, ayant un point fixe non minimal. Nous faisons un parallèle avec la transformation de Chacon [Cha], qui est proche de $\Lambda^{(3)}$ et a les mêmes propriétés métriques. Néanmoins, les constructions par cutting-stacking pour les systèmes de Chacon et celui associé à $\Lambda^{(3)}$ sont différentes, la substitution de Chacon ayant un point fixe minimal.

Une autre motivation de cette étude est la recherche de suites de $[0, 1[$ de faible discrédance. La discrédance $D_N(x)$ d'ordre N permet de mesurer la répartition d'une suite $x = x_0, x_1, \dots$ dans $[0, 1[$ et peut être définie par

$$D_N(x) = \sup_{0 \leq a < b \leq 1} \left| \frac{1}{N} \text{card}\{n, 0 \leq n < N \quad \& \quad a \leq x_n, < b\} - (b - a) \right|.$$

Nous nous sommes intéressés au fait que la construction géométrique par cutting-stacking associée à des transformations ergodiques permet d'obtenir des suites dans $[0, 1[$ de faible discrédance. Par exemple, en construisant la transformation de Kakutani par cutting-stacking (voir [Frie]), on génère la suite numérique de Van der Corput, de discrédance faible en $c_0 \frac{\log N}{N}$, où c_0 est une constante (cf. [Kui-Nie]). Pour la transformation de Chacon, on obtient une suite de discrédance en $c_1 \frac{\log N}{N}$, c_1 étant une constante. La famille $\Lambda^{(q)}$ permet de construire aussi des suites de faible discrédance en $c_q \frac{\log N}{N}$, avec des constantes c_q arbitrairement grandes.

Bibliographie

- [Cha] R. Chacon, *Weakly mixing transformations which are not strongly mixing*, Proc. Amer. Math. Soc. **22**, 1969, 559-562.
- [Fr] N. Friedman, *Replication and stacking in Ergodic Theory*, Amer. Math. Monthly **99**, 1992, 31-41.
- [Gra-Li-Ti] P. Grabner, P. Liardet, R. Tichy, *Odometers and systems of numeration*, Acta Arithmetica **LXX. 2**, 1995, 103-123.
- [Kui-Nie] L. Kuipers and H. Niederreiter, *Uniform Distribution of Sequences*, Wiley and Sons, New York London Sydney, Toronto, 1974.

Structure galoisienne des S -unités

Isabelle Dubois

Partons de l'équation diophantienne suivante, appelée équation de Pell :

$$a^2 - b^2d = \pm 1 \tag{*}$$

où $a, b \in \mathbb{Z}$, et d est un entier ≥ 2 sans facteurs carrés congru à 2 ou 3 modulo 4.

Pour comprendre la structure des solutions de (*), il est naturel d'introduire le corps de nombres quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \{x + y\sqrt{d}, x, y \in \mathbb{Q}\}$. C'est un sous-corps de \mathbb{R} et une extension algébrique galoisienne de \mathbb{Q} de degré 2. Son groupe de Galois est composé de deux éléments, l'identité et σ , l'automorphisme de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ défini par $\sigma(x + y\sqrt{d}) = x - y\sqrt{d}$. C'est ainsi que l'ensemble des solutions de (*) est exactement l'ensemble $E_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})} = \{\varepsilon \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}], \varepsilon \times \sigma(\varepsilon) = \pm 1\}$, avec $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{x + y\sqrt{d}, x, y \in \mathbb{Z}\}$ qui est un sous-anneau de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ (appelé anneau d'entiers). Le groupe multiplicatif de l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ n'est rien d'autre que $E_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}$, et est appelé groupe des unités. La structure de ce groupe est connue : il est isomorphe à $\{\pm 1\} \times \mathbb{Z}$ (voir [6], chap. 4.6, p 76). Ainsi, on obtient l'existence d'une unique unité $\varepsilon_1 = a_1 + b_1\sqrt{d} > 1$ telle que toute solution (a, b) de (*) vérifie $a + b\sqrt{d} = \pm \varepsilon_1^n, n \in \mathbb{Z}$. Par exemple, si $d = 94$ alors $\varepsilon_1 = 2143295 + 2221064\sqrt{94}$.

Nous allons maintenant considérer un problème plus général consistant en l'étude de la structure du groupe des S -unités dans une extension galoisienne quelconque de corps de nombres. On consultera [6] et [4] pour la définition des objets qui suivent.

Soit K/k une extension finie de corps de nombres, galoisienne de groupe $G = \text{Gal}(K/k)$. Pour S un ensemble de places (i.e. un ensemble de classes d'équivalence de valeurs absolues) de K contenant l'ensemble S_∞ des places infinies (archimédiennes) de K , et stable par l'action naturelle de G sur les places de K , nous pouvons considérer E_S le groupe des S -unités de K , défini par :

$$E_S = \{x \in K^*, \forall \mathfrak{P} \notin S, v_{\mathfrak{P}}(x) = 0\}$$

($v_{\mathfrak{P}}(x)$ est la valuation associée à une place \mathfrak{P}).

La structure de E_S en tant que groupe abélien est bien connue par le théorème de Dirichlet (voir [4], chap. V.1, p 104) : $E_S \simeq \mu_K \times \mathbb{Z}^{\#S-1}$. Ici, μ_K désigne le groupe des racines de l'unité appartenant à K .

Mais, par choix de S , E_S est aussi un module galoisien, c'est-à-dire un module sur l'anneau de groupe $\mathbb{Z}[G]$; l'action d'un élément $\sum_{g \in G} a_g g \in \mathbb{Z}[G]$ sur une

S -unité x est donnée par :

$$\left(\sum_{g \in G} a_g g \right) \cdot x = \prod_{g \in G} g(x)^{a_g}$$

On cherche alors à déterminer la structure du module E_S et à relier celle-ci avec l'arithmétique de l'extension.

En général, nous ne disposons que de peu de résultats explicites, et on s'intéresse soit au groupe des unités (i.e. le groupe E_{S_∞}), soit au groupe des S -unités pour un ensemble S "assez grand". En ce qui concerne les unités, citons par exemple l'article [3] de A. Frohlich dans lequel est étudiée la structure galoisienne locale et globale du groupe des unités de certaines classes d'extensions abéliennes de corps de nombres. D'autre part, lorsque S est "assez grand", structure des S -unités et valeurs de fonctions L sont étroitement liées via la conjecture de Chinburg (voir par exemple l'article de J. Ritter et A. Weiss [5]).

Nous allons présenter ici les résultats que nous avons obtenus pour tout ensemble S dans le cas d'un corps de nombres cyclique de degré premier (on consultera [2] pour les démonstrations).

Pour toute la suite, nous utiliserons les notations suivantes : soit $k = \mathbb{Q}$, et K un corps de nombres cyclique de degré $[K : \mathbb{Q}] = l$ un nombre premier impair. Ainsi, G est isomorphe à $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$, et on en choisit un générateur σ .

1 Une première décomposition

Nous allons tout d'abord nous débarrasser du sous-module de torsion de E_S , qui est égal à $\{\pm 1\}$.

Posons $U_S = \{x \in E_S, N_{K/\mathbb{Q}}(x) > 0\}$. Nous avons alors la décomposition de E_S en sous- $\mathbb{Z}[G]$ -modules stables :

$$E_S = \{\pm 1\} \oplus U_S.$$

Dans ce qui suit, nous allons donc étudier le module U_S qui est un \mathbb{Z} -module libre de dimension $\#S - 1$.

2 Un théorème de structure

Nous allons introduire un résultat classifiant les $\mathbb{Z}[G]$ -modules lorsque G est cyclique d'ordre premier, et qui nous permettra de décrire la structure galoisienne de U_S . Il existe trois types de $\mathbb{Z}[G]$ -modules \mathbb{Z} -libres indécomposables de type fini. Ce sont :

- *Type I* : \mathbb{Z} avec action triviale de G .

- *Type II* : tout idéal fractionnaire \mathfrak{A} du l -ième anneau cyclotomique $\mathbb{Z}[l]$; pour $a \in \mathfrak{A}$, l'action de G est donnée par : $\sigma \cdot a = \zeta a$, où ζ est une racine primitive l -ième de 1.

- *Type III* : tout module de type (\mathfrak{A}, a_0) qui est somme d'un idéal \mathfrak{A} . (type II) et de \mathbb{Z} (type I), et où a_0 est un élément de \mathfrak{A} ; l'action de G sur un élément $(a, k) \in (\mathfrak{A}, a_0)$ ($a \in \mathfrak{A}$, et $k \in \mathbb{Z}$) est donnée par : $\sigma \cdot (a, k) = (\zeta a + ka_0, k)$.

En particulier, $\mathbb{Z}[G]$ est de type III, car $\mathbb{Z}[G] = (\mathbb{Z}[l], 1)$.

Nous avons alors le théorème (voir [1], Chap. XI, § 74)

Théorème 1. (*Diederischen-Reiner*)

Soit M un $\mathbb{Z}[G]$ -module de type fini et sans \mathbb{Z} -torsion. Alors, il existe r_1, r_2, r_3 des éléments de \mathbb{N} , \mathfrak{A} un idéal de $\mathbb{Z}[l]$, a_0 un élément de $\mathfrak{A} \setminus (\zeta - 1)\mathfrak{A}$, tels que

$$M \simeq \mathbb{Z}[G]^{r_3} \oplus \mathbb{Z}[l]^{r_2-1} \oplus \mathfrak{A} \oplus \mathbb{Z}^{r_1}$$

ou bien, si $r_2 = 0$,

$$M \simeq \mathbb{Z}[G]^{r_3-1} \oplus (\mathfrak{A}, a_0) \oplus \mathbb{Z}^{r_1}.$$

De plus, la classe d'isomorphisme de M est déterminée par les entiers r_1, r_2, r_3 , et la classe (M) de l'idéal \mathfrak{A} dans $Cl(\mathbb{Z}[l])$, le groupe de classes de $\mathbb{Z}[l]$.

3 Structure de U_S

Nous allons déterminer la structure de U_S selon le théorème 1. Ainsi, il nous faut trouver les 3 invariants entiers et l'invariant classe de ce module.

3.1 Invariants entiers

Les invariants entiers vont dépendre des conditions arithmétiques suivantes :

i) *la nature des places finies de S .*

Posons r_d le nombre de places finies de \mathbb{Q} qui sont totalement décomposées dans S , et r_{nd} les places finies de \mathbb{Q} non décomposées dans S .

ii) *la dimension de certains sous-espaces vectoriels de Cl_K , le groupe de classes de K .*

Soit t le nombre de places ramifiées dans K , et $Cl_K(Ram)$ le groupe de classes engendré par les classes d'idéaux premiers ramifiés. Alors $Cl_K(Ram)$ est un $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ -espace vectoriel de dimension $t - 1$. On considère ensuite deux sous-espaces de $Cl_K(Ram)$ engendrés par les classes de certains idéaux à support dans S , de dimension s et s' . Finalement, on pose $\delta = s - s'$, qui est un entier tel que $0 \leq \delta \leq t - 1$.

iii) les relations vérifiées par les places ramifiées de S . Posons $\epsilon = 1$ (resp. $\epsilon = 0$) lorsque les idéaux premiers ramifiés à support dans S vérifient une relation (resp. ne vérifient pas de relation) de dépendance non triviale dans Cl_K .

Nous obtenons alors la valeur des invariants entiers en fonction des entiers r_d, r_{nd}, δ , et ϵ :

Théorème 2. *Les invariants entiers r_{i,U_S} déterminant la structure de U_S sont égaux à :*

$$\begin{cases} r_{1,U_S} = r_{nd} + \delta - \epsilon \\ r_{2,U_S} = \delta + 1 - \epsilon \\ r_{3,U_S} = r_d - \delta + \epsilon \end{cases}$$

3.2 Invariant classe

L'invariant classe (U_S) (qui un élément de $Cl(\mathbb{Z}[l])$) dépend de la structure galoisienne du S -groupe de classes de K . Ce dernier, noté $Cl_{K,S}$, est défini comme étant le quotient du groupe de classes de K par le sous-groupe engendré par les classes d'idéaux à support dans S . C'est un $\mathbb{Z}[G]$ -module fini, dont la structure détermine une classe ($Cl_{K,S}$) dans $Cl(\mathbb{Z}[l])$.

Nous avons alors l'égalité suivante :

Théorème 3. *Dans $Cl(\mathbb{Z}[l])$,*

$$(U_S) = (Cl_{K,S}).$$

Bibliographie

- [1] C. W. Curtis et I. Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras*, Interscience Publishers (1962).
- [2] I. Dubois, *S-unités et S-groupe de classes d'un corps de nombres cyclique de degré premier*, Prépublication **88** (mai 1998), Université Bordeaux I.
- [3] A. Frohlich, *Units in real abelian fields*, J. reine angew. Math., **429** (1992), 191-217.
- [4] S. Lang, *Algebraic number theory*, Addison-Wesley.
- [5] J. Ritter et A. Weiss, *On the local Galois structure of S-units*, in Algebra and Number Theory, eds G. Frey, J. Ritter, de Gruyter, Berlin (1994), 229-245.
- [6] P. Samuel, *Théorie algébrique des nombres*, Hermann.

Université Bordeaux I
Laboratoire de Mathématiques Pures
351, Cours de la Libération 33405 Talence FRANCE
dubois@math.u-bordeaux.fr

Zéros des polynômes aléatoires à coefficients gaussiens complexes.

Frédérique Bienvenüe-Duheille

Nous étudions dans cet article les zéros des polynômes ou séries entières à coefficients gaussiens complexes $P(z) = \sum_{n=0}^d a_n z^n$ où a_n est une suite de variables aléatoires indépendantes gaussiennes centrées et d est un entier, éventuellement infini. Plus précisément, pour tout domaine D simplement connexe et borné de \mathbf{C} , nous calculons explicitement le nombre moyen de zéros de P dans D et la variance de cette quantité. Si $d = +\infty$, il faut naturellement se restreindre aux domaines D relativement compacts dans le disque de convergence de la série.

Le nombre moyen de zéros réels d'un polynôme à coefficients gaussiens réels a été étudié tout d'abord par M. Kac [5] qui a obtenu l'existence d'une densité moyenne de zéros, ainsi que le comportement limite du nombre de zéros réels lorsque les coefficients sont centrés réduits et indépendants. Ce résultat, qui se traduit par le fait qu'un polynôme aléatoire de degré d à coefficients réels centrés possède en moyenne environ $(2/\pi)\ln d$ zéros réels lorsque d tend vers $+\infty$, a été étendu notamment par I. Ibragimov et I. Maslova [3] à certains polynômes à coefficients réels aléatoires indépendamment distribués, mais non nécessairement gaussiens.

L. Shepp et R. Vanderbei [6] puis I. Ibragimov et O. Zeitouni [4] se sont intéressés à l'existence d'une densité moyenne de zéros complexes sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ d'un polynôme à coefficients réels et à son comportement limite.

L'expression du nombre moyen de zéros (complexes) d'un polynôme à coefficients gaussiens complexes a été obtenue par A. Edelman et E. Kostlan [1]. Par une technique différente, nous retrouvons ce résultat et nous calculons la variance de cette quantité, ce qui est impossible avec la méthode employée par A. Edelman et E. Kostlan. À l'aide de l'expression obtenue, nous montrons également que le nombre de zéros, dans un domaine dont la fermeture est incluse dans le disque de convergence, de la suite des sommes partielles d'une série entière à coefficients aléatoires gaussiens converge au sens de la norme L^2 vers le nombre de zéros de la série entière.

1. Espérance du nombre de zéros de P dans un domaine

Dans toute la suite, nous considérons un polynôme P à coefficients aléatoires complexes gaussiens et indépendants

$$P(z) = \sum_{n=0}^d a_n z^n,$$

où $a_n = \alpha_n + i\beta_n$, α_n et β_n sont des variables aléatoires indépendantes gaussiennes centrées et de variance σ_n^2 , et nous étudions les zéros de P dans un domaine D simplement connexe et borné. Les résultats obtenus sont également valables dans le cas où P est une série entière ($d = +\infty$) lorsque la fermeture de D est de plus incluse dans le disque de convergence de P (dont le rayon est presque sûrement constant).

Nous notons $N(D)$ le nombre de zéros de P dans D et pour tout nombre entier i et pour tout nombre réel r positif,

$$A_i(r) = \sum_{n=0}^d n^i \sigma_n^2 r^{2n},$$

Remarquons tout d'abord que, pour tout domaine D , la probabilité que P admette un zéro sur ∂D est nulle. Nous pouvons par conséquent utiliser le théorème de Rouché et nous obtenons :

$$N(D) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} \frac{P'(z)}{P(z)} dz$$

Calculer $\mathbf{E}N(D)$ revient donc à calculer $\mathbf{E}(P'/P)$.

Lemme 1. *Pour tout nombre complexe z , on a :*

$$\mathbf{E} \left(\frac{zP'(z)}{P(z)} \right) = \frac{A_1(|z|)}{A_0(|z|)}.$$

Preuve. Notons $P(z) = X_1 + iX_2$ et $zP'(z) = Y_1 + iY_2$. Le vecteur (X_1, X_2, Y_1, Y_2) est gaussien centré de matrice de covariance C où

$$C = \begin{pmatrix} A_0 & 0 & A_1 & 0 \\ 0 & A_0 & 0 & A_1 \\ A_1 & 0 & A_2 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

Considérons une matrice L triangulaire inférieure telle que $LL^t = C$. On aura alors :

$$(X_1, X_2, Y_1, Y_2)^t \stackrel{loi}{=} L(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)^t$$

où $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ désignent des variables aléatoires gaussiennes centrées réduites et indépendantes. Le calcul explicite de L permet d'obtenir :

$$\mathbf{E} \left(\frac{zP'(z)}{P(z)} \right) = \mathbf{E} \left(\frac{A_1(\xi_1 + i\xi_2) + \sqrt{A_2A_0 - A_1^2}(\xi_3 + i\xi_4)}{A_0(\xi_1 + i\xi_2)} \right) = \frac{A_1}{A_0}$$

Une conséquence immédiate du lemme 1 est le résultat suivant, déjà obtenu par A. Edelman et E. Kostlan [1] :

Théorème 1. *Pour un domaine D de \mathbb{C} , on a :*

$$\mathbf{E}N(D) = \int_{\partial D} \frac{A_1(z)}{A_0(z)} \frac{dz}{2i\pi z}$$

En particulier, si D_r désigne le disque de rayon $r > 0$ et de centre 0, nous obtenons

$$\mathbf{E}N(D_r) = \frac{A_1(r)}{A_0(r)}$$

Remarque. Le théorème 1 implique l'existence d'une densité (par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2) du nombre moyen de zéros d'un polynôme à coefficients complexes gaussiens.

2. Variance de $N(D)$ On calcule de façon similaire l'espérance de $N(D)^2$, pour un domaine D vérifiant les mêmes conditions qu'en 1). Il faut cette fois-ci évaluer l'espérance de

$$\frac{P'(z_1)}{P(z_1)} \frac{P'(z_2)}{P(z_2)}$$

Notons pour tout entier i positif, et $j = 1$ ou 2 , $A_{ij}(z_1, z_2) = A_i(z_j)$ et

$$B_i(z_1, z_2) = \sum_{n=0}^d n^i \sigma_n^2 z_1^n \bar{z}_2^n.$$

Lemme 2. *On a*

$$\mathbf{E} \left(\frac{z_1 P'(z_1)}{P(z_1)} \frac{z_2 P'(z_2)}{P(z_2)} \right) = \frac{A_{11}A_{12} + |B_1|^2 - B_0 \bar{B}_1 A_{11}/A_{01} - B_1 \bar{B}_0 A_{12}/A_{02}}{(A_{01}A_{02} - |B_0|^2)z_1 z_2} (z_1, z_2).$$

Preuve: 1. *La matrice de covariance Γ du vecteur de \mathcal{R}^8 formé des parties réelles et imaginaires des polynômes $z \rightarrow P(z)$ et $z \rightarrow zP'(z)$ pris en $z = z_1$ ou $z = z_2$ s'écrit en fonction des A_{ij} , $i = 0, 1, 2$ et $j = 1$ ou 2 , ainsi que des parties réelles et imaginaires des fonctions $B_i(z_1, z_2)$. On écrit à nouveau Γ sous la forme $\Gamma = MM^t$, où M est une matrice triangulaire inférieure et on utilise la même égalité en loi que pour la preuve du lemme 1. On remarque alors que l'espérance que l'on cherche à calculer s'exprime en fonction des termes figurant dans les quatre premières colonnes de la matrice M et de la loi de la variable aléatoire U_2/U_1 où U_1 et U_2 désignent deux variables aléatoires gaussiennes complexes indépendantes, centrées et réduites. Quelques lignes de calculs permettent de conclure.*

Le lemme 2 implique le résultat suivant :

Théorème 2. *On a*

$$\mathbf{E}(N(D))^2 = \frac{-1}{4\pi^2} \int_{\partial D \times \partial D} \frac{A_{11}A_{12} + |B_1|^2 - \frac{A_{11}}{A_{01}}B_0\overline{B_1} - \frac{A_{12}}{A_{02}}B_1\overline{B_0}}{A_{01}A_{02} - |B_0|^2}(z_1, z_2) \frac{dz_1 dz_2}{z_1 z_2}$$

Lorsque D est le disque D_r centré en 0 et de rayon r , on obtient

$$\mathbf{var}(N(D_r)) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|B_0 A_{11} - B_1 A_{01}|^2}{A_{01}^2 (A_{01}^2 - |B_0|^2)}(r, r e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}$$

Remarque. Il ne peut exister de densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbf{R}^2 pour la variance, c'est-à-dire de fonction positive f telle que $\mathbf{var}(N(D)) = \int_D f(x, y) dx dy$. Supposons en effet que d est fini et que les a_n ont la même variance. Il est facile de voir que $N(D_r)$ et $N(C D_{1/r})$ suivent la même loi et ont donc la même variance. Or puisque d est fini, $N(C D_{1/r})$ est presque sûrement égal à $d - N(D_{1/r})$, ce qui implique que $N(D_{1/r})$ et $N(D_r)$ ont la même variance. L'un de ces deux disques étant inclus dans l'autre, et ce résultat étant vérifié pour tout r , la densité f ne peut exister.

3. Comportement asymptotique de $N_d(D)$

Nous étudions dans cette partie le comportement asymptotique du nombre de zéros dans un disque d'un polynôme à coefficients aléatoires gaussiens complexes, indépendants et identiquement distribués lorsque le degré du polynôme tend vers l'infini. Rappelons que si les coefficients sont indépendants, identiquement distribués et intégrables, le rayon de convergence de la série infinie est 1 presque sûrement.

Les résultats classiques (voir [2]) sur les zéros des sommes partielles d'une série entière permettent d'affirmer que, presque sûrement, le nombre de zéros de P_d dans un disque de rayon $r < 1$ tend lorsque le degré d tend vers $+\infty$, vers le nombre de zéros de la série infinie, dans ce même disque. Les techniques développées ci-dessus nous permettent de conclure que cette convergence est encore vraie au sens de la norme L^2 .

Théorème 3. *On a, pour tout $r < 1$,*

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \mathbf{E}(N_d(D_r) - N_\infty(D_r))^2 = 0.$$

Il suffit pour voir cela d'évaluer $\mathbf{E}(N_d(D_r)N_\infty(D_r))$, les autres quantités se calculant à l'aide des résultats du paragraphe précédent, et de vérifier que la convergence a bien lieu.

Bibliographie

- [1] *A. Edelman, E. Kostlan*, How many zeros of a random polynomial are real? Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **32** (1995), 1-37.
- [2] *A. Edrei, E. Saff, R. Varga*, Zeros of sections of power series, Lecture Notes in Mathematics **1002**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1983.
- [3] *I. Ibragimov, I. Maslova*, On the expected number of real zeros of random polynomials. I. Coefficients with zero means. Theor. Probab. Appl. **16** (1971), 228-248.
- [4] *I. Ibragimov, O. Zeitouni*, On roots of random polynomials. Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997), 2427-2441.
- [5] *M. Kac*, On the average number of a random algebraic equation, Bull. Amer. Soc. **49** (1943), 314-320.
- [6] *L. Shepp, R. Vanderbei*, The complex zeros of random polynomials. Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), 4365-4384.

Laboratoire de Probabilités
Université Claude Bernard Lyon 1
43, Boulevard du 11 Novembre 1918
69622 Villeurbanne CEDEX FRANCE
duhelle@jonas.univ-lyon1 .fr

Unicité des solutions “mild” des équations de Navier-Stokes dans $L^3(\mathbb{R}^3)$

Giulia Furioli

Les équations de Navier-Stokes dans le cas d'un fluide visqueux, incompressible, homogène qui remplit tout l'espace, sont données en l'absence de forces extérieures (et en prenant les constantes de viscosité et de densité égales à 1) par le système :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \\ \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - \vec{\nabla} p \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0 \end{cases}$$

où $\vec{u}(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est le vecteur vitesse et $p(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est la pression.

Pour clarifier les notations :

- $(\Delta \vec{u})_i = \Delta u_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2}$
- $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) = \sum_{j=1}^3 u_j \partial_j$ d'où $\left[(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right]_i = (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) u_i = u_1 \partial_1 u_i + u_2 \partial_2 u_i + u_3 \partial_3 u_i$
- $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3$

Le système de Navier-Stokes ainsi défini donne des solutions classiques et l'existence pour un petit intervalle de temps d'une telle solution a été prouvée au début du siècle. Quant aux solutions globales, on a des résultats seulement si on considère le problème au sens faible. On préfère alors une formulation différente des équations, qui prend un sens sur une classe plus large d'espaces fonctionnels :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \\ \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) - \vec{\nabla} p \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0 \end{cases}$$

Si \vec{u} est suffisamment régulière, $\vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \vec{u}$ et si $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ alors $V.(u \otimes u) = (u.V)u$.

Dans la suite, nous écrirons toujours X à la place de $X \times X \times X \equiv X^3$, par souci de brièveté.

Définition. Soit $T \in]0, +\infty]$. Une solution faible sur $]0, T[$ des équations de Navier-Stokes est un champ de vecteurs $\vec{u}(t, x) \in L^2_{loc}([0, T[\times \mathbb{R}^3)$ tel que $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ et tel qu'il existe $p \in \mathcal{D}'$ vérifiant $\partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) - \vec{\nabla} p$ dans $\mathcal{D}'([0, T[\times \mathbb{R}^3)$.

C'est une définition qui permet beaucoup de liberté dans le choix des espaces fonctionnels où situer plus particulièrement le problème.

On peut projeter les équations sur les champs des vecteurs à divergence nulle. On introduit à cette fin l'opérateur matriciel \mathbb{P} défini formellement par :

$$\mathbb{P}\vec{f} = (Id - \vec{\nabla} \frac{1}{\Delta} \vec{\nabla} \cdot) \vec{f} = (Id + \vec{R} \otimes \vec{R}) \vec{f}$$

où \vec{R} est le vecteur des transformées de Riesz définies en Fourier par le multiplicateur $\widehat{R_j f}(\xi) = i \frac{\xi_j}{|\xi|} \hat{f}(\xi)$ (voir aussi [1] et [5]).

Comme \vec{u} est à divergence nulle, les équations prennent la forme :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \\ \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0 \end{cases}$$

où le terme de pression a disparu car c'était un gradient.

Voici une dernière formulation des équations, cette fois-ci intégrale :

$$\begin{cases} \vec{u}(t) = e^{t\Delta} \vec{u}_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u})(s) ds \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0 \end{cases}$$

L'opérateur $e^{t\Delta}$ est le semigroupe de la chaleur, donné par la convolution suivante :

$$e^{t\Delta} \vec{u}_0(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} * \vec{u}_0(x)$$

et qui fournit la solution de l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0 \end{cases}$$

Historiquement, les équations de Navier-Stokes ont été étudiées sous les trois formes que nous avons présentées. Il nous a paru intéressant d'établir tout d'abord dans quel cadre fonctionnel elles sont effectivement équivalentes.

Le résultat que nous avons obtenu est assez général. Nous introduisons l'espace des fonctions uniformément localement dans L^2 et nulles à l'infini

$$E_2 = \left\{ f \in L^2_{loc} : \sup \int_{\mathcal{B}(x,1)} |f(y)|^2 dy < \infty \text{ et } \lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{B}(x,1)} |f(y)|^2 dy = 0 \right\}$$

(Exemple : $\forall p \geq 2, L^p \subset E_2$).

Proposition. (*Furioli-Lemarié-Terraneo, 1997*). Soit $\vec{u}(t) \in L^2(]0, T[, E_2)$. Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :

i) \vec{u} est une solution faible des équations de Navier-Stokes ;

ii) $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ et $\partial_t \vec{u} - \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u})$;

iii) il existe $\vec{u}_0 \in S'$ telle que $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$ et $\vec{u}(t) = e^{t\Delta} \vec{u}_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u})(s) ds$.

Corollaire. Si $p \geq 2$, $T \in]0, +\infty[$ et si $\vec{u}(t) \in L^2(]0, T[, L^p)$ alors les trois assertions précédentes sont équivalentes.

C'est dans ce cadre que nous allons travailler.

Les travaux sur les équations de Navier-Stokes du point de vue des solutions faibles débutent en 1933-34 par l'oeuvre de Jean Leray [3]. A une époque où la théorie des distributions n'était pas encore formalisée il démontre le théorème suivant :

Théorème. *Théorème (Leray, 1933).*

Pour tout $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ il existe $\vec{u}(t) \in L^\infty(]0, +\infty[, L^2) \cap L^2(]0, +\infty[, \dot{H}^1)$ solution des équations de Navier-Stokes telle que $\vec{u}(0) = \vec{u}_0$ dans \mathcal{D}' et telle que

$$\|\vec{u}(t)\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^t \|\vec{\nabla} \cdot \vec{u}(s)\|_{L^2}^2 ds \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 \forall t \in]0, +\infty[.$$

Le problème de son unicité reste ouvert encore aujourd'hui.

La technique utilisée par Leray consiste à résoudre une suite de problèmes approchés et de passer à la limite faible sur les solutions grâce à des estimations uniformes d'énergie. Le passage à la limite faible fait cependant perdre l'unicité.

Si on passe de $p = 2$ à $p > 2$, la méthode utilisée pour montrer l'existence de solutions faibles dans $L^\infty([0, T[, L^p)$ change.

Les premiers travaux dans cette directions sont dus à Tosio Kato [2] ; il prend en considération des solutions "mild", c'est-à-dire continues en temps.

Définition. Une solution "mild" dans L^p des équations de Navier-Stokes est une solution faible telle que $\vec{u}(t) \in \mathcal{C}([0, T[, L^p)$.

Voici le théorème qu'il démontre.

Théorème. (Kato, 1984). $\forall p > 3, \forall \vec{u}_0 \in L^p$ telle que $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0 \exists! \vec{u}(t) \in \mathcal{C}([0, T[, L^p)$ solution "mild" des équations de Navier-Stokes.

Pour $p = 3$ il existe $\delta_0 > 0$ tel que $\forall \vec{u}_0 \in L^3, \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$ et $\|\vec{u}_0\|_{L^3} < \delta_0$ il existe $\vec{u}(t) \in \mathcal{C}([0, +\infty[, L^3)$ solution "mild" des équations de Navier-Stokes qui est unique dans l'espace :

$$E = \left\{ \vec{u} \in S' : \vec{u}(t) \in L^\infty([0, +\infty[, L^3), \sup_{t \geq 0} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} < +\infty, \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} = 0 \right\}.$$

On remarque tout d'abord la différence entre les cas $p > 3$ et $p = 3$. Dans le premier cas, l'unicité est prouvée dans l'espace $\mathcal{C}([0, T[, L^p)$, dans le deuxième elle

l'est seulement dans un sous-espace de celui-ci. La méthode utilisée est celle du point fixe. On considère la formulation intégrale des équations, qu'on peut écrire :

$$\vec{u}(t) = \vec{U}_0(t) + B(\vec{u}, \vec{u})(t)$$

où B est un opérateur bilinéaire.

Il s'agit de considérer la transformation $F(\vec{u}) = \vec{U}_0 + B(\vec{u}, \vec{u})(t)$ et de démontrer qu'elle est une contraction d'une boule $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}([0, T[, L^p)$ voisinage de $\vec{U}_0 = e^{t\Delta}\vec{U}_0$. Cela revient à prouver la bicontinuité de l'opérateur B de $\mathcal{C}([0, T[, L^p) \times \mathcal{C}([0, T[, L^p) \rightarrow \mathcal{C}([0, T[, L^p)$. Pour $p > 3$ c'est une simple application des inégalités de Young et de Holder, qui donnent :

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u} ds \right\|_{L^p} &\leq \left(\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\frac{3}{2p} + \frac{1}{2}}} ds \right) \sup_{[0, T]} \|\vec{u}\|_{L^p} \sup_{[0, T]} \|\vec{v}\|_{L^p} \\ &\leq C_p T^{\frac{1}{2} - \frac{3}{2p}} \sup_{[0, T]} \|\vec{u}\|_{L^p} \sup_{[0, T]} \|\vec{v}\|_{L^p} \end{aligned}$$

Pour $p = 3$ le procédé échoue car on arrive à $\int_0^t \frac{1}{t-s} ds$ qui diverge.

Cependant on remarque que le terme \vec{U}_0 appartient à un espace plus précis que $\mathcal{C}([0, +\infty[, L^3)$ et notamment à l'espace E de l'énoncé de Kato. On peut donc démontrer la contractivité de F dans cet espace car B y est bicontinu. L'unicité de la solution trouvée n'est pourtant prouvée que dans ce sous-espace.

Nous avons alors montré le théorème suivant :

Théorème. (*Furioli-Lemarié-Terraneo, 1997*). Soient $\vec{u}(t) \in \mathcal{C}([0, T[, L^3)$, $\vec{v}(t) \in \mathcal{C}([0, T'[, L^3)$ telles que :

- \vec{u} est solution "mild" de Navier-Stokes sur $[0, T[$;
- \vec{v} est solution "mild" de Navier-Stokes sur $[0, T'[$;
- $\vec{u}|_0 = \vec{v}|_0 = \vec{u}_0$.

Alors $\vec{u} = \vec{v}$ sur $[0, \inf(T, T')[$.

Il existe à présent plusieurs preuves de ce résultat. Nous allons donner quelques idées de la preuve originale. Nous renvoyons à [2] pour plus de détails.

On veut montrer que toutes les solutions coïncident avec la solution à la Kato. Mettons-nous d'abord dans le cas où $\|\vec{u}_0\|_{L^3} < \delta_0$, où on sait que la solution de Kato est globale et de plus vérifie que $\sup_{t>0} \|\vec{u}(t)\|_{L^3} < \|\vec{u}_0\|_{L^3}$

On commence par poser $t_0 = \sup\{t \geq 0 \mid \vec{u}(s) = \vec{v}(s) \text{ dans } L^3, \forall s \in [0, t]\}$. Cet ensemble n'est pas vide car $\vec{u}(0) = \vec{v}(0)$.

Soit par l'absurde $t_0 < T$ (temps maximal de vie de \vec{v}). Comme \vec{u} et \vec{v} sont continues, $\vec{u}(t_0) = \vec{v}(t_0)$.

On écrit $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} = e^{t\Delta}\vec{u}_0 + B(\vec{u}, \vec{u}) - e^{t\Delta}\vec{v}_0 - B(\vec{v}, \vec{v}) = B(\vec{u} - \vec{v}, \vec{u}) + B(\vec{v}, \vec{u} - \vec{v}) = B(\vec{w}, \vec{u}) + B(\vec{v}, \vec{w})$. On a $\|\vec{w}\|_{L^3} = 0$ sur $[0, t_0]$.

Il a été démontré par F.Oru ([6]) que B n'est pas bicontinu dans $[L^\infty([0, T[, L^3)]^2$. Cependant on se pose la question suivante : existe-t-il un espace $X \rightarrow S'$ tel que :

- a) $\vec{w}(s) \in L^\infty([0, T[, X)$ si $\vec{w} = B(\vec{u}, \vec{u})$, $\vec{u} \in L^\infty(L^3)$;
 b) B est bicontinu sur $L^\infty([0, T[, X) \otimes L^\infty([0, T[, L^3) \rightarrow L^\infty([0, T[, X)$?

On remarque que X ne contient pas forcément L^3 ; il suffit que $\forall s \in [0, T[\vec{w}(s)$ soit dans X même si $\vec{u}(s), \vec{v}(s)$ n'y sont pas.

Supposons que cela soit vérifié. Alors on obtient :

$$\|\vec{w}\|_X \leq C \sup_{[0, T]} \|\vec{w}(s)\|_X (\sup_{[0, T]} \|\vec{u}(s)\|_{L^3} + \sup_{[0, T]} \|\vec{v}(s)\|_{L^3})$$

d'où :

$$\|\vec{w}\|_X \leq C \sup_{[0, T]} \|\vec{w}(s)\|_X (\sup_{[0, T]} \|\vec{v}(s) - \vec{u}(s)\|_{L^3} + 2 \sup_{[0, T]} \|\vec{u}(s)\|_{L^3})$$

\vec{u} est la solution à la Kato, donc :

- $\sup_{[0, +\infty[} \|\vec{u}(s)\|_{L^3} \leq \|\vec{u}_0\|_{L^3} < \delta_0$
- \vec{u}, \vec{v} sont continues et coïncident jusqu'à t_0 , donc $\forall \varepsilon > 0, \exists t_1 \in]t_0, T[$ tel que $\sup_{[t_0, t_1[} \|\vec{u}(s) - \vec{v}(s)\|_{L^3} < \varepsilon$.

Il suffit de choisir $\delta_0 < \frac{1}{4C}$ et t_1 tel que $\sup_{[0, t_1[} \|\vec{u}(s) - \vec{v}(s)\|_{L^3} < \frac{1}{4C}$ pour que $\sup_{[t_0, t_1[} \|\vec{w}(s)\|_X \leq \frac{3}{4} \sup_{[t_0, t_1[} \|\vec{w}(s)\|_X$ d'où $\|\vec{w}(s)\|_X \equiv 0$ sur $[0, t_1[$ et donc $\vec{w}(s) \equiv 0$ dans S' . Mais $\vec{w}(s) \in L^3$ donc $\vec{w}(s) \equiv 0$ dans L^3 , ce qui est absurde.

L'espace qui convient est un espace de Besov. C'est un espace de distributions tempérées dont on contrôle uniformément la taille en norme L^p des morceaux supportés en Fourier sur des couronnes dyadiques, et cela permet d'évaluer la norme de l'intégrale sans passer d'emblée à l'intégrale de la norme mais en faisant une estimation plus fine sur les blocs de fréquences.

Bibliographie

- [1] *M. Cannone*, "Ondelettes, Paraproducts et Navier-Stokes" Diderot Editeur (1995).
 [2] *G. Furioli, P.G. Lemarié-Rieusset et E. Terraneo*, Unicité dans $L^3(\mathbb{R}^3)$ et d'autres espaces fonctionnels limites pour Navier-Stokes , Prépublication 85 de l'Université d'Evry (1998).
 [3] *T. Kato*, Strong LP solutions of the Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^m with applications to weak solutions. Math. Zeit. **187**, pp. 471-480 (1984).
 [4] *J. Leray*, Sur le mouvement d'un liquide visqueux remplissant l'espace. Acta Math., **63**, pp. 193-248 (1934).
 [5] *Y. Meyer*, "Wavelets, paraproducts and Navier-Stokes equations", à paraître comme Memoir of the AMS.
 [6] *F. Oru*, Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1998.

Equipe d'Analyse et Probabilités
 Université d'Evry-Val-d'Essonne
 bd. F. Mitterrand, 91025 EVRY CEDEX, FRANCE
 furioli@lami.univ-evry.fr

Classification des objets injectifs dans certaines catégories de K -modules instables sur l'algèbre de Steenrod

Dagmar M. Meyer

L'objet principal de cet exposé est de décrire les objets injectifs de la catégorie, notée $K - \mathcal{U}$, des K - \mathcal{A} -modules instables, \mathcal{A} désignant l'algèbre de Steenrod modulo un nombre premier fixé p et K une algèbre instable noëthérienne. Tous les résultats présentés ici se trouvent dans [6].

Tout d'abord, rappelons la définition de l'algèbre de Steenrod. On considère l'algèbre graduée associative unitaire librement engendrée sur \mathbb{F}_p par les symboles Sq^i de degré i quand $p = 2$, et par les symboles P^i de degré $2i(p - 1)$ et β de degré 1 quand $p > 2$, où $i = 1, 2, \dots$. Pour $i = 0$ on définit également $Sq^0 := 1$, respectivement $P^0 := 1$. L'algèbre de Steenrod \mathcal{A} est le quotient de cette algèbre par l'idéal engendré par les relations suivantes (dites de Adem) :

$$\text{pour } p = 2 : \quad Sq^i Sq^j \sim \sum_{k=0}^{[i/2]} \binom{j-k-1}{i-2k} Sq^{i+j-k} Sq^k \quad \text{quand } 0 < i < 2j$$

$$\text{pour } p > 2 : \quad \beta^2 \sim 0$$

$$P^i P^j \sim \sum_{k=0}^{[i/p]} (-1)^{i+k} \binom{(p-1)(j-k)-1}{i-pk} P^{i+j-k} P^k \quad \text{quand } 0 < i < pj$$

$$\begin{aligned} P^i \beta P^j &\sim \sum_{k=0}^{[i/p]} (-1)^{i+k} \binom{(p-1)(j-k)}{i-pk} \beta P^{i+j-k} P^k \\ &\quad - \sum_{k=0}^{[(i-1)/p]} (-1)^{i+k-1} \binom{(p-1)(j-k)-1}{i-pk-1} P^{i+j-k} \beta P^k \quad (\text{quand } 0 < i < pj + 1) \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant définir les objets que nous allons étudier :

Définition 1. *Un \mathcal{A} -module M à gauche est dit instable si, pour tout s dans M , on a $Sq^i x = 0$ quand $i > |x|$ (pour $p = 2$) et $\beta^e P^i x = 0$ quand $2i + e > |x|$, $e \in \{0, 1\}$ (pour $p > 2$), conditions où $|x|$ désigne le degré de x . On désignera par \mathcal{U} la catégorie dont les objets sont les \mathcal{A} -modules instables et les morphismes sont les applications \mathcal{A} -linéaires de degré zéro.*

Une \mathcal{A} -algèbre instable est la donnée d'un module $K \in \mathcal{U}$ et d'applications \mathcal{A} -linéaires $\mu : K \otimes K \rightarrow K$ et $\eta : \mathbb{F}_p \rightarrow K$ qui font de K une \mathbb{F}_p -algèbre graduée associative commutative unitaire et telles que $Sq^{|x|} x = x^2$ (quand $p = 2$) resp. $P^{|x|/2} x = x^p$ si $|x|$ est pair (quand $p > 2$). Les \mathcal{A} -algèbres instables sont les objets d'une catégorie notée \mathcal{K} .

La condition d'instabilité pour $M \in \mathcal{U}$ entraîne en particulier $M^n = 0$ pour $n < 0$. La cohomologie modulo p d'un espace, $H^*(X; \mathbb{F}_p)$, est un objet dans \mathcal{U} . Muni du produit \cup c'est aussi une algèbre instable, et cet exemple est à l'origine des définitions ci-dessus. Par la suite nous écrirons H^*X pour $H^*(X; \mathbb{F}_p)$.

Nous nous intéressons à des K - \mathcal{A} -modules instables, où $K \in \mathcal{K}$:

Définition 2. *Un K - \mathcal{A} -module instable est un module $M \in \mathcal{U}$ avec une application $\sigma : K \otimes M \rightarrow M$ qui est \mathcal{A} -linéaire. On désigne par $K - \mathcal{U}$ la catégorie dont les objets sont les K - \mathcal{A} -modules instables et dont les morphismes sont les \mathcal{U} -morphisms qui sont K -linéaires.*

Notons que si $K = \mathbb{F}_p$, la catégorie $K - \mathcal{U}$ coïncide avec \mathcal{U} .

L'intérêt des catégories $K - \mathcal{U}$ tient à l'observation suivante : Soit G un groupe topologique et X un G -espace. La projection $EG \times_G X \rightarrow EG \times_G \{pt\} \simeq BG$ de la construction de Borel sur l'espace classifiant de G induit en cohomologie une application $H^*BG \rightarrow H^*(EG \times_G X) =: H*_G$ qui fait de la cohomologie équivariante $H*_G X$ de X un $H^*BG - \mathcal{A}$ -module instable.

Les catégories $K - \mathcal{U}$ sont des catégories abéliennes ayant assez d'objets injectifs, donc on peut employer l'algèbre homologique pour les étudier. Tandis qu'il est facile de décrire (au moins d'une façon abstraite) les objets projectifs dans $K - \mathcal{U}$, ce n'est pas le cas pour les injectifs. Nous allons donner ici la classification des objets injectifs dans $K - \mathcal{U}$ dans le cas où K est noëthérienne (en tant que \mathbb{F}_p -algèbre).

Rappelons que pour \mathcal{U} , une telle classification a été donnée par J. Lannes et L. Schwartz [5] en utilisant des résultats de H. Miller [7], du premier auteur et de S. Zarati [3] (Miller a démontré la \mathcal{U} -injectivité de $H^*B\mathbb{Z}/p$ qui joue un rôle essentiel dans sa solution de la conjecture de Sullivan). Dans le cas où $K = H^*BV$ (ici $V \cong (\mathbb{Z}/p)^{\otimes m}$ est un p -groupe abélien élémentaire) il existe aussi une classification des $K - \mathcal{U}$ -injectifs qui est due à J. Lannes et S. Zarati [4]. - Par la suite nous écrirons H^*V pour H^*BV .

Afin de pouvoir énoncer le résultat dans le cas général il nous faut encore introduire quelques définitions :

Définition 3. *Nous désignons par \mathcal{L} un ensemble de représentants des classes d'isomorphisme des facteurs directs indécomposables de H^*V , où $V \cong (\mathbb{Z}/p)^{\otimes m}$ et $m \geq 0$.*

L'ensemble \mathcal{L} a été introduit dans [3], il joue déjà un rôle important dans la classification des objets \mathcal{U} -injectifs.

Rappelons que dans le cas classique des modules sur un anneau commutatif R il y a une bijection entre idéaux premiers de R et objets injectifs indécomposables dans $R\text{-mod}$ (à isomorphisme près). Dans le cas présent les idéaux de K interviennent également dans la classification :

Définition 4. Un idéal de K est dit invariant s'il est invariant relativement à l'action de $Sq^i, i \geq 0$ (quand $p = 2$) ou $P^i, i \geq 0$ (quand $p > 2$). Nous désignons par \mathcal{J}_K l'ensemble des idéaux premiers invariants de K .

Les idéaux premiers invariant de K peuvent être décrits d'une autre façon : soit $S(K)$ la catégorie dont les objets sont les paires (V, φ) où V est un p -groupe abélien élémentaire et $\varphi : K \rightarrow H * V \in \mathcal{K}$. Un morphisme $\alpha : (V, \varphi) \rightarrow (W, \psi)$ est un homomorphisme $\alpha : V \rightarrow W$ tel que $\alpha^* \circ \psi = \varphi$. Nous considérons $\mathcal{R}(K)$, la sous-catégorie pleine de $S(K)$ dont les objets sont tous les (V, φ) tel que H^*V est de type fini comme \mathcal{K} -module. Il en résulte que dans $\mathcal{R}(K)$ tous les endomorphismes sont des automorphismes. Le groupe des automorphismes $Aut_{\mathcal{R}(K)}((V, \varphi))$ est appelé $Gal((V, \varphi))$ pour des raisons évidentes.

Lemme 1. ([1, Cor. 2.4]) L'application $(V, \varphi) \rightarrow \sqrt{\ker \varphi}$ induit une bijection entre les classes d'isomorphisme dans $\mathcal{R}(K)$ et les éléments de \mathcal{J}_K .

Il est conséquence de l'exactitude du foncteur T (introduit par J. Lannes [2]) que l'objet $H^*V(\varphi)$ est injectif dans $K - \mathcal{U}$ (la notation $H^*V(\varphi)$ signifie que H^*V est un K -module via φ). Mais normalement, ce $K - \mathcal{U}$ -objet n'est pas indécomposable. Il faut donc étudier l'anneau des endomorphismes $End_{K-\mathcal{U}}(H^*V(\varphi))$:

Lemme 2. L'application $\mathbb{F}_p[End_{S(K)}((V, \varphi))]^{op} \rightarrow End_{K-\mathcal{U}}(H^*V(\varphi))$ qui est déterminée par $f \rightarrow f^*$ pour $f \in End_{S(K)}((V, \varphi))$, est une bijection d'anneaux. En particulier, si $(V, \varphi) \in \mathcal{R}(K)$ on a une bijection

$$\mathbb{F}_p[Gal((V, \varphi))]^{op} \rightarrow End_{K-\mathcal{U}}(H^*V(\varphi)).$$

Donc, on peut réduire le problème de la décomposition de $H^*V(\varphi)$ à un problème de la théorie des représentations modulaires.

Nous donnons encore une définition. Soit $a \in \mathcal{J}_K$ représenté par l'objet $(V, \varphi) \in \mathcal{R}(K)$.

Définition 5. Nous désignons par \mathcal{P}_a un ensemble de représentants des classes d'isomorphisme des facteurs directs indécomposables de $\mathbb{F}_p[Gal((V, \varphi))]$. Si P est un élément de \mathcal{P}_a , soit ϵ_P l'idempotent primitif associé.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer notre résultat principal. Soit

$$\Omega_K := \{\omega = (L, n, a, P) \mid L \in \mathcal{L}, n \in \mathbb{N}, a \in \mathcal{J}_K, P \in \mathcal{P}_a\}$$

Pour chaque $\omega = (L, n, a, P) \in \Omega_K$ nous définissons l'objet $K - \mathcal{U}$ -injectif suivant :

$$E_K(\omega) := E_{K-\mathcal{U}}(L \otimes \sum_{\epsilon_P}^n H^*V(\varphi))$$

Ici la notation $E_{K-\mathcal{U}}(-)$ désigne l'enveloppe injective dans la catégorie $K - \mathcal{U}$.

Théorème 1. *Soit $K \in \mathcal{K}$ noëthérienne, I $K - \mathcal{U}$ -injectif. Alors il existe une unique famille de cardinaux $\{a_\omega\}_{\omega \in \Omega_K}$ telle que*

$$I \cong \bigotimes_{\omega \in \Omega_K} E_K(\omega)^{\otimes a_\omega}.$$

Cette description des objets injectifs indécomposables est très abstraite et en général il n'est pas facile de décrire des objets $E_K(\omega)$ en termes plus concrets. Cependant on a le résultat suivant :

Théorème 2. *Si K est noëthérienne, l'objet $L \otimes E_{K-\mathcal{U}}(\sum^n \epsilon_P H^* V(\varphi)) \in K - \mathcal{U}$ est injectif et $E_K(\omega) \cong L \otimes E_{K-\mathcal{U}}(\sum^n \epsilon_P H^* V(\varphi))$.*

Les objets $E_K(\omega) = E_{K-\mathcal{U}}(L \otimes \sum^n \epsilon_P H^* V(\varphi))$ sont de type fini comme K -module si et seulement si $L = \mathbb{F}_p$. Par conséquent, Théorème 2 implique que pour connaître les injectifs indécomposables de $K - \mathcal{U}$ il suffit identifier ceux qui sont finitement engendrés sur K .

Exemples : Quand $K = H^*BG$ avec G un groupe fini ayant “peu” de p -sousgroupes abéliens élémentaires, il est souvent possible d'écrire tous les objets injectifs indécomposables de $K - \mathcal{U}$ en termes plus ou moins concrets (par exemple pour $p = 2$, $G = D_{2^m}, Q_{2^m}, \Sigma_4, \dots$). C'est le cas aussi pour $K = D(m)$, l'algèbre de Dickson polynomiale.

Bibliographie

- [1] *H.-W. Henn*, Commutative algebra of unstable K -modules, Lannes' T-functor and equivariant mod- p cohomology, *J. Reine Angew. Math.* **478** (1996), 189-215.
- [2] *J. Lannes*, Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un p -groupe abélien élémentaire (avec un appendice par Michel Zisman), *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* No. 75 (1992), 135-244
- [3] *J. Lannes, S. Zarati*, Sur les \mathcal{U} -injectifs, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **19** (1986), no.2, 303-333.
- [4] *J. Lannes, S. Zarati*, Théorie de Smith algébrique et classification des H^*V - \mathcal{U} -injectifs, *Bull. Soc. Math. France* **123** (1995), no.2, 189-223.
- [5] *J. Lannes, L. Schwartz*, Sur la structure des \mathcal{A} -modules instables injectifs, *Topology* **28** (1989), 153 - 169.
- [6] *D. M. Meyer*, Injective objects in categories of unstable K -modules, *Bonner Mathematische Schriften.* **316** (1999).
- [7] *H. Miller*, The Sullivan conjecture on maps from classifying spaces, *Ann. of Math. (2)* **120** (1984), no.1, 39-87 ; Corrigendum *Ann. of Math. (2)* 121 (1985) , no.3, 605-609.

Université Paris 13
Institut Galilée
Laboratoire d'Analyse, Géométrie et Applications
UMR 7539
Av. Jean-Baptiste Clément
93430 Villetaneuse FRANCE

e-mail : dagmar@math.univ-paris13.fr

Multiples de formes trace

Marina Monsurrò

1 Notations

Soit k un corps, $\text{car}(k) \neq 2$, on note k_s une clôture séparable de k et $G_k := \text{Gal}(k_s/k)$ le groupe de Galois absolu.

Soit L une extension galoisienne finie de k et $G := \text{Gal}(L/k)$.

Définition 1. On appelle forme Trace de L/k la forme quadratique (non dégénérée) définie par

$$q_L(x) := \text{Tr}_{L/k}(x^2) \quad \forall x \in L.$$

On peut observer que q_L , est invariante par l'action de G , ce qu'on appelle une G -forme.

On dit que deux G -formes q et q' sont G -isomorphes, et on écrit $q \simeq_G q'$, si elles sont isomorphes comme formes quadratiques et si l'isomorphisme préserve l'action de G .

Les extensions galoisiennes de groupe G sont un cas particulier des G -Algèbres galoisiennes que nous introduisons maintenant.

Définition 2. Une G -algèbre galoisienne est une k -algèbre commutative L de dimension $n = |G|$ munie d'une G -action qui satisfait aux conditions équivalentes suivantes :

- 1 . L est étale, c'est-à-dire produit d'extensions finies séparables, et l'action de G sur $X(L) = \text{Hom}^{\text{Alg}}(L, k_s)$ est simplement transitive.
- 2 . Après extension des scalaires à k_s , on obtient $L_s := L \otimes_k k_s \simeq k_s \times k_s \times \dots \times k_s$ et l'action de G permute les n facteurs transitivement.

Dans ce qui suit on va choisir ce point de vue plus général car, par exemple, la catégorie des G -algèbres galoisiennes est fermée par rapport à l'opération d'extension des scalaires, ce qui est très utile pour notre travail.

Soit G un groupe fini, on considère une G -algèbre galoisienne L/k , et soit q_L la trace de L/k . La classe d'isomorphisme de q_L comme G -forme est un invariant de L/k plus complet que la simple forme quadratique q_L car il permet, par exemple, de déterminer aussi la forme q_E pour toute algèbre E de points fixée ($k \subseteq E \subseteq L$).

- Si A est un G_k -module discret, on notera

$$H^i(k, A) := H^i(G_k, A)$$

($i \leq 2$ si A est non abélien).

- Soit L une G -algèbre galoisienne, il est possible d'associer à L un homomorphisme continu, $\phi_L : G_k \rightarrow G$, dont la classe de conjugaison caractérise la classe d'isomorphisme de L . On a donc une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphisme de G -algèbres galoisiennes sur k et l'ensemble des classes de conjugaison de morphismes continus $\phi_L : G_k \rightarrow G$.

On peut donc "lire" sur ϕ_L plusieurs informations sur l'algèbre L ; on a par exemple :

- ϕ_L surjectif $\iff L$ est un corps ;
- $\phi_L \equiv 1 \iff L$ est déployée c'est-à-dire $L \simeq k \times k \times \dots \times k$ (G agit en permutant transitivement les facteurs).

Pour tout i , on notera $H^i(k) := H^i(k, \mu_2)$ et $H^i(G) := H^i(G, \mu_2)$ où $\mu_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; on remarque alors que ϕ_L induit un morphisme

$$\phi_L^* : H^i(G) \longrightarrow H^i(k)$$

L'image $\phi_L^*(x) = x \circ \phi_L$ pour tout $x \in H^1(G)$ sera notée x_L .

2 Résultats

- E. Bayer-Fluckiger et H. W. Lenstra, [2], ont démontré que, si l'ordre de G est impair, q_L est toujours G -isomorphe à la forme unité c'est-à-dire que toute G -algèbre galoisienne L admet une base normale autoduale.
- E. Bayer-Fluckiger et J.P. Serre, [7], ont donné des critères cohomologiques pour déterminer la classe de G -isomorphisme de q_L dans le cas où l'ordre de G est pair.

Théorème 1. *Soient L et L' deux G -algèbres galoisiennes sur un corps k de dimension cohomologique inférieure ou égale à 1, $cd(k) \leq 1$, on a que :*

$$q_L \simeq_G q_{L'}$$

si et seulement si

$$x_L = x_{L'} \forall x \in H^i(G).$$

Corollaire 1. *Sous les mêmes hypothèses du théorème précédent on a que :*

$$q_L \oplus q_L \simeq_G q_{L'} \oplus q_{L'}.$$

Dans un travail commun avec E. Bayer-Fluckiger, [4] nous nous sommes inspirés de ce résultat pour donner, sous des hypothèses plus faibles sur le corps k , deux critères de G -isomorphisme pour des multiples de la forme Trace.

3 Multiples

On notera

$$2 \otimes q_L := q_L \oplus q_L.$$

Théorème 2. *Soient L et L' deux G -algèbres galoisiennes sur un corps k tel que $cd(k) \leq 2$, et q_L et $q_{L'}$ les formes Trace associées. Alors*

$$2 \otimes q_L \simeq_G 2 \otimes q_{L'}$$

si et seulement si

$$(x_L, -1) = (x_{L'}, -1) \in H^2(k) \forall x \in H^1(G),$$

où $(,)$ indique le produit "cup" de deux éléments de $H^1(k)$.

Soit maintenant k un corps de dimension cohomologique virtuelle au plus 2, c'est-à-dire $vcd(k) := cd(k(\sqrt{-1})) \leq 2$ et soit $\Omega(k)$ l'ensemble de ses ordres, on notera k_v la clôture réelle de k en $v \in \Omega$, et G_{k_v} le groupe de Galois absolu de k_v , cyclique d'ordre deux.

Théorème 3. *Avec les notations du Théorème 2, mais avec $vcd(k) \leq 2$, on a :*

$$2 \otimes q_L \simeq_G 2 \otimes q_{L'}$$

si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$(x_L, -1) = (x_{L'}, -1) \forall x \in H^1(G)$$

$$\sigma(L_v) = \sigma(L'_v) \forall v \in \Omega(k)$$

où σ est l'application qui associe à chaque G -algèbre galoisienne $L_v := L \otimes_k k_v$ sur k_v la classe de conjugaison du morphisme correspondant ϕ_{L_v}

Puisque G_{k_v} est cyclique d'ordre 2, la classe de conjugaison de cet homomorphisme est identifiée par la classe de conjugaison de l'image de son élément non trivial par ϕ_{L_v} , c'est-à-dire par une classe de conjugaison dans G ; on va donc appeler $\sigma(L_v)$ cette classe.

Corollaire 2. *Avec les notations du Théorème 2 on a :*

$$4 \otimes q_L \simeq_G 4 \otimes q_{L'}$$

Les preuves de ces résultats, qui généralisent un théorème analogue démontré par Bayer-Fluckiger et Morales, [3], pour les corps de nombres, utilisent des résultats récents sur la cohomologie galoisienne des groupes algébriques linéaires ([5], [6], [8] et [9]).

Bibliographie

- [1] *E. Bayer-Fluckiger*, Galois cohomology and the trace form, Jahresber. DMV **96** (1994), 35-55.
- [2] *E. Bayer-Fluckiger and H. W. Lenstra*, Forms in odd degree extensions and self dual normal bases, Amer. J. Math. **112** (1990), 359-373.
- [3] *E. Bayer-Fluckiger and J. Morales*, Multiples of trace forms in number fields, AMS Proc. Symposia Pure Math., **58.2** (1995) 73-81.
- [4] *E. Bayer-Fluckiger and M. Monsurro*, Multiples of Trace forms, à paraître dans S. Petersburg Mathematical Journal.
- [5] *E. Bayer-Fluckiger and R. Parimala*, Galois cohomology of linear algebraic groups over fields of cohomological dimension ≤ 2 , Invent. Math., **122** (1995) 195-229.
- [6] *E. Bayer-Fluckiger and R. Parimala*, Classical groups and the Hasse principle, à paraître dans Ann. of Math..
- [7] *E. Bayer-Fluckiger and J.-P. Serre*, Torsions quadratiques et bases normales autoduales, Amer. J. Math. **116** (1994) 1-64.
- [8] *C. Scheiderer*, Hasse principles and approximation theorems for homogeneous spaces of virtual cohomological dimension one, Invent. Math. **125** (1996), 307-365.
- [9] *C. Scheiderer*, Classification of hermitian forms and semisimple groups over fields of virtual cohomological dimension one, Manuscr. Math. **89** (1996), 373-394.

Université de Franche-Comté
16, route de Gray, 25030 Besançon Cedex, FRANCE
monsurro@univ-fcomte.fr

Principe d'invariance local pour les chaînes de Markov

Caroline Noquet

Considérons $\xi = (\xi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (v.a.i.i.d.), définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, où $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu borélienne de \mathbb{R} et λ est la mesure de Lebesgue. Les v.a. ξ_k sont telles que $\mathbb{E}(\xi_k) = 0$ et $Var(\xi_k) = \sigma^2 < \infty$. Posons $S_0 = 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k$. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et construisons le processus polygonal ζ_n défini pour tout $t \in [0; 1]$ et tout $\omega \in \Omega$ par

$$\zeta_n(t, \omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} [S_{[nt]}(\omega) + (nt - [nt])\xi_{[nt]+1}(\omega)]$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x . Notons $C[0; 1]$ l'espace des fonctions continues sur $[0; 1]$ et P_n la loi de ζ_n sur $C[0; 1]$. Nous savons [1] que $P_n \Rightarrow W$, où W est la loi du processus de Wiener noté $\{w(t); t \in [0; 1]\}$ et “ \Rightarrow ” désigne la convergence en loi. Si φ est une fonctionnelle définie sur $C[0; 1]$, W -presque partout continue, alors $P_n\varphi^{-1} \Rightarrow W\varphi^{-1}$

En imposant des conditions plus fortes sur la densité p de ξ_k et en restreignant la classe des fonctionnelles, Y. Davydov dans [4] a montré une assertion plus forte, c'est-à-dire qu'au lieu de la convergence faible, il obtient la convergence $P_n\varphi^{-1} \rightarrow W\varphi^{-1}$ en variation.

Notre objectif est de généraliser ce résultat au cas où ξ est une chaîne de Markov (c.m.) homogène stationnaire.

1 Inégalité

Dans un premier temps, il s'agit de majorer la distance en variation entre la loi P_n du vecteur (ξ_1, \dots, ξ_n) et la loi \mathcal{P}_n^a du vecteur translaté $(\xi_1 + a_1, \dots, \xi_n + a_n)$, où $a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite réelle. La loi de probabilité initiale stationnaire Π de ξ a pour densité π supposée absolument continue (a.c.) et le noyau de probabilité de transition P a pour famille de densités de transition $\{p(x, \cdot); x \in \mathbb{R}\}$, où $p(x, \cdot)$ est supposée a.c. pour tout $x \in \mathbb{R}$. Notons π' la dérivée de π et p'_x, p'_y les dérivées partielles de p . Définissons la notion de I-régularité suivante [5].

Définition 1. Soit O un ouvert de \mathbb{R} . La famille des densités de probabilité $\{p(\cdot, \theta); \theta \in O\}$ est I-régulière si l'application de O dans $L^2(\mathbb{R}, \lambda)$ qui à θ associe $p^{1/2}(\cdot, \theta)$ est continûment différentiable au sens des normes standard de \mathbb{R} et de $L^2(\mathbb{R}, \lambda)$. La quantité d'information associée est définie par

$$I(\theta) = 4 \left\| \frac{\partial}{\partial \theta} p^{1/2}(\cdot, \theta) \right\|_2^2,$$

qui s'écrit sous la forme usuelle de la quantité de Fisher.

Notons $J = \{x \in \mathbb{R} | \pi(x) > 0\}$ et $\{q(y, \cdot); y \in J\}$ la famille des densités de transition de la chaîne inversée (par rapport à Π). Nos hypothèses de $/$ -régularité sont les suivantes.

(**R**) La famille $\{\pi(\cdot + t); t \in \mathbb{R}\}$ est I-régulière et

$$I(\pi) = \int_J \left[\frac{\pi'}{\pi}(x) \right]^2 \pi(x) dx.$$

(**R**⁺) La famille $\{p(x, \cdot); x \in J\}$ est I-régulière et pour $x \in J$

$$I^+(x) = \int_J \left[\frac{p'_x}{p}(x, y) \right]^2 p(x, y) dy.$$

(**R**⁻) La famille $\{q(y, \cdot); y \in J\}$ est I-régulière et pour $y \in J$

$$I^-(y) = \int_J \left[\frac{p'_y}{p}(x, y) - \frac{\pi'}{\pi}(y) \right]^2 \frac{\pi(x)p(x, y)}{\pi(y)} dx.$$

Nous supposons de plus que

$$I^+ = \int_J I^+(x)\pi(x)dx < \infty \text{ et } I^- = \int_J I^-(y)\pi(y)dy < \infty. \quad (1)$$

Théorème 1. Si (**R**), (**R**⁺), (**R**⁻) et (1) sont réalisées, alors l'inégalité suivante a lieu

$$\|\mathcal{P}_n^a - \mathcal{P}_n\| \leq \sqrt{2I} \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2},$$

où $I = I(\pi) + I^+ + I^-$.

2 Principe d'invariance local

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $S_0 = 0$ et $S_k = f(\xi_1) + \dots + f(\xi_k)$. Le processus polygonal ζ_n de loi P_n est défini par

$$\zeta_n(t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{n}} [S_{[nt]}(\omega) + (nt - [nt])f(\xi_{[nt]+1}(\omega))].$$

En utilisant l'inégalité précédente et un théorème limite local pour les fonctionnelles de processus aléatoires (Y. Davydov [2]), nous montrons un principe d'invariance local pour la suite de lois $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Théorème 2. *Si les conditions suivantes sont réalisées*

- (1) (\mathbf{R}) , (\mathbf{R}^+) , (\mathbf{R}^-) et (1),
- (2) $\exists \delta > 0$ et $\exists M \geq 0$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geq \delta$ et $|f''(x)| \leq M$,
- (3) $P_n \Rightarrow W_c$ avec $c > 0$,
- (4) $\varphi \in \mathcal{M}_W$,

alors $P_n \varphi^{-1} \rightarrow W_c \varphi^{-1}$ en variation.

Remarque 1. W_c est la loi du processus $\{cw(t); t \in [0; 1]\}$. La définition de la classe des fonctionnelles \mathcal{M}_W ainsi que de nombreux exemples sont disponibles dans [3] et [4].

Dans ce résultat, nous avons supposé la convergence faible de la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. En ajoutant des conditions peu restrictives sur ξ et sur f , il existe un principe d'invariance, c'est-à-dire que la condition (3) est réalisée. En effet, supposons que $f \in L^2(J, \Pi)$ vérifie la condition suivante

(C) $Pf = P_g - g$ pour une fonction $g \in L^2(J, \Pi)$

et notons $\sigma^2 = \|g - f\|_2^2 - \|P(g - f)\|_2^2$. Nous pouvons alors énoncer le corollaire suivant.

Corollaire 1. *Si les conditions suivantes sont réalisées*

- (1) (\mathbf{R}) , (\mathbf{R}^+) , (\mathbf{R}^-) et (1),
- (2) $\exists \delta > 0$ et $\exists M \geq 0$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geq \delta$ et $|f''(x)| \leq M$ et $f \in L^2(J, \Pi)$ vérifie (C) avec $\sigma^2 > 0$,
- (3) ξ est indécomposable,
- (4) $\varphi \in \mathcal{M}_W$,

alors $P_n \varphi^{-1} \rightarrow W_\sigma \varphi^{-1}$ en variation.

Remarque 2. La définition d'une chaîne indécomposable se trouve dans [6]. Les conditions (1) et (3) permettent de démontrer que ξ est Harris-récurrente positive sur J (définition dans [6]). Ceci et la condition (C) sont les conditions requises pour avoir le principe d'invariance, c'est-à-dire la condition (3) du théorème 2.

Bibliographie

- [1] *P. Billingsley*, Convergence of Probability Measures, Wiley, New York (1968).
- [2] *Y. A. Davydov*, Local limit theorems for functionals of random processes, Th. Prob. Appl. **33** (1988), 732-738.
- [3] *Y. A. Davyjdov, M. A. Lifshits*, Fibering method in some probabilistic problems, J. Soy. Math. **31** (1985), 2796-2858.
- [4] *Y. A. Davydov, M. A. Lifshits, N. V. Smorodina*, Local properties of distributions of stochastic functionals, Ams, New York (1998).
- [5] *I. A. Ibragimov, R. Z. Has'minskii*, Statistic Estimation : Asymptotic Theory, Springer Verlag, Berlin, New York (1981).
- [6] *E. Nummelin*, General irreducible Markov chains and non-negative operators, Cambridge University Press, London (1981).

Laboratoire de Statistique et Probabilités
U.F.R. de Mathématiques Université des Sciences et Technologies de Lille
59655 Villeneuve d'Acsq cedex, FRANCE
noquet@jacta.univ-lille1.fr

Quelques nouveaux résultats sur les mosaïques poissonniennes

Katy Paroux

Nous nous intéressons à des problèmes de géométrie aléatoire qui concernent plus particulièrement les mosaïques poissonniennes. Plus précisément, nous nous intéressons à l'étude géométrique de domaines aléatoires associés aux processus poissonniens de droites dans le plan. Chronologiquement, le problème de la détermination de caractéristiques géométriques simples de polygones associés à un processus poissonnien de droites dans le plan s'est posé, pour la première fois, dans les années quarante, au physicien S.A. Goudsmit [7], à propos de l'étude des trajectoires dans les chambres à bulles. Il a calculé, de façon heuristique, les deux premiers moments empiriques de la mesure d'aire des polygones. Dans les années soixante, R.E. Miles [8, 9] a repris ce problème pour l'étude de la qualité du papier dont les fibres sont modélisées par les droites. Par des arguments de nature ergodique, il a obtenu des résultats de convergence presque-sûre, ce qui lui a permis d'en déduire les valeurs exactes des deux (et parfois des trois) premiers moments empiriques de certaines caractéristiques géométriques, dans les cas \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 . Ce modèle a également été exploité afin d'estimer le temps moyen nécessaire à l'extraction de l'huile contenue dans des blocs délimités par un réseau de failles dans un gisement pétrolier (voir F. Conrad et C. Jacquin [2]). En 1975, G. Matheron [10] a mené une étude théorique exhaustive des ensembles aléatoires. Il a également évalué, dans \mathbb{R}^d , $d \geq 2$, la valeur de certains moments empiriques et a obtenu, dans \mathbb{R}^2 , la distribution empirique de la longueur de la projection orthogonale d'un polygone sur un axe fixé, ainsi que quelques résultats sur les caractéristiques du polygone contenant l'origine. Plus récemment, en analyse d'image, les processus poissonniens de droites ont été utilisés pour la reconnaissance des processus stochastiques générateurs d'une image donnée (voir S. Archambault et M. Moore [1]). Le spectre du Laplacien dans les polygones convexes de la mosaïque a été étudié par A. Goldman [5] (en explicitant une correspondance entre les propriétés géométriques des domaines polygonaux et celles de l'enveloppe convexe du pont brownien). Un récent travail de R.E. Miles relatif à une conjecture de D.G. Kendall sur les "grands polygones", a été repris par A. Goldman [6].

Notre contribution [11, 12] concerne des théorèmes centraux limites pour les caractéristiques géométriques des polygones convexes aléatoires, étudiées par R.E. Miles dans le cadre de la convergence presque-sûre.

Soit $\mathcal{P} = \{x_n, n \geq 1\}$ une mesure de Poisson aléatoire dans le plan \mathbb{R}^2 , de mesure d'intensité

$$\mu(A) = \mathbb{E} \text{ card } (A \cap \mathcal{P}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\pi 1_A(\rho, \theta) d\rho d\theta, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2),$$

et soit $\mathcal{H} = \{H(x), x \in \mathcal{P}\}$ l'ensemble des droites polaires associées. L'ensemble \mathcal{H} découpe le plan \mathbb{R}^2 en polygones convexes aléatoires qui forment la mosaïque poissonnienne associée au processus poissonnien de droites dans le plan.

Soit $B_R = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\| < R\}$ le disque ouvert centré à l'origine, de rayon $R > 0$, et soient $D_i, i = 1, \dots, N_R$ les polygones convexes inclus dans B_R . Considérons par ailleurs une fonctionnelle X opérant sur les domaines polygonaux et invariante par translation. Sous des conditions raisonnables de mesurabilité, un argument de nature ergodique permet de voir que les moyennes empiriques, $1/N_R \sum_{i=1}^{N_R} 1_{[0,t]}(X(D_i))$, $R > 0$, convergent presque-sûrement vers une constante. Par définition, cette limite, notée $\tilde{P}\{X \leq t\}$, est la fonction de répartition empirique. De même, on peut montrer par un argument de même nature que, sous certaines conditions, la limite presque-sûre des moyennes empiriques, $1/N_R \sum_{i=1}^{N_R} (X(D_i))$, $R > 0$, existe et est égale à une constante. Par définition, cette constante, notée $\tilde{E} X$, est l'espérance empirique.

Pour certaines caractéristiques géométriques des polygones convexes, des moments empiriques ont pu être calculés. Ainsi par exemple, en désignant respectivement par $\tilde{E} V$, $\tilde{E} P$ et $\tilde{E} S$ les moyennes empiriques de la mesure d'aire, du périmètre et du nombre de sommets des domaines polygonaux, on a $\tilde{E} V = 1/\pi$, $\tilde{E} P = 2$ et $\tilde{E} S = 4$. Nous présentons ici des théorèmes centraux limites pour ces caractéristiques géométriques.

1. Le cas de certains types d'angles liés aux droites polaires et du nombre de sommets des polygones convexes inclus dans BR.

Nous nous intéressons aux angles formés par l'intersection de deux droites polaires avec l'axe (Ox). Désignons par $s_i, i = 1, \dots, S_R$ les sommets des polygones inclus dans B_R puis par β_i et γ_i les deux angles formés par l'intersection avec l'axe (Ox), des deux demi-droites issues du sommet s_i . Plus précisément, on désigne par β_i l'angle associé à celle des deux demi-droites dont le point d'intersection avec l'axe (Ox) est celui d'abscisse la plus petite des deux. La répartition empirique de ces angles vérifie le

Théorème 1. *Fixons t et s dans $[0, \frac{\pi}{2}]$. On a alors :*

$$\frac{1}{S_R^{3/4}} \left(\sum_{i=1}^{S_R} 1_{[0,t]}(\beta_i) 1_{[0,s]}(\gamma_i) - \frac{n_R(n_R - 1)}{4} m(t, s) \right) \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{loi} \mathcal{N}(0, \sigma^2(t, s)) \quad (1)$$

où

$$m(t, s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_0^t |\sin(u - v)| du dv,$$

$$\sigma_2(t, s) = I(t, s) + I(s, t) + J(t \wedge s, t, s) - 2m^2(t, s),$$

avec

$$I(a, b) = \frac{4}{3\pi^2} \int_0^a \left[\int_0^b |\sin(u-v)| dv \right]^2 du,$$

$$J(a, b, c) = \frac{8}{3\pi^2} \int_0^a \left[\int_0^b |\sin(u-v)| dv \int_0^c |\sin(u-v)| dv \right] du$$

La démonstration de ce théorème repose, via la méthode des moments (voir par exemple R. Durrett [4]), sur des arguments de nature combinatoire.

Le théorème suivant se déduit du théorème 1 et d'un résultat de R. Cowan [3] reliant le nombre de points d'intersection des droites polaires situés dans le disque BR au nombre de polygones contenus dans le disque B_R . Il concerne :

- (i) le nombre S_R de sommets contenus dans B_R ;
- (ii) le nombre N_R de polygones contenus dans B_R .

Désignons par n_R le nombre de droites coupant le disque B_R .

Théorème 2. *On a :*

$$\frac{1}{S_R^{3/4}} \left(S_R - \frac{n_R(n_R - 1)}{4} \right) \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{loi} \mathcal{N} \left(0, \frac{64}{3\pi} - 2 \right) \quad (2)$$

$$\frac{1}{N_R^{3/4}} \left(N_R - \frac{n_R(n_R - 1)}{4} \right) \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{loi} \mathcal{N} \left(0, \frac{64}{3\pi} - 2 \right) \quad (3)$$

On peut également obtenir un résultat de convergence en loi pour les moyennes empiriques du nombre de sommets. On sait notamment que $\tilde{E} S = 4$ et que $\tilde{E} S^2 = (\pi^2 - 8)/2$ ([8]). En relation avec ces estimations, nous démontrons, comme conséquence du théorème 2, le théorème central limite suivant :

Théorème 3. *On a :*

$$N_R^{1/4} \left(\frac{\sum_{i=1}^{N_R} S(D_i)}{N_R} - \frac{n_R^2}{N_R} \right) \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{loi} \mathcal{N} \left(0, \frac{1024}{3\pi^2} - 32 \right)$$

Par une méthode analogue à celle qui nous a permis de démontrer le théorème 1, nous obtenons un résultat concernant les angles aux sommets des polygones inclus dans le disque B_R . Soit S_i le plus petit des deux angles formés par l'intersection des deux droites polaires se coupant au sommet s_i . On a alors

Théorème 4. *Pour tout $t \in [0, \pi/2]$, on a :*

$$\frac{1}{S_R^{3/4}} \left(\sum_{i=1}^{S_R} 1_{[0,t]}(\delta_i) - \frac{n_R(n_R - 1)}{4} m(t) \right) \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{loi} \mathcal{N} (0, \sigma^2(t))$$

où

$$m(t) = \int_0^t \sin u \, du$$

$$\sigma^2(t) = \left(\frac{64}{3\pi} - 2 \right) m^2(t).$$

3. Le cas du périmètre des polygones convexes inclus dans B_R .

Désignons par $P(D_i)$, $i = 1, \dots, N_R$ le périmètre du polygone D_i contenu dans le disque B_R . On sait que les moyennes empiriques $1/N_R \sum_{i=1}^{N_R} P(D_i)$ convergent presque-sûrement vers $\tilde{E} P = 2$ ([8]). Dans ce cadre, nous obtenons le théorème central limite suivant :

Théorème 5. *On a :*

$$N_R^{1/4} \left(\frac{\sum_{i=1}^{N_R} P(D_i)}{N_R} - \frac{\pi R n_R}{N_R} \right) \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{loi} \mathcal{N} \left(0, \frac{64}{3\pi} - 2 \right)$$

Pour démontrer ce résultat, on fait appel au théorème de convergence en loi de P. Lévy ainsi qu'au résultat intermédiaire suivant :

Lemme 1. *Pour tout $n \geq 1$, on a :*

$$E \left(\frac{P_0^n}{V_0} \right) < +\infty, \tag{4}$$

où P_0 désigne le périmètre du polygone convexe contenant l'origine et V_0 sa mesure d'aire.

La preuve de ce lemme exploite l'expression explicite de la loi empirique de la longueur de la projection orthogonale d'un polygone sur une droite fixée due à G. Matheron (voir [10]).

Bibliographie

- [1] *S. Archambault and M. Moore*, Statistiques Morphologiques pour l'Ajustement d'Images, *Int. Stat. Rev.* **61** (1993), 283-297.
- [2] *F. Conrad and C. Jacquin*, Représentation d'un réseau bi-dimensionnel de failles par un modèle probabiliste, *Fontainebleau* **295** (1972).
- [3] *R. Cowan*, Properties of ergodic random mosaic processes, *Math. Nachr.* **97** (1980), 89-102.
- [4] *R. Durrett*, Probability : Theory and Examples, *Wadsworth & Brooks CA* (1991).
- [5] *A. Goldman*, Le spectre de certaines mosaïques poissonniennes du plan et l'enveloppe convexe du pont brownien, *PTRF* **105** (1996), 57-83.
- [6] *A. Goldman*, Une conjecture de D.G. Kendall et sa contre-partie brownienne, En préparation, (1997).
- [7] *S.A. Goudsmit*, Random distributions of lines in a plan, *Rev. Mod. Phys.* **17** (1945), 321-322.
- [8] *R.E. Miles*, Random polygons determined by random lines in a plane I, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **52** (1964), 901-907.
- [9] *R.E. Miles*, Random polygons determined by random lines in a plane II, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **52** (1964), 1157-1160.
- [10] *G. Matheron*, Random Sets and Integral Geometry, *JWS New York* (1975).
- [11] *K. Paroux*, Quelques théorèmes centraux limites pour les mosaïques poissonniennes du plan, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* **324** (1997), 465-469.
- [12] *K. Paroux*, Quelques théorèmes centraux limites pour les processus poissonniens de droites du plan, à paraître dans *Adv. Appl. Prob.* (1998).
- [13] *K. Paroux*, Théorèmes centraux limites pour les processus poissonniens de droites dans le plan et questions de convergence pour le modèle booléen de l'espace euclidien, *Thèse de doctorat* (1997).

Laboratoire de Probabilités
Université Lyon 1
43 bd du 11 novembre 1918
69622 Lyon FRANCE
paroux@math.univ-fcomte.fr

Comportement asymptotique d'une somme d'exponentielles de moyennes mobiles

Nelly Torrent

1 Présentation du domaine de recherche

Le titre de ma thèse est “Applications des grandes déviations et de la loi d’Erdős-Rényi pour les variables indépendantes ou de dépendance markovienne”.

Le principe de grandes déviations caractérise un comportement limite d’une famille de probabilités $\{\mu_\varepsilon\}$ sur un espace topologique mesurable (E, \mathcal{E}) quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Les livres de Dembo et Zeitouni et de Deuschel et Stroock ([6], [7]) donnent un exposé de cette théorie. On dit que $\{\mu_\varepsilon\}$ *satisfait le principe de grandes déviations* avec fonction de taux I si pour tout $\Gamma \in \mathcal{E}$

$$-\inf_{x \in \Gamma^\circ} I(x) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \log \mu_\varepsilon(\Gamma) \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \log \mu_\varepsilon(\Gamma) \leq -\inf_{x \in \bar{\Gamma}} I(x)$$

où Γ° et $\bar{\Gamma}$ notent respectivement l’intérieur et la fermeture de Γ . Une *fonction de taux* I est une fonction semi continue inférieurement $I : E \rightarrow [0, +\infty]$, c’est-à-dire telle que pour tout $a \in \mathbb{R}$ l’ensemble de niveau $\Psi_I(a) = \{x : I(x) < a\}$ est un fermé de E . De plus, I est dite *bonne fonction de taux* si tous les ensembles de niveau $\Psi_I(a)$ sont des sous ensembles compacts de E .

L’exemple suivant met en évidence l’utilisation des grandes déviations pour mesurer des “événements rares”. Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées intégrables sur l’espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . La loi forte des grands nombres établit la convergence presque sûre de $\bar{X}_n = (X_1 + \dots + X_n)/n$ vers $E[X_1]$ quand $n \rightarrow \infty$. En 1938, Cramér, voir [4], établit que, pour $a \geq E[X_1]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \log P(\bar{X}_n \geq a) = -\Lambda^*(a)$ où Λ^* est la transformée de Cramér de la distribution de X . Le Théorème de grandes déviations de Cramér caractérise le comportement asymptotique de la probabilité de l’événement rare $\{\bar{X}_n \geq a\}$ pour $a \geq E[X_1]$. Bahadur et Rao et Petrov ([1], [13]) donnent un équivalent de $P(\bar{X}_n \geq a)$.

Ce résultat a été utilisé ensuite par Erdős-Rényi en 1970 ([8]) pour établir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq i \leq n-k} \bar{X}_{i,k} = x^+(\alpha) \quad P - p.s.$$

où les X_i sont i.i.d., $\bar{X}_{i,k} = k^{-1}(X_{i+1} + \dots + X_{i+k})$, $k = k_\alpha(n) = \lfloor \alpha^{-1} \log n \rfloor$ et $x^+(\alpha) > 0$ est tel que $\Lambda^*(x^+(\alpha)) = \alpha$ en faisant de bonnes hypothèses sur $\alpha > 0$. On appellera *moyennes mobiles* les variables aléatoires $\bar{X}_{i,k}$.

P. Erdős et A. Rényi se sont tout d'abord intéressés au gain moyen maximal d'un joueur de pile ou face après $\lfloor C \log_2 n \rfloor$ lancers consécutifs, ils ont donc étudié le cas particulier où les variables aléatoires prennent les valeurs ± 1 avec probabilité $1/2$.

Cette vitesse est la plus intéressante. En effet : pour $k = n$, il suffit d'appliquer la loi des grands nombres pour avoir le comportement de $\max_{0 \leq i \leq n-k} \bar{X}_{i,k}$, pour $k \leq \lfloor C \log_2 n \rfloor$, les auteurs montrent que $\max_{0 \leq i \leq n-k} \bar{X}_{i,k} = 1$ et pour $k/\lfloor C \log_2 n \rfloor \rightarrow \infty$,

que $P(\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq i \leq n-k} \bar{X}_{i,k} = 0) = 1$.

Deheuvels, Devroye et Lynch ([5]), quant à eux, précisent le comportement asymptotique de $(\max_{0 \leq i \leq n-k} \bar{X}_{i,k} - X^+(\alpha))$.

D'autre part, si les variables sont indépendantes, par la loi des grands nombres, on sait que pour $B \in \mathcal{B}$:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{Y_i}(B) \rightarrow P(Y \in B) \quad P - p.s.$$

Ceci nous conduit à nous intéresser aux mesures empiriques construites sur des variables non indépendantes, les moyennes mobiles de longueur $k = k_\alpha(n)$:

$$\bar{\mu}_{n,\alpha} = \frac{1}{n - k + 1} \sum_{i=0}^{n-k} \delta_{\bar{Y}_{i,k}}$$

C'est une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble des mesures de probabilités sur \mathcal{X} mais nous allons la regarder comme une mesure pour établir un PGD presque sûr.

2 Résultats

2.1 Hypothèses

Ici, on garde les notations données dans la présentation. On suppose que les variables $X_1, X_2 \dots$ ont même loi que la variable aléatoire réelle X sur l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . On fait les hypothèses suivantes :

- A) $E[X] = 0$.
- B) X n'est pas p.s. constante.
- C) $\Psi(t) = E[e^{tX}] < \infty \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

On note $I(x) = \Lambda^*(x) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \{tx - \Lambda(t)\}$ la duale de Legendre-Fenchel de Λ (ou transformée de Cramér) avec $\Lambda(t) = \log \Psi(t) = \log E[e^{tX}]$. C'est une fonction positive qui atteint son minimum en $E[X]$, elle est strictement convexe et $(\Lambda^*)' = (\Lambda^{-1})'$.

2.2 Principe de grandes déviations pour la mesure empirique sur les moyennes mobiles

On a établi le principe de grandes déviations suivant

Théorème 1. *P-p.s., $\hat{\mu}_{n,\alpha}$ satisfait le principe de grandes déviations sur \mathbb{R} avec vitesse $k_\alpha(n)$ et fonction de taux*

$$I_\alpha(a) = \begin{cases} I(a) & \text{si } I(a) \leq \alpha \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

2.3 Application

Grâce à ce principe de grandes déviations et au Théorème de Varadhan, on étudie le comportement asymptotique de la somme d'exponentielles de moyennes mobiles :

$$Z_n(\beta) = \sum_{i=0}^{n-k} e^{\beta k \bar{X}_{i,k}}.$$

Théorème 2 (Varadhan, 1966, (14)). *Si P_n satisfait le principe de grandes déviations sur un espace métrique séparable \mathcal{X} avec fonction de taux $I(\cdot)$. Si $F(\cdot)$ est continue bornée, on a :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \int e^{nF(x)} dP_n(x) = \sup_{x \in X} [F(x) - I(x)]$$

Soit β_c l'unique réel strictement positif tel que $\Lambda'(\beta_c) = x^+(\alpha)$; comme $\Lambda^*(x^+(\alpha)) = \alpha = \sup\{\beta x^+(\alpha) - \Lambda(\beta)\}$, on a $\alpha = \beta_c \Lambda'(\beta_c) - \Lambda(\beta_c)$.

En utilisant les Théorèmes 1 et 2, on a le comportement asymptotique logarithmique de $Z_n(\beta)$.

Théorème 3. *P-p.s.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \left(\frac{Z_n(\beta)}{n - k + 1} \right) = \tilde{p}_\infty = \tilde{p}_\infty(\beta) = \begin{cases} \Lambda(\beta) & \text{si } 0 < \beta \leq \beta_c \\ \beta \Lambda'(\beta_c) - \alpha & \text{si } \beta \geq \beta_c \end{cases}$$

On s'intéresse alors à l'asymptotique plus précise de $Z_n(\beta)$ et on démontre le Théorème suivant :

Théorème 4. .

(i) Pour $0 \leq \beta < \beta_c$ $\frac{Z_n(\beta)}{E[Z_n(\beta)]} = \frac{Z_n(\beta)e^{-k\Lambda(\beta)}}{n-k+1} = \frac{Z_n(\beta)}{n-k+1} e^{-k\tilde{p}_\infty} \xrightarrow{L^1} 1$

(ii) Pour $\beta > \beta_c$:

(a) $\frac{Z_n(\beta)}{E[Z_n(\beta)]} = \frac{Z_n(\beta)e^{-k\Lambda(\beta)}}{n-k+1} \xrightarrow{p.s.} 0$,

(b) $\frac{1}{\log k} \left\{ \log \left(\frac{Z_n}{n-k+1} \right) - k\tilde{p}_\infty \right\} \xrightarrow{P} -\frac{\beta}{2\beta_c}$

2.4 Comparaison avec le chaos multiplicatif

Le modèle du chaos multiplicatif introduit en 1974 par Mandelbrot ([11]), étudié entre autres par Kahane et Peyrière ([10]), Collet et Koukiou ([3]) et Franchi ([9]), peut être représenté sous la forme d'un arbre dont les notations ont été introduites dans Neveu [12]. Cette présentation est d'ailleurs utilisée par différents auteurs dans [2] pour les processus de branchement.

On considère ici un arbre \mathbb{A}_n de hauteur n , d -adique (on construit l'arbre de hauteur $n + 1$ à partir de \mathbb{A}_n chaque arête terminale donne naissance à d descendants). Les arêtes sont numérotées par les suites finies (ou mots) non vides $v = (j_1, j_2, \dots, j_k)$ avec $j_i \in \{0, 1, \dots, d - 1\}$, de longueurs $|v| = k \leq n$.

A chaque arête v , on associe une variable aléatoire U_v . On suppose que la collection $(U_v)_{v \in \mathbb{A}_n}$ est constituée de variables aléatoires indépendantes ayant la même loi qu'une variable aléatoire U .

On note rw la suite obtenue en juxtaposant les suites r et w . On dit que l'arête r précède dans l'arbre l'arête v si r est un début de v , c'est à dire qu'il existe un mot w tel que $v = rw$; on écrira $r < v$ ou $r \leq v$ suivant que le mot w est vide ou non. Si v est une arête de \mathbb{A}_n on pose $S_v = \sum_{r \leq v} U_r$ et $S_\emptyset = 0$.

La notation "arbre d -adique" provient du fait qu'on peut repérer le sommet $S(j_1, \dots, j_n)$ d'une arête $v(j_1, \dots, j_n)$ par le point $\sum_{i=1}^n j_i d^{-i}$ de l'intervalle d -adique $I(j_1, \dots, j_n) = [\sum_{i=1}^n j_i d^{-i}, \sum_{i=1}^n j_i d^{-i} + d^{-n}[$ avec $j_i = 0, 1, \dots, d - 1$ et $[0, 1[= \cup_{j_1, \dots, j_n} I(j_1, \dots, j_n)$.

On définit dans ce modèle $Z_n(\beta)$ de la façon suivante :

$$Z_n(\beta) = \sum_{v:|v|=n} e^{\beta S_v} = \sum_{j_1, \dots, j_n} e^{\beta \{U_{j_1} + U_{j_1, j_2} + \dots + U_{j_1, \dots, j_n}\}}.$$

La limite obtenue dans le Théorème 3 est identique à celle obtenue dans le modèle du chaos multiplicatif avec $\alpha = \log d$ (voir [10]) mais l'asymptotique fine décrite dans le Théorème 4 est différente selon le modèle. Contrairement au chaos multiplicatif, aucune variable aléatoire non dégénérée n'apparaît ici à la limite.

Nous n'avons donné ici que le comportement de $Z_n(\beta)$ pour $\beta > 0$. Le cas $\beta < 0$ se traite de la même manière et on voit apparaître une valeur critique $\tilde{\beta}_c < 0$.

Bibliographie

- [1] R.R. Bahadur et R.R. Rao. (1960). On deviations of the sample mean. *Ann. Math. Stat.* **31**. 1015-1027.

- [2] Classical and modern branching processes. (1997). Eds Athreya, Jagers, IMA volume 84 (Springer).
- [3] P. Collet et F. Koukiou. (1992). Large Deviations for Multiplicative Chaos. *Communications in Mathematical Physics*. **147**, 329-342.
- [4] H. Cramér. (1938). Sur un nouveau théorème-limite de la théorie des probabilités. *Actualités scientifiques et industrielles*. **736**, 5-23.
- [5] P. Deheuvels, L. Devroye et J. Lynch. Exact convergence rate in the limit theorems of Erdős-Rényi and Shepp. *Annals of Probability*. (1986). **14**, 209-223.
- [6] A. Dembo et O. Zeitouni. (1998). Large deviations techniques and applications. *Springer Verlag*.
- [7] J-D. Deuschel et D.W. Stroock. (1989). Large deviations. *Academic Press*.
- [8] P. Erdős et A. Rényi. On a new law of large numbers. *J. Analyse Maths*. (1970). **23**, 103-111.
- [9] J. Franchi. (1993). Prépublication n 148 du Laboratoire de Probabilités de l'Université Paris 6.
- [10] J.P. Kahane et J. Peyrière. Sur certaines martingales de B.Mandelbrot. *Advances in Mathematics*. (1976). **22**, 131-145.
- [11] B. Mandelbrot. (1974). Multiplications aléatoires itérées et distributions invariantes par moyenne pondérée aléatoire : quelques extensions. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. **278**, 355-358.
- [12] J. Neveu. (1986). Arbres et processus de Galton-Watson. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*. **22**, 199-207.
- [13] V.V. Petrov. On the limit of large deviations for sums of independent random variables. *Theory of Probability and its Applications*. (1965). **10**, 287-298.
- [14] S.R.S. Varadhan. Large deviations and applications. *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*. (1984). **46**.

adresse postale : Université Paris 7,
 Statistique et Modèles aléatoires,
 Case 7012,
 2 Place Jussieu,
 75251 PARIS cedex 05
 adresse email : Denis.Nelly@wanadoo.fr

Champs de vecteurs adjoints sur l'espace tangent d'un espace symétrique semi-simple

Rosane Ushirobira

1 INTRODUCTION

Ceci est un travail en commun avec le professeur Thierry Levasseur de l'Université de Poitiers.

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie complexe semi-simple et G son groupe adjoint. Soit $\vartheta \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$ une involution. On écrit $\mathfrak{k} = \text{Ker}(\vartheta - I)$, $\mathfrak{p} = \text{Ker}(\vartheta + I)$ et on obtient la décomposition de \mathfrak{g} en sous-espaces propres, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. Les paires $(\mathfrak{g}, \vartheta)$ et $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ sont appelées paires symétriques semi-simples.

Soit $\Theta(\mathfrak{p})$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs algébriques sur \mathfrak{p} . Considérons $\Theta(\mathfrak{p})$ comme identifié à $\text{Der}_{\mathbb{C}}\mathcal{O}(\mathfrak{p})$, où $\mathcal{O}(\mathfrak{p}) = S(\mathfrak{p}^*)$, S est l'algèbre symétrique et \mathfrak{p}^* l'espace dual de \mathfrak{p} . On considère l'homomorphisme d'algèbres de Lie $\tau : \mathfrak{gl}(\mathfrak{p}) \rightarrow \Theta(\mathfrak{p})$ défini par $(\tau(X).f)(v) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(e^{-tX}.v)v \in \mathfrak{p}$, $f \in \mathcal{O}(\mathfrak{p})$ et $X \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{p})$. En particulier, $ad(\mathfrak{k}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{p})$, et on écrit $\tau(X) = \tau(ad(X))$.

Soit K le sous-groupe algébrique de G tel que $\text{Lie}(K) = \mathfrak{k}$. On rappelle que d'après Kostant et Rallis ([5]),

$$\mathcal{O}(\mathfrak{p})^K = \{f \in \mathcal{O}(\mathfrak{p}) : \tau(\mathfrak{k}).f = 0\} = \mathbb{C}[u_1, \dots, u_p]$$

est un anneau de polynômes. Ici, p est le rang de $(\mathfrak{g}, \vartheta)$, i.e. la dimension d'un sous-espace de Cartan $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ pour $(\mathfrak{g}, \vartheta)$. Prenons la sous-algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{k}}$ de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{p})$:

$$\tilde{\mathfrak{k}} = \{X \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{p}) : \tau(X).f = 0 \text{ pour tout } f \in \mathcal{O}(\mathfrak{p})^K\}.$$

Il est clair que $\tilde{\mathfrak{k}}$ contient $ad(\tilde{\mathfrak{k}})$. L'algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{k}}$ a été considérée par plusieurs auteurs (par exemple [6, 7]) dans l'étude des hyperfonctions sphériques sur \mathfrak{p} . On remarque que si $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{k}$ est un idéal de \mathfrak{g} , alors $ad(\mathfrak{s}) = 0$ et $ad(\mathfrak{k}) = ad(\mathfrak{k}/\mathfrak{s})$. Nous allons supposer que \mathfrak{k} ne contient pas d'idéal non nul de \mathfrak{g} . Par conséquent $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ peut être écrit comme un produit direct $\prod_{i=1}^t (\mathfrak{g}^i, \mathfrak{k}^i)$ où chaque facteur $(\mathfrak{g}^i, \mathfrak{k}^i)$ est irréductible (voir [4, VIII.5]).

Quand $p = 1$, le polynôme invariant u_1 est la forme quadratique sur \mathfrak{p} induite par la forme de Killing B de \mathfrak{g} (à une constante près). Alors, $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(\mathfrak{p}, u_1)$ et $\tilde{\mathfrak{k}} \supseteq ad(\mathfrak{k})$, sauf dans le cas où $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) \cong (\mathfrak{so}(q+1, \mathbb{C}), \mathfrak{so}(q, \mathbb{C}))$.

2 RÉSULTATS

Le résultat principal de l'article écrit par T. Levasseur et moi, *Adjoint vector fields on the tangent space of semisimple symmetric spaces* (Journal of Lie Theory, Volume 9 (1999), 293-304), est énoncé dans le théorème suivant.

Théorème 1 (Théorème principal). *Soit $(\mathfrak{g}, \vartheta)$ comme ci-dessus. Alors $ad(\mathfrak{k}) = \tilde{\mathfrak{k}}$ si, et seulement, si chaque facteur irréductible de rang un de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ est isomorphe à $(\mathfrak{so}(q+1, \mathbb{C}), \mathfrak{so}(q, \mathbb{C}))$.*

Une idée de la démonstration du théorème est la suivante. Soit \tilde{K} le sous-groupe algébrique connexe de $GL(\mathfrak{p})$ tel que $Lie(\tilde{K}) = \tilde{\mathfrak{k}}$. Nous démontrons d'abord que la représentation $(\tilde{K} : \mathfrak{p})$ est polaire (voir [1, 2]). En suite, nous utilisons les résultats de Dadok ([1]) et nous supposons qu'il existe une paire symétrique semi-simple $(\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\vartheta})$ avec une décomposition $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{k}} \oplus \mathfrak{p}$ et un sous-espace de Cartan \mathfrak{a} . Finalement, une analyse cas par cas des systèmes de racines restreints $\sum(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ et $\sum(\tilde{\mathfrak{g}}, \mathfrak{a})$ nous permet de conclure la preuve.

La motivation ce théorème vient d'un problème plus général qui consiste à décrire le $\mathcal{O}(\mathfrak{p})$ -module des champs de vecteurs sur \mathfrak{p} qui s'annulent sur $\mathcal{O}(\mathfrak{p})^K$. On définit :

$$\mathcal{E} = \{d \Theta(\mathfrak{p}) : d.f = 0 \text{ pour tout } f \in \mathcal{O}(\mathfrak{p})^K\}.$$

Donc $E = \mathcal{O}(\mathfrak{p})\tau(\mathfrak{k}) \subset \tilde{E} = \mathcal{O}(\mathfrak{p})\tau(\tilde{\mathfrak{k}}) \subset \mathcal{E}$ et nous conjecturons que $\mathcal{E} = \mathcal{O}(\mathfrak{p})\tau(\tilde{\mathfrak{k}})$. L'égalité $\mathcal{E} = \mathcal{O}(\mathfrak{p})\tau(\tilde{\mathfrak{k}})$ a été établie par J. Dixmier [3] pour le cas diagonal, c'est-à-dire, quand $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1$, \mathfrak{g}_1 semi-simple, $\vartheta(x, y) = (y, x)$. Le même résultat est valable quand $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ est de rang maximal, i.e. $p = rk \mathfrak{g}$ (ceci est aussi un cas particulier des résultats de Schwarz ([8])). Les modules E , \tilde{E} et \mathcal{E} sont des $\mathcal{O}(\mathfrak{p})$ -sous-modules gradués de $\Theta(\mathfrak{p})$. Les parties de degré zero sont données par $E_0 = \tau(\mathfrak{k})$, $\tilde{E}_0 = \mathcal{E}_0 = \tau(\tilde{\mathfrak{k}})$. Alors le théorème principal nous montre dans quels cas nous avons $E \subsetneq \tilde{E} = \mathcal{O}(\mathfrak{p})\mathcal{E}_0$. Nous espérons que ce théorème pourra nous aider à résoudre la question originale.

Bibliographie

- [1] J. Dadok, Polar coordinates induced by actions of compact Lie groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **288** (1985), 125-137.
- [2] J. Dadok and V. Kac, Polar representations, *J. Algebra*, **92** (1985), 504-524.
- [3] J. Dixmier, Champs de vecteurs adjoints sur les groupes et algèbres de Lie semi-simples, *J. Reine Angew. Math.*, **309** (1979), 183-190.
- [4] S. Helgason, Differential Geometry, *Lie Groups and Symmetric Spaces*, Academic press, 1978.
- [5] B. Kostant and S. Rallis, Orbits and representations associated with symmetric spaces, *Amer. J. Math.*, **93** (1971), 753-809.
- [6] A. Kowata, Spherical hyperfunctions on the tangent space of symmetric spaces, *Hiroshima Math. J.*, **21** (1991), 401-418.
- [7] H. Ochiai, Invariant functions on the tangent space of a rank one semisimple symmetric space, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, **39** (1992), 17-31.
- [8] G. W. Schwarz, Lifting differential operators from orbit spaces, *Ann. Scient. éc. Norm. Sup.*, **28** (1995), 253-306.

Laboratoire Gevrey de Mathématique Physique, Université de Bourgogne
U.F.R. Sciences et Techniques
B.P. 47870
F-21078 Dijon Cedex
rosaneu-bourgogne.fr

Stabilité asymptotique faible d'équations d'évolution du second ordre soumises à des contrôles non linéaires, non monotones

Judith Vancostenoble *

On considère le problème de la décroissance asymptotique lorsque $t \rightarrow +\infty$ des solutions d'une équation d'évolution abstraite du second ordre soumise à un contrôle non linéaire et non monotone. On montre qu'il y a stabilité asymptotique faible des solutions globales en temps. Ce résultat abstrait s'applique à différents types d'équations (équations des ondes, des poutres, des plaques...) et à différents types de contrôles (contrôle interne, frontière ou ponctuel...). En particulier, on améliore sensiblement certains résultats antérieurs sur la stabilité asymptotique de l'équation des ondes dans un domaine borné avec un contrôle interne ou frontière.

1 équation des ondes soumise à un feedback frontière.

1.1 Présentation du problème.

Considérons tout d'abord l'équation des ondes soumise à un feedback frontière. Le contrôle représente une force d'amortissement qui est une fonction non linéaire et non monotone de la vitesse observée.

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$ de frontière Γ régulière. On considère le problème

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \\ u|_{\Gamma^*} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma_0} = -a(x)q(u_t), \\ u(0) = u_0, u_t(0) = v_0 \text{ dans } \Omega \end{cases}$$

où (Γ_0, Γ^*) est une partition non triviale de Γ , $(u_0, v_0) \in V \times L^2(\Omega)$ avec $V = \{v \in H^1(\Omega) | v|_{\Gamma^*} = 0\}$, $a : \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R}_+$ et $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues. On suppose de plus que Γ_0 n'est pas "trop fin", (par exemple $\exists x_0 \in \Gamma, \exists \varepsilon > 0 | B(x_0, \varepsilon) \cap \Gamma \subset \Gamma_0$).

L'énergie de u est

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, E_u(t) = \frac{1}{2} \left(\|\nabla u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_t(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)$$

Un calcul classique donne

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, E'_u(t) = - \int_{\Gamma_0} a u_t q(u_t) dt.$$

Pour l'étude de la stabilité asymptotique, on fera donc l'hypothèse "naturelle" suivante qui assurera la dissipativité de l'énergie :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda_q(\lambda) \geq 0. \tag{1}$$

Par conséquent, l'énergie est décroissante et les trajectoires $(u(t), u_t(t))$ sont faiblement compactes dans $V \times L^2(\Omega)$. On se demandera ce que l'on peut dire de la stabilité asymptotique avec cette seule information.

1.2 Résultat antérieur.

On connaît le résultat de stabilité forte (voir [4], [1]) : on suppose $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que

$$q \text{ croissante et } q(0) = 0, \quad (2)$$

$$\begin{cases} |q(\lambda)| \leq A + B|\lambda|^r & \text{avec } r \leq \min\left(\frac{N}{N-2}, 2\right) \text{ si } N \geq 3, \\ & \text{avec } r \leq 2 \text{ si } N = 2, \\ \text{aucune condition} & \text{si } N = 1, \end{cases} \quad (3)$$

$$\forall \lambda > 0, q(\lambda) > 0. \quad (4)$$

Alors, $\forall (u_0, v_0) \in V \times L^2(\Omega)$, il y a stabilité forte de la solution de (\mathcal{P}_1) i.e.

$$(u, u_t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} (0, 0) \text{ fortement dans } V \times L^2(\Omega).$$

Dans [1], les auteurs donnent un théorème pour une équation d'évolution abstraite du second ordre et l'appliquent à cet exemple. De manière générale, ce sont des hypothèses assurant la compacité forte des trajectoires $(u(t), u_t(t))$ dans $V \times L^2(\Omega)$ qui permettent de prouver la stabilité forte. Cette compacité est une conséquence de l'hypothèse de monotonie (2) associée à l'hypothèse (3) limitant la croissance de q . Notons que si (3) n'est pas vérifiée, alors le problème de la stabilité forte des solutions de (\mathcal{P}_1) reste ouvert (même lorsque q est croissante).

1.3 Résultat nouveau.

On se place dans le cas où seule la compacité faible des trajectoires dans $V \times L^2(\Omega)$ est assurée. On supprime les hypothèses (2) et (3) et on remplace l'hypothèse (4) par la suivante :

$$\forall \alpha > 0, \inf\{q(\lambda) | \lambda \geq \alpha\} > 0. \quad (5)$$

On obtient le résultat de stabilité faible :

Théorème 1. ([7]) *On suppose (1) et (5). Alors, $\forall (u_0, v_0) \in V \times H$, il y a stabilité faible des solutions globales de (\mathcal{P}_1) i.e.*

$$(u, u_t)t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} (0, 0) \text{ faiblement dans } VxH.$$

Ceci s'applique en particulier lorsque q est croissante, même sans hypothèse limitant sa croissance (cas pour lequel l'existence de la solution est classique).

2 Formulation abstraite.

2.1 Théorème abstrait de stabilité asymptotique faible.

On considère une équation d'évolution abstraite dans un espace mesuré (X, μ) . On note H l'espace de Hilbert $L^2(X, \mu)$. L'équation est régie par un opérateur linéaire $A : D(A) \rightarrow H$. On note $V = D(A^{\frac{1}{2}})$ et \tilde{A} l'extension de A à V' . On se donne (Y, m) un autre espace mesuré où Y est une partie de X . Soit $a \in L^\infty(Y, m)$

positive et soit $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue vérifiant (1) et (5). On définit un opérateur abstrait Q (représentant une force de contrôle agissant sur la partie $\text{supp}(a)$ de Y). Cet opérateur est défini sur une partie $D(Q)$ de V à valeurs dans V' et vérifie pour tout $v \in D(Q)$ et tout φ régulier,

$$(Q(v), \varphi)_{V', V} = \int_Y a(y)q(v(y))\varphi(y)dm(y)$$

Pour $(u_0, v_0) \in V \times H$, on considère le problème abstrait :

$$(\mathcal{P}_2) : \begin{cases} u_{tt} + \tilde{A}u = -Q(u_t), \\ u \in V, \\ u(0) = u_0, u_t(0) = v_0. \end{cases}$$

Si $\text{supp}(a)$ (i.e. la région sur laquelle le contrôle agit) n'est pas trop "fin", alors il y a stabilité faible des solutions globales de (\mathcal{P}_2) . **(Pour un énoncé complet des hypothèses et du théorème, voir [8] ou [9]).**

Remarque. Cette formulation s'applique à de nombreuses équations (choix de A) et à divers types de contrôle (choix de Y).

Exemple 1. *équation des ondes soumise à un contrôle frontière, (problème (\mathcal{P}_1)) :* on pose $(X, \mu) = (\bar{\Omega}, dx)$ et $(Y, m) = (\Gamma, d\sigma)^1$. On définit $Au = -\Delta u$ pour $u \in D(A) = \{v \in V \mid \Delta v \in L^2(\Omega) \text{ et } \frac{\partial v}{\partial u}|_{\Gamma_0} = 0\}$.

2.2 Applications à d'autres types de contrôle.

Exemple 2. *équation soumise à un contrôle interne :* on pose $(X, \mu) = (Y, m) = (\Omega, dx)$ pour étudier le problème

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = -a(x)q(u_t) \text{ dans } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

avec $a : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ positive telle que $\text{mes}(\text{supp}(a)) > 0$.

Exemple 3. *équation soumise à un contrôle ponctuel :* soient $l > 0$ et $x_0 \in]0, l[$. On pose $(X, \mu) = (]0, l[, dx)$ et $(Y, m) = (\{x_0\}, \delta(\cdot - x_0))^2$. On peut alors étudier le problème

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = -q(u_t(x_0))\delta(\cdot - x_0) \text{ dans }]0, l[, \\ u(0) = u(l) = 0. \end{cases}$$

2.3 Applications à d'autres équations.

Exemple 4. *équation des plaques :* on définit $Au = \Delta^2 u$ pour $u \in D(A) = \{v \in V \mid \Delta^2 v \in L^2(\Omega) \text{ et } \Delta v|_{\Gamma} = 0\}$. Ceci permet d'étudier le problème

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u = -a(x)q(u_t) \text{ dans } \Omega, \\ u|_{\Gamma} = 0, \Delta u|_{\Gamma} = 0. \end{cases}$$

-
1. dx étant la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^N et $d\sigma$ la mesure superficielle sur Γ
 2. $\delta(\cdot - x_0)$ étant la masse de Dirac en x_0

Exemple 5. . *Système d'équations d'ondes couplées* : on pose $(X, \mu) = (Y, m) = (\Omega \times \{1, 2\}, dx dv)^3$. $H = L^2(\Omega \times \{1, 2\}, dx dv)$ identifiée à l'espace $(L^2(\Omega))^2$. On se donne $D(A) = (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))^2$ et $A = \begin{pmatrix} -\Delta - \delta\Delta \\ -\delta\Delta - \Delta \end{pmatrix}$ avec $0 < |\delta| < 1$.

On définit $a : \Omega \times \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$ par $a(\cdot, 1) = 0$ et $a(\cdot, 2) = \tilde{a}(\cdot)$, où $\tilde{a} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ est telle que $\text{mes}(\text{supp}(\tilde{a})) > 0$. On peut alors étudier

$$\begin{cases} u_{tt}^1 - \Delta u^1 - \delta\Delta u^2 = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_{tt}^2 - \Delta u^2 - \delta\Delta u^1 = -\tilde{a}(x)q(u_t^2) & \text{dans } \Omega, \\ u_{|\partial\Omega}^1 = u_{|\partial\Omega}^2 = 0 \end{cases} \quad (6)$$

(Pour une formulation complète concernant ces exemples et pour d'autres exemples, voir [8] ou [9].)

Bibliographie

- [1] F. CONRAD, M. PIERRE, *Stabilization of second order evolution equations by unbounded nonlinear feedbacks*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 11 (1994), 5, 485-515.
- [2] A. HARAUX, *Stabilization of trajectories for some weakly damped hyperbolic equations*, J. Differential Equations 59 (1985), 2, 145-154.
- [3] A. HARAUX, *Comportement à l'infini pour certains systèmes dissipatifs non linéaires*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 84A (1979), 213-234.
- [4] I. LASIECKA, *Stabilization of wave and plate-like equations with nonlinear dissipation on the boundary*, J. Differential Equations 79 (1989), 340-381.
- [5] M. PIERRE, J. VANCOSTENOBLE, *Strong stability for one-dimensional wave equations with nonlinear nonmonotone boundary feedbacks*, en préparation.
- [6] M. SLEMROD, *Weak asymptotic decay via a "relaxed invariance principle" for a wave equation with nonlinear, nonmonotone damping*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 113A (1989), 87-97.
- [7] J. VANCOSTENOBLE, *Stabilisation faible de l'équation des ondes par un contrôle non linéaire, non monotone*, Inst. Elie Cartan Univ. Nancy I (1997), 3.
- [8] J. VANCOSTENOBLE, *Weak asymptotic stability of second order evolution equations by nonlinear and nonmonotone feedbacks*, SIAM J. Math. Anal., to appear.
- [9] J. VANCOSTENOBLE, *Stabilisation non monotone de systèmes vibrants et Contrôlabilité*, Thèse de l'Université de Rennes I, en préparation.

Laboratoire MIP, UFR MIG, Université Paul Sabatier Toulouse III
118 route de Narbonne, 31 062 Toulouse Cedex 4
vancoste@mip.ups-tlse.fr

* Ce travail a été effectué sous la direction de Michel Pierre à l'Institut E. Cartan, U.H.P. Nancy I et rédigé lorsque l'auteur travaillait à l'I.R.M.A, U.L.P. Strasbourg I.

3. dv étant la mesure discrète sur 1, 2.

Invariants par conjugaison dans le dual de l'algèbre de Steenrod

*Sarah Whitehouse*⁴

d'après un travail avec M.D. Crossley

1 Introduction

Nous décrivons un travail en commun avec M.D. Crossley [1]. Nous nous intéressons à la conjugaison canonique, χ , de \mathcal{A}_* , le dual de l'algèbre de Steenrod modulo 2, afin de déterminer le sous-espace, \mathcal{A}_*^χ , d'éléments invariants sous l'action de χ . Nous donnons des bornes pour la dimension de ce sous-espace en chaque degré et nous démontrons que, après l'inversion de ξ_1 , il devient une algèbre polynomiale sur une famille de générateurs naturels. Sans cette inversion de ξ_1 , l'algèbre des invariants est loin d'être polynomiale. Nous proposons deux conjectures sur la structure des invariants.

La motivation pour étudier ce problème vient de la théorie de l'homotopie stable. Les expressions comme $H^m(\sum_n; \pi_*(E^{\wedge n}))$ interviennent dans les suites spectrales pour la "gamma cohomologie" d'un spectre en anneau E_∞ [4]. Si E est bon, $\pi_*(E^{\wedge n}) \approx (E_*E)^{\otimes(n-1)}$, l'action de \sum_n étant donnée en [5]; pour $n = 2$, \sum_2 agit par la conjugaison de l'algébroïde de Hopf E_*E . Donc, ici nous étudions le cas très spécial où E est le spectre d'Eilenberg-MacLane $H\mathbb{F}_2$ et $n = 2$.

Comme algèbre, $\mathcal{A}_* = \mathbb{F}_2[\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots]$, où le degré de ξ_i est $2^i - 1$. Le coproduit ϕ est déterminé par

$$\phi(\xi_k) = \sum_{i=0}^k \xi_{k-i}^{2^i} \otimes \xi_i,$$

où $\xi_0 = 1$.

La "conjugaison" χ dans une algèbre de Hopf connexe est une application linéaire bijective qui est un anti-isomorphisme ($\chi(xy) = \chi(y)\chi(x)$). Elle est déterminée par la formule

$$\chi(a) = -a - \sum a'_i \chi(a''_i)$$

où $\phi(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a + \sum a'_i \otimes a''_i$, ($\deg a > 0$). Si l'algèbre de Hopf est commutative ou cocommutative alors χ^2 est l'identité.

Pour le dual de l'algèbre de Steenrod, Milnor a donné la formule suivante pour la conjugaison [2].

4. Je voudrais remercier la Communauté Européenne pour une bourse TMR, et le Laboratoire d'Analyse, Géométrie et Applications (UMR 7539 au CNRS), Université Paris-Nord, pour son accueil

Lemme 1. Dans le dual de l'algèbre de Steenrod \mathcal{A}_* ,

$$\chi(\xi_n) = \sum_{\alpha \in \text{Part}(n)} \prod_{i=1}^{l(\alpha)} \xi_{\alpha_i}^{2^{\sigma(i)}},$$

où $\text{Part}(n)$ est l'ensemble de partitions ordonnées de n ; et pour une partition ordonnée $\alpha = (\alpha(1), \alpha(2), \dots, \alpha(l)) \in \text{Part}(n)$, $\sigma(i)$ indique la somme partielle $\sum_{j=1}^{i-1} \alpha(j)$.

2 Propriétés élémentaires de la conjugaison

Nous donnons quelques observations sur la conjugaison d'une algèbre de Hopf H . On note H^χ le sous-espace des éléments de H qui sont invariants par l'action de la conjugaison χ . Donc, $H^\chi = \text{Ker}(\chi - 1)$, où 1 est l'identité. Pour H une algèbre de Hopf graduée, on note H_d la partie de H en degré d .

Lemme 2. 1. Si H est commutative, H^χ est une sous-algèbre de H .

2. Si H est une algèbre de Hopf commutative ou cocommutative sur \mathbb{F}_2 , alors $\dim H_d^\chi \geq \dim H_d / 2$.

3. Si H est une algèbre de Hopf commutative sur \mathbb{F}_2 , $\text{Im}(\chi - 1)$ est un idéal dans $\text{Ker}(\chi - 1)$. En particulier, $\text{Im}(\chi - 1)$ est une sous-algèbre de H .

3 Bornes pour la dimension de l'espace des invariants

Théorème 1. On note la dimension de l'algèbre de Steenrod en degré d par D_d . Alors $D_{d_1}/2 \leq \dim(\chi - 1)(\mathcal{A}_*)_d \leq D_d/2$ et donc

$$D_d/2 \leq \dim(\mathcal{A}_*^\chi)_d \leq D_d - (D_{d-1}/2).$$

La borne inférieure a été donnée par le lemme 2 (2); la borne supérieure est un corollaire du résultat suivant.

Proposition 1. Les images sous l'action de $\chi - 1$ des monômes $\xi_1^{r_1} \dots \xi_k^{r_k}$ tels que $r_k = 1$ sont linéairement indépendants.

Exemple 6. En degré 42, la dimension de \mathcal{A}_* est 92. Les bornes du théorème 1 sont : $46 \leq \dim(\mathcal{A}_*^\chi)_{42} \leq 49$. En fait, $\dim(\mathcal{A}_*^\chi)_{42} = 47$, (et 42 est le plus petit degré tel que la borne inférieure n'est pas exacte).

4 Invariants après l'inversion de ξ_1

Maintenant nous ajoutons à \mathcal{A}_* un inverse formel de ξ_1 , en notant l'objet obtenu par $\mathcal{A}_*[\xi_1^{-1}]$. Le sous-espace des éléments invariants de $\mathcal{A}_*[\xi_1^{-1}]$ est beaucoup plus facile à décrire. En fait, nous démontrons qu'il est une algèbre polynômiale sur certains éléments invariants naturels.

Théorème 2. *On note $k = \mathbb{F}_2[\xi_1, \xi_1^{-1}]$. Alors*

$$\mathcal{A}_*[\xi_1^{-1}]^x = k[\epsilon_2, \epsilon_3, \dots],$$

où $\epsilon_2 = \xi_2\chi(\xi_2)$ et, pour $n \geq 3$, $\epsilon_n = \xi_2\xi_n + \chi(\xi_2\xi_n)$. En outre,

$$H^i\left(\sum_2; \mathcal{A}_*[\xi_1^{-1}]\right) = 0 \text{ pour } i > 0.$$

La démonstration de la deuxième partie est facile : dans \mathcal{A}_* on a $(\chi - 1)\xi_2 = \xi_1^3$. Donc, dans $\mathcal{A}_*[\xi_1^{-1}]$, $1 \in \text{Im}(\chi - 1)$, mais $\text{Im}(\chi - 1)$ est un idéal dans $\text{Ker}(\chi - 1)$ et donc ils sont égaux. Il est facile de voir que les éléments ϵ_n sont des invariants algébriquement indépendants. Alors $k[\epsilon_2, \epsilon_3, \dots] \subset \mathcal{A}_*[\xi_1^{-1}]$. Pour la démonstration de l'inclusion dans l'autre sens on utilise la proposition 2 ci-dessous.

Lemme 3. *Si $x \in \mathcal{A}_*$ est invariant et si $\xi_1^{r_1}\xi_2^{r_2} \dots \xi_k^{r_k}$ est son premier monôme (dans l'ordre lexicographique à droite), alors r_2 est pair.*

Proposition 2. *Si $x \in \mathcal{A}_*^X$, il existe un entier s tel que $\xi_1^s \in \mathbb{F}_2[\xi_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots]$*

Démonstration. *Soit $l = \xi_1^{r_1}\xi_2^{r_2} \dots \xi_k^{r_k}$ le premier monôme de x . Donc, par la proposition 2, r_2 est pair. On pose $z = \xi_1^{r_1}\epsilon_2^{r_2/2}\epsilon_3^{r_3} \dots \epsilon_k^{r_k}$. Le premier monôme de z est $\xi_1^{r_1+t}\xi_2^{r_2} \dots \xi_k^{r_k}$, où $t = 3(r_3 + \dots + r_k)$. C'est aussi le premier monôme de $\xi_1^t x$ et alors nous posons $x' = \xi_1^t x + z$. On constate que x' est invariant et qu'il a un premier monôme plus petit que celui de x . Maintenant on peut utiliser une induction pour démontrer le résultat.*

5 Conjectures

Une question naturelle est la suivante : quel est le premier élément invariant qui contient ξ_n ? Si $n = 1$, c'est évidemment ξ_1 et si $n = 2$ on peut voir que c'est $\epsilon_2 = \xi_2\chi(\xi_2)$. Pour $n \geq 3$, $\epsilon_n = (\chi - 1)(\xi_2\xi_n)$ est un candidat évident, de degré $2^n + 2$. Cependant, nous avons trouvé que, au moins pour $3 \leq n \leq 7$, il existe des invariants de degré $2n + 1$ qui contiennent ξ_n et nous proposons la conjecture suivante.

Conjecture 1. *Pour chaque $n > 3$, il existe un polynôme d_n dans \mathcal{A}_* de degré $2n + 1$, invariant sous l'action de x et dont le premier monôme (pour l'ordre lexicographique à droite) est $\xi_1^2\xi_n$.*

Par exemple, on peut prendre $(\chi - 1)(\xi_2\xi_3)/\xi_1$ pour d_3 .

Conjecture 2. Les éléments suivants engendrent les invariants par conjugaison, $(\mathcal{A}_*)^X$

1. ξ_1 ,
2. $\xi_n \chi(\xi_n)$, pour $n \geq 2$,
3. $(\chi - 1)(\xi_{m_1} \xi_{m_2} \dots \xi_{m_n})$, pour $2 \leq m_1 < \dots < m_n$, $n \geq 2$ et où $n > 2$ ou $m_1 > 2$,
4. d_n , pour $n \geq 3$.

Nous avons construit d_n , pour $n = 3, \dots, 7$ et nous avons vérifié la conjecture 2 jusqu'au degré 40.

Proposition 3. Les trois premières familles d'éléments de la conjecture 2 sont des générateurs nécessaires. Pour chaque $n \geq 3$, si d_n existe, alors il est un générateur nécessaire et s'il n'existe pas, alors en est un générateur nécessaire.

Bibliographie

- [1] *M.D. Crossley and Sarah Whitehouse*, On Conjugation Invariants in the dual Steenrod algebra, prépublication de l'Université Paris-Nord, 98-08, Mars 1998.
- [2] *John Milnor*, The Steenrod algebra and its dual, *Ann. Math.*, 67, (1958), 150-171.
- [3] *J. Milnor and J. Moore*, On the structure of Hopf algebras, *Ann. Math.*, 81, (1965), 211-264.
- [4] *Alan Robinson and Sarah Whitehouse*, Γ -homology of commutative rings and of E_∞ -ring spectra, Warwick preprint 76/1995.
- [5] *Sarah Whitehouse*, Symmetric group actions on tensor products of Hopf algebroids, en préparation.

Dépt. de Mathématiques
Faculté des Sciences-Jean Perrin
Université d'Artois-Pôle de Lens
Rue Jean Souvraz
S.P. 18
62307 LENS FRANCE
whitehou@agat.univ-lille.fr
whitehouse@euler.univ-artois.fr

Que faire après un doctorat ?

(Réflexion élaborée par Eva Bayer au contact des doctorantes de Besançon
Compte-rendu rédigé et complété par Françoise Delon)

Après la thèse, on se voit brutalement projetée dans le monde du travail. Il vaut mieux s'y être préparée. Voici quelques conseils.

Avant les candidatures.

Le *Livret du candidat*, édité par la SMAI (Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles) et la SMF (Société Mathématique de France), est un bon outil. Il expose différentes possibilités dans la recherche et l'enseignement supérieur. Deux perspectives s'ouvrent : les postes permanents et les postes temporaires. Les deux exigent en général qu'on quitte le laboratoire de thèse. Il faut donc faire un inventaire des laboratoires ayant des spécialités proches du thème de la thèse, puis entrer en contact avec eux. Il ne convient pas de faire preuve d'une excessive timidité, c'est la normalité que de chercher un point de chute !

Le guide de la CIFRE (Convention Industrielle de Formation par la REcher-che) présente des possibilités en liaison avec les entreprises.

CANDIDATURES SUR DES POSTES PERMANENTS

Lors des candidatures.

Joindre toujours les rapports de thèse et des lettres de recommandation (envoyées directement aux Président(e)s des Commissions des Spécialistes). Il est souhaitable que la directrice ou le directeur de thèse aille aux nouvelles, pour savoir par exemple s'il y a un profil souhaité ou quelles sont les candidatures locales.

À l'époque difficile et lourde de conséquences des auditions.

Lorsqu'on va être auditionnée dans une université, il convient de se soucier des activités scientifiques locales et d'être consciente que ceux qui vous écoutent ont à l'esprit les questions suivantes : pourquoi candidate-t-elle ici ? Cette éventuelle jeune collègue s'intègre-t-elle à l'équipe locale ?

Il faut mentionner ses expériences d'enseignement, rapidement, sauf dans un IUFM où l'audition doit être pensée différemment.

La durée des auditions est variable, se renseigner préalablement (par courrier électronique par exemple) sur les conditions (durée, possibilité d'utiliser un rétroprojecteur,...)

C'est principalement la clarté de l'expression qui ressort de l'audition. Il faut s'adresser à ceux qui ne sont pas scientifiquement proches du dossier, qu'ils n'aient pas lu, et qui ne poseront pas d'eux-mêmes des questions.

CANDIDATURES À DES BOURSES POST-DOCTORALES

Ces bourses sont multiples, il y a les bourses Marie Curie (qui nécessitent un correspondant local), les bourses liées à un réseau européen, les bourses Lavoisier... Il y a en général des conditions d'âge, éventuellement modulées par le fait qu'on élève des enfants. Les conditions sont variées, par exemple en ce qui concerne l'assurance-maladie ou le chômage. Il y a également dans certains pays des fonds propres à une université, une équipe ou un professeur. Il convient de faire preuve de souplesse. Un exemple : en Allemagne, du fait de la grande autonomie des universités, il est parfois possible d'obtenir de l'argent de juin à septembre.

Des informations sont disponibles :

1. Sur le WEB, en particulier sous la rubrique Ministère des Affaires Étrangères du site http://www.france.diplomatie.fr/culture/france/partenaire/dcst/unite_03/bourses1/index2.html

De nombreuses équipes ont mis au point des pages d'aide aux candidatures, voir par exemple :

<http://www.ens-lyon.fr/~plescann/TEXTS/candidater.html>

<http://www.logique.jussieu.fr/www.berline/candidatures.html>

2. Lors des « Doctoriales ». Les doctoriales sont des journées organisées au niveau national ou régional, globales pour toutes les disciplines ou spécialisées, par exemple pour les mathématiques. L'initiative en est venue des écoles doctorales, à la recherche de débouchés non-universitaires pour les docteurs. Il y a en particulier des possibilités vers les mathématiques financières.

3. Auprès de l'association Bernard Gregory (<http://www.abg.asso.fr>).

Les conseils lors de la candidature sont les mêmes que précédemment, il faut en particulier se préoccuper de l'adéquation avec l'éventuel laboratoire d'accueil.

Dans tous les cas il est important de maintenir les liens avec la France si l'on y espère un recrutement ultérieur.

Cet exposé a été suivi d'un court échange d'idées, de questions et d'informations sur

la place des femmes dans les maths.

La première question a deux versions :

- « Comment tirer avantage du fait qu'on est une femme? »

ou :

- « Comment faire pour que ça ne soit pas un handicap? »

Eva répond : « Chaque individu a des qualités et des défauts, et c'est à lui d'en tenir compte pour faire le meilleur travail possible. Je ne pense pas que l'on puisse faire plus. Une femme qui choisit le métier de mathématicien rencontre généralement plus de difficultés qu'un homme, et le fait qu'elle persiste montre une forte motivation. Il se peut que certains collègues le comprennent, et en tiennent compte. »

En d'autres termes : une femme matheuse est particulièrement motivée et certains collègues le savent bien.

Une collègue donne les pourcentages de femmes parmi les qualifiés et recrutés dans l'enseignement supérieur, en maths, ces dernières années (ces chiffres regroupent 25^e et 26^e sections, universités, IUFM et IUT).

	qualification	recrutement
Maîtres de conférences		
1991		20,5
1992	18,5	23
1993	19	26,8
1994	17,6	17
1995		19
1996	25	26
1997	21,5	20
1998		30;9
Professeurs		
1991		18
1992	13,5	9,7
1993	14,5	14,5
1994	10,5	7
1995		9,4
1996	12	0
1997	13,5	17
1998		6,8

Il semble que les pourcentages de femmes au niveau de la qualification et du recrutement des maîtres de conférences soient plutôt supérieurs au pourcentage de femmes dans les études doctorales. Le pourcentage de femmes recrutées maîtres de conférences est en général supérieur au pourcentage des femmes qualifiées ; par contre c'est l'inverse au niveau professeur. Le pourcentage des femmes professeurs reste très bas, surtout en 25^e section. D'une façon générale les pourcentages en 25^e sont, pratiquement à tous les niveaux, inférieurs à ceux de la 26^e. Il est également signalé que les femmes sont plus souvent que les hommes recrutées avec une double qualification 25^e et 26^e sections, et en IUFM et IUT.

L'on en vient au fameux choix entre vie professionnelle et vie familiale. L'une d'entre nous exprime avec limpidité l'évidence de ses choix : « J'aime bien mes quatre enfants et j'aime bien faire des choses sans eux ». Beaucoup insistent sur la nécessité de partager les tâches, de se faire aider.

On cite le cas d'un Inspecteur Général qui, en tant que tel, donnerait aux enseignantes des conseils sur la gestion de leur vie familiale. Si l'on se trouve dans une situation de ce genre et que l'on en est choquée, il est possible de saisir l'Observatoire de la Parité (auprès du Service des Droits des Femmes, 31 rue Lepeletier 75009 Paris, tel. 01 47 70 41 58). De même si l'on entend des propos sexistes.

Une ancienne élève de l'École Normale Supérieure de Jeunes Filles raconte que, trente ans après leur entrée à l'École, une bonne part des mathématiciennes de sa promotion ont trois enfants ou plus et enseignent à l'Université ou en classe préparatoire. Mais il faut souligner l'évolution du mode et de l'âge du recrutement depuis cette époque. La mobilité est aujourd'hui presque nécessaire et la précarité fréquente pendant quelques années, années qui peuvent être précisément celles où l'on souhaiterait fonder une famille.

Conclusion ?

Ce court débat n'avait pas eu de conclusion et il est un peu artificiel d'en ajouter une a posteriori. Essayons tout de même.

Le mot « doctorat » recouvre beaucoup de choses : il y a les années de préparation, la soutenance, le titre, le contenu scientifique, il y a le support financier avant et pendant la préparation, les candidatures après la soutenance, et beaucoup d'autres choses encore. Confondre tout cela présente des

risques, par exemple le risque de gommer les trois ou quatre années de vie que représente la préparation ou le risque de croire que les candidatures ne sont qu'une formalité administrative. Or déterminer les différentes voies qui s'ouvrent après la thèse, déterminer les différents laboratoires où candidater, les connaître et s'en faire connaître exige du temps, il faut donc commencer à s'en soucier très tôt, par exemple dès la deuxième année de thèse. Il faut également s'informer, discuter, réfléchir, c'est-à-dire parler, les directrices et les directeurs de thèse sont aussi là pour cela, ainsi que le groupe des doctorantes et doctorants. En bref les candidatures sont des concours comme les autres, qui se préparent en tant que tels. Quant à l'autre risque, il pose la question de l'équilibre entre goûts et choix stratégiques, entre vie au présent et vie tout entière organisée en fonction de l'avenir, un avenir qu'en fait on ne contrôle que partiellement. Une précarité prolongée ou un premier tour infructueux de candidatures sera vécue plus difficilement si l'on a choisi sans enthousiasme un sujet censé être « porteur » que si l'on a vécu au jour le jour sa passion mathématique ! De la même façon on ne peut choisir entre l'enseignement, la recherche, l'industrie ou d'autres choses encore, ni décider d'un séjour prolongé à l'étranger en tenant compte des seuls impératifs de carrière et en oubliant ses goûts et son psychisme personnels. Durant quelques années on se trouve face à des décisions importantes, il faut en être consciente et s'être donné les moyens d'analyse et de réflexion.

Analyse harmonique sur les groupes et les espaces symétriques

Pascale Harinck

1 Introduction :

Un problème important de l'analyse harmonique sur les groupes ou espaces symétriques est la formule de Plancherel. C'est une généralisation du théorème de Plancherel classique sur \mathbb{R} qui dit que la transformée de Fourier s'étend en une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ dans lui-même. Pour f une fonction de classe C^∞ à support compact, on définit sa transformée de Fourier \hat{f} par $\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y)e^{ixy} dy$ et on a la formule d'inversion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \hat{f}(y) dy$. Un rôle particulier est joué par les fonctions $x \rightarrow e^{ixy}$: d'une part, ce sont des fonctions propres pour l'action de $\frac{d}{dx}$ (qui engendre l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients constants sur \mathbb{R} invariants par translation), d'autre part ce sont les morphismes de groupe continu de \mathbb{R} dans le groupe unitaire de \mathbb{C}^* (de tels morphismes s'appellent des caractères unitaires ou des représentations de dimension 1 unitaires).

La généralisation de cette théorie sur les groupes de Lie ou espaces symétriques est liée à la théorie des représentations et à la décomposition spectrale des opérateurs différentiels.

Après avoir posé le problème dans sa généralité, j'expliquerai comment la méthode des orbites permet d'obtenir la formule d'inversion de Fourier sur $SL(2, \mathbb{R})$.

2 Préliminaires :

Un groupe de Lie G est un groupe muni d'une structure de variété analytique pour laquelle l'application $(x, y) \rightarrow xy^{-1}$ est analytique. L'espace tangent \mathfrak{g} en l'élément neutre e de G s'appelle l'algèbre de Lie de G .

Le groupe G agit sur lui-même par les automorphismes $\varphi_g(x) = gxg^{-1}$. La différentielle $Ad(g) \in End(\mathfrak{g})$ de φ_g en e est appelée l'action adjointe de G sur \mathfrak{g} et la différentielle $ad(X)$ de Ad en e est un morphisme de \mathfrak{g}

dans $End(\mathfrak{g})$ appelé action adjointe de \mathfrak{g} . On note $[X, Y] = ad(X)(Y)$. Le crochet $[,]$ est une forme antisymétrique qui satisfait l'identité de Jacobi : $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [Y, X]] = 0$.

Exemple : Le groupe $Sl(n, \mathbb{R})$ est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $sl(n, \mathbb{R}) = \{X \in M(n, \mathbb{R}); trace(X) = 0\}$. Pour $g \in Sl(n, \mathbb{R})$ et pour X, Y dans \mathfrak{g} , on a : $Ad(g)X = gXg^{-1}$ et $[X, Y] = XY - YX$.

On définit la forme de Killing sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ par $\kappa(X, Y) = trace(ad(X)ad(Y))$. Le groupe G et l'algèbre de Lie \mathfrak{g} sont dits semi-simples si la forme κ est non dégénérée et réductifs si \mathfrak{g} est le produit d'une algèbre abélienne et d'une algèbre de Lie semi-simple.

On appelle espace symétrique réductif le quotient $\mathbb{X} = G/H$ où G est un groupe de Lie réductif réel muni d'une involution σ et H est un sous-groupe ouvert du groupe des points de G fixés par σ . Dans ce cas H est un groupe de Lie réductif.

On note \mathfrak{g} et \mathfrak{h} les algèbres de Lie de G et H , on note encore par σ la différentielle de σ . Elle induit une décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{q}$ où $\mathfrak{q} = \{X \in \mathfrak{g}; \sigma(X) = -X\}$.

Un élément $gH \in \mathbb{X}$ est dit régulier si le centralisateur dans \mathfrak{q} de $g\sigma(g)^{-1}$ est abélien, formé d'éléments semi-simples et maximal pour ces propriétés. On note \mathbb{X}_{reg} l'ensemble des éléments réguliers de \mathbb{X} . Si x est un élément régulier, son orbite $O = H.x$ sous l'action à gauche de H possède une mesure invariante ν_O .

Le problème auquel on s'intéresse est le suivant : on cherche une normalisation des ν_O et un ensemble mesuré (Ξ, m) tels que pour presque tout $\xi \in \Xi$, il existe une distribution sphérique Θ_ξ (c'est-à-dire une distribution H -invariante et solution propre de l'algèbre $\mathbb{D}(\mathbb{X})$ des opérateurs différentiels G -invariants sur \mathbb{X}) et une fonction F_ξ de classe C^∞ , H -invariante sur \mathbb{X}_{reg} , solution propre des opérateurs de $\mathbb{D}(\mathbb{X})$ telles que

$$\nu_{H.x} = \int_{\Xi} F_\xi(x) \Theta_\xi dm(\xi) \quad (*)$$

La formule d'inversion est une formule du type (*) pour $x = e_{\mathbb{X}}$, c'est-à-dire $f(e_{\mathbb{X}}) = \int_{\Xi} c_\xi \Theta_\xi(f) dm(\xi)$ où les c_ξ sont des constantes.

Pour $G = \mathbb{R}$, on a $\Xi = \mathbb{R}$ et les $\Theta_\xi(f)$ correspondent à la transformée de Fourier de f .

Ce problème reste ouvert dans ce cadre général et a été résolu pour les deux types d'espaces symétriques suivants :

- (i) $\mathbb{X} = H = H \times H / \text{diagonale}(H \times H)$
- (ii) $\mathbb{X} = G/H$ où G est un groupe de Lie réductif complexe et H est une forme réelle de G .

Les idées utilisées dans ces deux cas sont similaires, ceci est dû en partie aux deux faits suivants : l'algèbre $\mathbb{D}(\mathbb{X})$ est, dans les deux cas, isomorphe à l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients constants H -invariants sur \mathfrak{h} et l'espace tangent en $e_{\mathbb{X}}$ dans (ii) est égal à $\mathfrak{q} = i\mathfrak{h}$.

Je vais expliquer les résultats et les méthodes employées sur l'exemple $H = Sl(2, \mathbb{R})$.

3 Formule d'inversion pour $Sl(2, \mathbb{R})$

On considère donc

$$H = Sl(2, \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \mathfrak{h} = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 & -x_1 \end{pmatrix}; x_j \in \mathbb{R} \right\}.$$

On considère dans \mathfrak{h} les deux sous-algèbres suivantes :

$$\mathfrak{t} = \left\{ Y(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}; \theta \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{a} = \left\{ X(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R} \right\}$$

Ce sont des sous-algèbres de Cartan, c'est-à-dire des sous-algèbres abéliennes formées d'éléments semi-simples et maximales pour ces propriétés. Elles ne sont pas conjuguées sous l'action de H . Un élément diagonalisable avec valeurs propres distinctes (dans \mathfrak{h} ou H) est dit régulier et on note \mathfrak{h}_{reg} l'ensemble des éléments réguliers de \mathfrak{h} . Soit

$$T = \left\{ y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}; \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

et

$$A = \left\{ a(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon e^t & 0 \\ 0 & \varepsilon e^{-t} \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R} \text{ et } \varepsilon = \pm 1 \right\}.$$

On a alors $\mathfrak{h}_{reg} = Ad(H)\mathfrak{a}_{reg} \cup Ad(H)\mathfrak{t}_{reg}$ et $H_{reg} = \cup_{h \in H} (hA_{reg}h^{-1} \cup hT_{reg}h^{-1})$.

On va utiliser l'application exponentielle exp pour lier l'analyse harmonique sur H à celle de \mathfrak{h} . D'autre part, on cherche à ramener la preuve de la formule d'inversion (*) à la formule d'inversion classique sur \mathfrak{a} et \mathfrak{t} .

Pour cela, on introduit la mesure de Liouville sur les orbites de H dans \mathfrak{h}_{reg} . Soit X un élément régulier de \mathfrak{h} . Il est conjugué par H soit à un élément de \mathfrak{a} soit à un élément \mathfrak{t} . On peut donc supposer $X \in \mathfrak{b}$ avec $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ ou \mathfrak{t} . L'espace tangent à l'orbite $H.X$ est isomorphe à $\mathfrak{h}/\mathfrak{b} = [\mathfrak{h}, X]$. On définit alors la forme $\sigma_{H.X}$ sur $\mathfrak{h}/\mathfrak{b}$ par $\sigma_{H.X}([Y, X], [Z, X]) = [X, [Y, Z]]$. C'est une 2-forme alternée non dégénérée fermée sur $\mathfrak{h}/\mathfrak{b}$. Elle définit donc une mesure $\beta_{H.X} = \frac{\sigma_{H.X}}{2\pi}$ sur $H.X$ appelée mesure de Liouville. Ici, on a :

$$H.X(t) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 & -x_1 \end{pmatrix}; -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -t^2 \right\} \text{ et } \beta_{H.X(t)} = \frac{dx_2 dx_3}{|x_1|}$$

$$H.Y(\theta) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 & -x_1 \end{pmatrix}; -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \theta^2 \right\} \text{ et } \beta_{H.Y(\theta)} = \frac{dx_1 dx_2}{|x_3|}.$$

Pour $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{h})$ (c'est-à-dire de classe C^∞ à support compact), on définit l'intégrale orbitale de f par $\mathcal{M}(f)(X) = 2\pi\beta_{H.X}$. Cette fonction vérifie les propriétés suivantes :

- (I 1) elle est H -invariante et de classe C^∞ sur \mathfrak{h}_{reg} ,
- (I 2) sa restriction à \mathfrak{b}_{reg} pour $\mathfrak{b} = \mathfrak{t}$ ou \mathfrak{a} est nulle en dehors d'un compact,
- (I 3) sa restriction à \mathfrak{a}_{reg} se prolonge de façon C^∞ à \mathfrak{a} ,
- (I 4) pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a (relation de sauts)

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(\frac{id}{d\theta}\right)^n (\mathcal{M}(f)(Y(\theta))) + \lim_{\theta \rightarrow 0^-} \left(\frac{id}{d\theta}\right)^n (\mathcal{M}(f)(Y(\theta))) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{d}{dt}\right)^n (\mathcal{M}(f)(X(t))).$$

- (I 5) $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{d}{d\theta} (\text{sign}(\theta)\mathcal{M}(f))(Y(\theta)) = -2f(0)$ (formule limite d'Harish-Chandra)

Soit $I(\mathfrak{h})$ l'ensemble des fonctions vérifiant les propriétés (I 1)-(I 4).

Théorème 3.1 (B1) *L'application \mathcal{M} est surjective de $\mathcal{D}(\mathfrak{h})$ dans $I(\mathfrak{h})$ et sa transposée est une bijection entre le dual $I(\mathfrak{h})'$ de $I(\mathfrak{h})$ et l'espace des distributions H -invariantes sur \mathfrak{h} .*

Théorème 3.2 (H-C1) *La mesure de Liouville est tempérée (c'est-à-dire qu'il existe $r > 0$ tel que $\int_{H.X} (1 + \|\xi\|^2)^{-r} d\beta_{H.X}(\xi) < \infty$.)*

En particulier on peut définir sa transformée de Fourier $\hat{\beta}_{H.X}$.

L'algèbre $S(\mathfrak{h})^H$ des polynômes H -invariants sur \mathfrak{h}^* s'identifie à l'algèbre des opérateurs différentiels H -invariants à coefficients constants par l'application $X \rightarrow \partial(X)$ définie par $\partial(X)\varphi(Y) = \frac{d}{dt}(\varphi(X + tY))_{t=0}$.

On a alors $\partial(p)\hat{\beta}_{H.X} = p(iX)\hat{\beta}_{H.X}$.

Théorème 3.3 (H-C2) *La distribution $\hat{\beta}_{H.X}$ est une fonction localement intégrable et analytique sur \mathfrak{h}_{reg} .*

Les résultats d'Harish-Chandra et une formule due à Rossmann permettent de calculer les transformées de Fourier d'orbites. Ici un simple calcul permet d'obtenir :

$$\hat{\beta}_{H.Y(\lambda)}(Y(\theta)) = \frac{e^{-i\lambda\theta}}{2i\theta} \text{sign}(\lambda) , \quad ; \quad \hat{\beta}_{H.Y(\lambda)}(X(t)) = \frac{e^{-|t\lambda|}}{|2t|} \text{sign}(\lambda)$$

et

$$\hat{\beta}_{H.X(s)}(Y(\theta)) = 0 , \quad \hat{\beta}_{H.X(s)}(X(t)) = \frac{e^{ist} + e^{-ist}}{|2t|} .$$

Maintenant, pour f une fonction localement intégrable sur \mathfrak{h} , la décomposition $\mathfrak{h}_{reg} = Ad(H)\mathfrak{a}_{reg} \cup Ad(H)\mathfrak{t}_{reg}$ permet d'écrire (formule d'intégration de Weyl) :

$$\int_{\mathfrak{h}} f(X) dX = \int_{\mathbb{R}} |2\theta| \mathcal{M}(f)(Y(\theta)) d\theta + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |2t| \mathcal{M}(f)(X(t)) dt .$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(f)(X) &= 2\pi\beta_{H.X}(f) = 2\pi\hat{\beta}_{H.X}(\hat{f}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} |2\theta| \hat{\beta}_{H.X}(Y(\theta)) \hat{\beta}_{H.Y(\theta)}(f) d\theta + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |2t| \hat{\beta}_{H.X}(X(t)) \hat{\beta}_{H.X(t)}(f) dt . \end{aligned}$$

C'est la formule d'inversion des intégrales orbitales sur \mathfrak{h} .

Le but est ensuite d'utiliser l'application exponentielle pour remonter les objets $\hat{\beta}_{H.X}(f)$ et $|2t| \hat{\beta}_{H.X}(X(t))$ au niveau du groupe. Soit $j(X)$ le jacobien de l'application exponentielle en X . On a : $j(X(t))^{1/2} = \frac{\sinh t}{t}$ et $j(Y(\theta))^{1/2} = \frac{\sin \theta}{\theta}$. On pose :

$$\Theta_n(\varepsilon \exp X) = \varepsilon^{1+n} \hat{\beta}_{H.Y(n)}(X) j(X)^{1/2}$$

$$\Theta_s^+(\varepsilon \exp X) = \hat{\beta}_{H.X(s)}(X) j(X)^{1/2}, \Theta_s^-(\varepsilon \exp X) = \varepsilon \hat{\beta}_{H.X(s)}(X) j(X)^{1/2}.$$

Théorème 3.4 *Les fonctions Θ_n et Θ_s^\pm sont des fonctions localement intégrables et elles définissent des distributions H -invariantes et solutions propres de $\mathbb{D}(H)$.*

On pose $\Theta_0^\pm = \lim_{n \rightarrow 0^\pm} \Theta_n$ (limite dans l'espace des distributions).

On définit l'intégrale orbitale de $f \in \mathcal{D}(H)$ sur H_{reg} par

$$\mathcal{M}_H(f)(\varepsilon \exp X) = j(X)^{1/2} \mathcal{M}(f \circ \exp)(X).$$

Elle vérifie des propriétés analogues sur H à I1 – I5.

Maintenant, on introduit les fonctions suivantes (fonctions orbitales) : pour $X \in \mathfrak{b}_{reg}$ avec $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ ou \mathfrak{k} , on pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$F_n(\varepsilon \exp X) = \varepsilon \hat{\beta}_{H.X}(Y(n) | 2n |), \quad F_0^\pm = \lim_{n \rightarrow 0^\pm} F_n$$

et pour $s \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon = \pm 1$, on pose

$$F_{\varepsilon,s}(\varepsilon \exp X) = \sum_{Y \in \mathfrak{b}, \exp Y=1} \hat{\beta}_{H.Y}(X(s)) | 2s | \quad \text{et} \quad F_{\pm,s} = -(F_{1,s} \pm F_{-1,s}).$$

Théorème 3.5 (B2) (i) *Les fonctions F_n , F_0^\pm et F_\pm vérifient sur H les propriétés (I1), (I3), (I4) et (I5) traduites sur le groupe H (mais pas (I2) qui correspond à la condition sur le support). Elles sont propres sous l'action de $\mathbb{D}(H)$*

(ii) *Pour $f \in \mathcal{D}(H)$, on a*

$$\mathcal{M}_H(f)(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}; n \neq 0} F_n(x) \Theta_n(f) - i(\Theta_0^+(f) - \Theta_0^-(f))$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{s>0} (F_{+,s}(x) \Theta_s^+(f) + F_{-,s}(x) \Theta_s^-(f)) ds.$$

Corollaire 3.1 *Pour $\varphi \in \mathcal{D}(H)$, on a*

$$2\pi\varphi(e) = \sum_{n \in \mathbb{Z}; n \neq 0} |n| \Theta_n(\varphi) + \frac{1}{2} \int_{s>0} s \tanh\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Theta_s^+(\varphi) ds \\ + \frac{1}{2} \int_{s>0} s \coth\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Theta_s^-(\varphi) ds$$

Remarque : Les distributions Θ_n et Θ_s^\pm s'interprètent en terme de représentations de H de la manière suivante :

soit \mathcal{H} un espace de Hilbert et soit π un morphisme de groupe de H dans le groupe des opérateurs unitaires de \mathcal{H} tel que les applications $(h, v) \rightarrow \pi(h)v$ soient continues. Un tel morphisme est appelé représentation unitaire de H dans \mathcal{H} . Lorsque \mathcal{H} n'admet pas de sous-espaces propres fermés stables sous l'action de H , on dit que π est irréductible. On définit alors la trace de π de la manière suivante. Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base hilbertienne de \mathcal{H} et $\varphi \in \mathcal{D}(H)$, on pose $Tr(\pi(\varphi)) = \sum_{i \in I} \langle \pi(\varphi)e_i, e_i \rangle$. C'est une distribution sur H qui est H -invariante et solution propre de $\mathbb{D}(H)$. Les distributions Θ_n et Θ_s^\pm sont les caractères de certaines représentations unitaires et irréductibles de H .

Références

- [B1] A. Bouaziz, Intégrales orbitales sur les algèbres de Lie réductives, *Inv. Math.* **115** (1994), 163-207.
- [B2] A. Bouaziz, Formule d'inversion des intégrales orbitales sur les groupes de Lie réductifs *J. Funct. Anal.* **134** (1995), 100-1827..
- [D] P. Delorme, Inversion des intégrales orbitales sur certains espaces symétriques réductifs, Séminaire Bourbaki, 1995-96, num. 810,
- [D-V] M. Duflo et M. Vergne, La formule de Plancherel des groupes de Lie semi-simples réels, *Adv. Studies in Pure Mathematics* **14** (1988), 289-336.
- [HC1] Harish-Chandra, Fourier transforms on semisimple Lie algebras I-II, *Amer. J. Math.* **79** (1957), 193-257, 653-686.
- [HC2] Harish-Chandra, Invariant eigendistributions on semisimple Lie algebras, *Inst. Hautes Etudes Publ. Math.* **27** (1965), 5-54.

- [HC3] Harish-Chandra, Plancherel formula for the 2×2 real unimodular group, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **38** (1952), 337-341.
- [Ha1] P. Harinck, Base de la série la plus continue de fonctions généralisées sphériques sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$, *Journal of Funct. Anal.* **153** (1998), p 1-51,
- [Ha2] P. Harinck, Fonctions orbitales sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$. Formule d'inversion des intégrales orbitales et formule de Plancherel, *Journal of Funct. Anal.* **153** (1998), p 52-107.
- [R] W. Rossmann, Kirillov's character formula for reductive Lie groups, *Invent. Math.* **48** (1978), 207-220.

Pascale Harinck
CNRS-UMR 7586
Université Paris VII
France
harinck@math.jussieu.fr

**Techniques d'analyse complexe
appliquées au problème des moments
et au problème du sous-espace invariant**

Isabelle Chalendar

Travail en collaboration avec Karim Kellay et Tom Ransford

1 Introduction

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres complexes et soit $r \in \mathbb{N}$. Il est clair que si $a_n = 0$ pour tout $n > r$, alors

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k = O(n^r) \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Le contraire est faux. Par exemple la suite $a_n = (-1)^n$ satisfait

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k = (1 + (-1))^n = 0 \quad \text{pour tout } n \geq 1,$$

mais a_n ne tend même pas vers 0. On peut cependant donner une sorte de réciproque, qui, au vu de l'exemple ci-dessus, est peut-être un peu surprenante.

Théorème 1.1 *Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres complexes et soit r un entier naturel. Supposons que*

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} a_k = O(n^r) \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n \binom{n}{k} a_k = O(n^r) \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Alors $a_n = 0$ pour tout $n > r$.

Ce théorème est le point central de l'exposé. Nous donnerons une idée de sa preuve dans le paragraphe suivant. Nous proposons ensuite une application aux algèbres de Banach, laquelle conduit à un résultat sur l'existence de sous-espaces invariants. Une autre application du Théorème ?? concernant la détermination d'une mesure de probabilité borélienne sur \mathbb{R} est aussi présentée dans la dernière section.

2 Preuve du Théorème ??

Une fonction entière $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est de *type exponentiel* si

$$\tau := \limsup_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\log |f(z)|}{|z|} < \infty,$$

et dans ce cas τ est appelé le *type* de f . Si de plus $\tau = 0$, alors f est dite de *type exponentiel minimal*. Rappelons à présent une des versions du principe de Phragmén–Lindelöf ([?], Theorem 6.2.13) : Soit f une fonction entière de type exponentiel minimal et soit $r \in \mathbb{N}$. Supposons que sur l'axe réel $f(x) = O(|x|^r)$ lorsque $x \rightarrow \pm\infty$. Alors f est un polynôme de degré au plus r .

Considérons l'expression

$$a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n.$$

Nous allons montrer successivement que ceci définit une fonction entière de type exponentiel minimal et, finalement, qu'il s'agit d'un polynôme de degré au plus r , ce qui nous conduira à la conclusion désirée.

Pour $n \geq 0$, posons

$$b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k \quad \text{et} \quad c_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} a_k.$$

Les hypothèses sur (a_n) nous garantissent que $b_n, c_n = O(n^r)$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Par conséquent, si l'on pose

$$b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n \quad \text{et} \quad c(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n,$$

alors b et c sont des fonctions de type exponentiel au plus 1. En comparant les coefficients de z^n dans les égalités $e^z(e^{-z}b(z)) = b(z)$ et $e^{-z}(e^zc(z)) = c(z)$, on voit que $e^{-z}b(z)$ et $e^zc(z)$ ont les mêmes coefficients que $a(z)$. Par conséquent

$$a(z) = e^{-z}b(z) = e^zc(z), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (1)$$

En particulier, a est aussi une fonction entière. De plus, (1) implique que $a^2 = bc$, et par conséquent a est aussi une fonction de type exponentiel au

plus 1. Montrons à présent que a est en fait de type exponentiel minimal. Pour cela considérons les transformées de Laplace A, B, C de a, b, c respectivement. Nous avons donc, par exemple,

$$A(\zeta) = \int_0^\infty a(x)e^{-x\zeta} dx.$$

Comme a, b, c sont toutes de type exponentiel au plus 1, A, B, C sont bien définies et holomorphes dans $\{\zeta: \Re\zeta > 1\}$. De plus, pour $\Re\zeta > 1$,

$$A(\zeta) = \int_0^\infty \left(\sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{n!} x^n \right) e^{-x\zeta} dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{n!} \int_0^\infty x^n e^{-x\zeta} dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{\zeta^{n+1}}, \quad (2)$$

avec des extensions analogues pour B, C . En utilisant des propriétés classiques des séries de Laurent, nous obtenons que A, B, C s'étendent holomorphiquement à $\{\zeta: |\zeta| > 1\}$. A présent, en prenant les transformées de Laplace dans (1) on a, pour $\Re\zeta > 1$,

$$A(\zeta) = B(\zeta + 1) = C(\zeta - 1).$$

Ainsi A s'étend holomorphiquement à $\{\zeta: |\zeta + 1| > 1\} \cup \{\zeta: |\zeta - 1| > 1\} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En utilisant l'extension de Laurent (2), ceci implique que

$$|a_n|^{1/n} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Il résulte de ceci que a est de type exponentiel minimal.

Enfin, montrons que a est un polynôme. Pour $x \geq 0$, nous avons

$$|b(x)| \leq \sum_{n=0}^\infty \frac{|b_n|}{n!} x^n \leq \sum_{n=0}^\infty \frac{K(n+r) \cdots (n+1)}{n!} x^n = K(x^r e^x)^{(r)},$$

où K est une constante indépendante de x . Ainsi, d'après (1),

$$|a(x)| = |e^{-x}b(x)| \leq K e^{-x} (x^r e^x)^{(r)} = O(x^r) \quad \text{lorsque } x \rightarrow \infty.$$

Des calculs analogues avec $c(x)$ au lieu de $b(x)$ montrent que $a(x) = O(|x|^r)$ lorsque $x \rightarrow -\infty$. Comme a est de type exponentiel minimal, le principe de Phragmén–Lindelöf nous permet de conclure que a est un polynôme de degré au plus r . Ainsi $a_n = 0$ pour tout $n > r$ et la preuve du théorème est achevée.

3 Quelques applications

3.1 Le problème du sous-espace invariant

Soit E un espace de Banach (réel ou complexe) de dimension infinie et soit T un opérateur linéaire et borné sur E . On appelle sous-espace invariant non trivial \mathcal{M} de T un sous-espace fermé de E tel que $T(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$ avec de plus $\{0\} \neq \mathcal{M} \neq E$. La question de savoir si tout opérateur linéaire borné sur un espace de Hilbert complexe séparable de dimension finie admet toujours un sous-espace invariant non trivial est appelé *le problème du sous-espace invariant* et est à ce jour toujours ouvert.

Le Théorème ?? nous permet facilement de déduire le résultat suivant :

Théorème 3.1 *Soit E un espace de Banach (réel ou complexe) de dimension infinie, et soit T un opérateur linéaire borné sur E . Supposons qu'il existe $\xi_0 \in E \setminus \{0\}$, $\psi_0 \in E^* \setminus \{0\}$ et un entier naturel r tels que :*

$$\langle \psi_0, (I+T)^n \xi_0 \rangle = O(n^r) \quad \text{et} \quad \langle \psi_0, (I-T)^n \xi_0 \rangle = O(n^r) \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Alors T a un sous-espace invariant non trivial.

3.2 Application aux distributions de probabilité

Il est bien connu qu'une distribution de probabilité sur \mathbb{R} est uniquement déterminée par ses moments, pourvu qu'ils soient finis et ne croissent pas trop vite :

Théorème 3.2 (Théorème de Carleman [?], p.126) *Soient μ et ν des mesures de probabilité boréliennes sur \mathbb{R} dont tous les moments sont finis. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$S_n := \int_{-\infty}^{\infty} t^n d\mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} t^n d\nu(t), \quad \text{et que} \quad \sum_{n=1}^{\infty} S_{2n}^{-1/2n} = \infty.$$

Alors $\mu = \nu$.

Une des applications du Théorème ?? est un analogue du théorème de Carleman pour les moments complexes $\int_{-\infty}^{\infty} (1+it)^n d\mu(t)$, mais avec la différence que même si les moments $\int_{-\infty}^{\infty} (1+it)^n d\nu(t)$ sont simplement 'approximativement' égaux à ceux de μ , alors $\mu = \nu$.

Théorème 3.3 Soit μ, ν des mesures de probabilité boréliennes sur \mathbb{R} dont tous les moments sont finis. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$Z_n := \int_{-\infty}^{\infty} (1 + it)^n d\mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + it)^n d\nu(t) + O(n^r) \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} |Z_{2n}|^{-1/2n} = \infty.$$

Alors $\mu = \nu$.

La preuve de ce résultat s'appuie sur la théorie des classes quasi-analytiques.

Références

- [1] R. P. Boas. *Entire Functions*. Academic Press, New York, 1954.
- [2] I. Chalendar and T. Kellay, K. and Ransford. Binomial sums, moments and invariant subspace. *Israel Math. J.*, 1999.
- [3] P. Koosis. *The Logarithmic Integral I*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

Isabelle Chalendar

Institut Girard Desargues

Bâtiment du doyen Jean Braconnier (101)

43, boulevard du 11 novembre 1918

69 622 Villeurbanne Cedex

France

chalenda@desargues.univ-lyon1.fr

<http://www.desargues.univ-lyon1.fr/home/chalenda/chalendar.html>

Déterminants associés aux traces pondérées

Catherine Ducourtiaux

1. Introduction

Ce travail porte sur l'étude de déterminants d'opérateurs agissant sur un espace de dimension infinie et sur leurs propriétés. Ces déterminants sont définis sur un sous-ensemble de l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels classiques sur une variété compacte sans bord.

En introduisant un opérateur auxiliaire Q , on peut définir une pseudo trace Tr^Q dite trace pondérée; c'est une forme linéaire qui coïncide avec la trace usuelle sur les opérateurs de trace finie mais en général, elle n'est pas traciale i.e. $Tr^Q(AB) \neq Tr^Q(BA)$.

Par déterminant associé à une trace pondérée Tr^Q , nous entendons une fonctionnelle det^Q qui s'exprime par une formule du type : " $det^Q = expTr^Q log$ ", et nous qualifions ces déterminants de relatifs à Q . En général, les déterminants relatifs à un opérateur Q ne sont pas multiplicatifs i.e. : $det^Q(AB) \neq det^Q(A)det^Q(B)$.

En nous restreignant à des opérateurs pour lesquels on peut utiliser une même détermination du logarithme, nous montrons que le déterminant relatif det^Q est multiplicatif dès que ces opérateurs sont pris dans une sous-algèbre des opérateurs pseudo-différentiels classiques sur laquelle la trace pondérée Tr^Q est traciale.

Par ailleurs, il existe un autre déterminant régularisé, le déterminant ζ -régularisé det_ζ , introduit par Ray et Singer [RS] en 1971 dans un contexte géométrique et largement étudié et utilisé depuis. Tout comme les déterminants relatifs, le déterminant ζ -régularisé donne lieu à une anomalie multiplicative non triviale :

$$F(A, B) := det_\zeta(AB)/det_\zeta(A)det_\zeta(B). \quad (1)$$

Nous relierons les déterminants relatifs au déterminant ζ -régularisé et nous en déduisons une formule générale pour l'anomalie multiplicative du déterminant ζ -régularisé, qui étend une formule établie par M. Wodzicki [W], [K].

En ce qui concerne le déterminant ζ -régularisé, notre travail s'appuie principalement sur un long article non publié de M. Kontsevich et S. Vishik [KV1]

et repris par la suite de façon synthétique [KV2]; en ce qui concerne les traces pondérées, nous nous référons à deux articles communs en préparation : [CDP] et [DMP].

Afin de rendre accessible notre exposé et de montrer l'analogie entre la dimension finie et la dimension infinie, nous commençons par présenter le déterminant usuel sur les matrices comme associé à la trace usuelle. Les objets et techniques utilisés se retrouveront en dimension infinie.

2. Matrices

Dans tout ce qui suit, on se place dans l'algèbre des matrices carrées $M_n(\mathbb{C})$; on note tr la trace usuelle et det le déterminant usuel.

Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ et si f est une fonction holomorphe dans un voisinage du spectre de A , on peut définir la fonction $f(A)$ par une formule intégrale de Cauchy

$$f(A) := \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} f(\lambda)(A - \lambda I)^{-1} d\lambda$$

où Γ est un contour entourant le spectre de A . En particulier, si $L_{\theta} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Arg}z = \theta\}$ est une demi-droite d'origine O qui ne rencontre pas le spectre de A , on peut définir le logarithme $\log_{\theta}(A)$ relativement à la coupure spectrale L_{θ} par

$$\log_{\theta}(A) := \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} \log_{\theta}(\lambda)(A - \lambda I)^{-1} d\lambda.$$

Par la formule de Cauchy, on obtient $tr \log_{\theta}(A) = \sum_{\lambda \in Sp(A)} \log_{\theta}(\lambda)$ d'où

$$det(A) = \prod_{\lambda \in Sp(A)} \lambda = \prod_{\lambda \in Sp(A)} \exp \log_{\theta}(\lambda) = \exp tr \log_{\theta}(A)$$

indépendamment du choix de θ .

Une façon de retrouver la multiplicativité du déterminant pour des matrices inversibles suffisamment proches de matrices hermitiennes définies positives est la suivante :

Proposition 1 : Soit $(A_t)_{0 \leq t \leq 1}$ une famille C^1 de matrices inversibles telle qu'il existe une même coupure L_{θ} des spectres de A_t pour tout t . On a :

$$\frac{d}{dt} \log_{\theta} det(A_t) = tr(\dot{A}_t A_t^{-1}).$$

Preuve : on a : $\frac{d}{dt} \log_{\theta}(A_t) = -\frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} \log_{\theta}(\lambda)(A_t - \lambda I)^{-1} \dot{A}_t (A_t - \lambda)^{-1} d\lambda$; du fait que tr est traciale on en déduit que : $\frac{d}{dt} \log_{\theta} \det(A_t) = tr \frac{d}{dt} \log(A_t) = tr \left[\dot{A}_t \left(-\frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} \log_{\theta}(\lambda)(A_t - \lambda)^{-2} d\lambda \right) \right]$; on conclut par intégration par parties.

Soit $F(A, B) := \det(AB)/\det(A)\det(B)$ où A et B sont deux matrices inversibles.

Si deux matrices inversibles A et B sont suffisamment proches de deux matrices hermitiennes définies positives alors il existe une même coupure, par exemple \mathbb{R}_- , des spectres de A , B , AB (car AB et $B^{1/2}AB^{1/2}$ sont conjuguées) et A^t pour tout $0 \leq t \leq 1$.

Ainsi, pour deux telles matrices A et B , on a d'après la proposition 1 : $\frac{d}{dt} \log F(A^t, B) = 0$ pour tout $0 \leq t \leq 1$. Or $F(I, B) = 1$ d'où $F(A, B) = 1$.

A partir de maintenant, on considère une variété M , C^{∞} , riemannienne, compacte, sans bord, de dimension finie d et sur M un fibré vectoriel E hermitien de rang fini n . L'algèbre des opérateurs qui nous intéresse est celle des opérateurs pseudo-différentiels classiques agissant sur les sections C^{∞} du fibré E , $\Gamma(E)$. On note cette algèbre $CL(M, E)$. L'espace $\Gamma(E)$ est muni d'un produit hermitien

$$\langle \sigma, \rho \rangle = \int_M \langle \sigma(x), \rho(x) \rangle_{E_x} dvol(x).$$

3. Opérateurs pseudo-différentiels classiques

Rappelons qu'un opérateur $A : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ est un opérateur différentiel d'ordre $m \in \mathbb{N}$ si pour toute trivialisaton de E et dans un système de coordonnées locales au dessus de $x \in M$, on a $Af(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha}(x) D^{\alpha} f(x)$, où α est un multiindice $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, $a_{\alpha}(x)$ est une matrice carrée de taille n et $D^{\alpha} = (-i)^{|\alpha|} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial x_d^{\alpha_d}}$. Comme $D^{\alpha} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \xi^{\alpha} e^{i(x-y) \cdot \xi} f(y) dy d\xi$, on obtient

$$Af(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y) \cdot \xi} \sigma(A)(x, \xi) f(y) dy d\xi \quad (2)$$

où $\sigma(A)(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha}(x) \xi^{\alpha}$ est appelé le symbole de l'opérateur A . Les opérateurs pseudo-différentiels classiques généralisent les opérateurs différentiels au sens où ils s'expriment localement comme dans (2) mais avec un symbole plus général et un ordre qui peut être un nombre complexe. Le symbole (défini localement sur la variété) d'un opérateur $A \in CL(M, E)$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ admet un développement asymptotique $\sigma(A)(x, \xi) \sim \sum_{j \in \mathbb{N}} a_{\alpha-j}(x, \xi)$, où $a_{\alpha} \neq 0$ et où chaque composante $a_{\alpha-j}(x, \xi)$ est positivement homogène

de degré $Re\alpha - j$ par rapport à ξ . Si les composantes sont homogènes i.e. $a_{\alpha-j}(x, t\xi) = t^{Re\alpha-j}a_{\alpha-j}(x, \xi)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, on dit que l'opérateur est de *classe impaire*; tous les opérateurs différentiels sont de classe impaire. L'ensemble des opérateurs de classe impaire est une algèbre que nous notons \mathcal{A}_{-1} .

symbole principal :

La première composante non nulle $a_\alpha(x, \xi)$ correspond au symbole principal $\sigma_P(A)$ de A , qui est défini globalement sur T^*M ; $\sigma_P(A)(x, \xi)$ est un endomorphisme de la fibre E_x . Si $\sigma_P(A)(x, \xi)$ est inversible pour $\xi \neq 0$, A est dit elliptique. On peut munir les symboles principaux d'une norme :

$$\|\sigma_P(A)\| := \sup_{x \in M} \sup_{|\xi|=1} \|\sigma_P(A)(x, \xi)\|_{End(E_x)}.$$

opérateurs admissibles :

Si le spectre de A admet une coupure, nous dirons que A est admissible. Nous notons $Ell_{ord>0}^*(M, E)$ le sous-ensemble de $CL(M, E)$ formé des opérateurs elliptiques, inversibles, d'ordre strictement positif, $Ell_{ord>0}^{*,adm}(M, E)$ le sous-ensemble de $Ell_{ord>0}^*(M, E)$ formé des opérateurs admissibles et le sous-ensemble $Ell_{ord>0}^{*,+}(M, E)$ de $Ell_{ord>0}^{*,adm}(M, E)$ formé des opérateurs auto-adjoints positifs (leur spectre est alors contenu dans \mathbb{R}^+). Tout opérateur elliptique, inversible, d'ordre strictement positif et tel que son symbole principal n'a pas de valeur propre dans un angle Λ d'origine 0 est admissible car dans ce cas Λ ne contient qu'un nombre fini de valeurs propres de l'opérateur (voir [Sh]).

Puissances complexes, logarithmes d'un opérateur elliptique :

Si un opérateur $A \in Ell_{ord>0}^{*,adm}(M, E)$, Seeley [S] définit A^s pour $Res \gg 0$ par $A^s := \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} \lambda^s (A - \lambda I)^{-1} d\lambda$, où maintenant Γ est un contour ouvert avec deux branches infinies entourant le spectre, et il montre, par la propriété de semi-groupe, qu'on peut définir A^s pour tout $s \in \mathbb{C}$. L'opérateur A^s appartient à $CL(M, E)$ et est d'ordre $s.o(A)$ où $o(A)$ est l'ordre de A . On pose $\log(A) := \partial_s(A^s)|_{s=0}$; localement, le symbole de $\log(A)$ s'écrit $o(A) \ln|\xi| I + \sigma_0$ où σ_0 est le symbole d'un opérateur d'ordre 0 dans $CL(M, E)$. Donc pour deux opérateurs $A, B \in Ell_{ord>0}^{*,adm}(M, E)$, la différence $\frac{\log A}{o(A)} - \frac{\log B}{o(B)}$ appartient à $CL(M, E)$.

Si un opérateur $A \in Ell_{ord=0}^{*,adm}(M, E)$ alors le spectre de A est borné. On définit

alors directement les puissances complexes et les logarithmes de A par une formule intégrale de Cauchy ; $\log A$ appartient à $CL_{ord=0}(M, E)$.

4. Traces pondérées

Un opérateur $A \in CL(M, E)$ est de trace finie si et seulement si son ordre est strictement inférieur à $-d$, d étant la dimension de la variété M . Nous notons par Tr la trace des opérateurs de trace finie. Si $A \in CL(M, E)$, si $Q \in Ell_{ord>0}^{*,adm}(M, E)$ et si s est un nombre complexe tel que $Res > \frac{o(A)+d}{o(Q)}$, l'opérateur AQ^{-s} est de trace finie.

De plus la fonction qui à s associe $Tr(AQ^{-s})$ est holomorphe sur le demi-plan ouvert $\{s \in \mathbb{C} : Res > \frac{o(A)+d}{o(Q)}\}$ et se prolonge à \mathbb{C} en une fonction méromorphe n'admettant que des pôles simples [K]. D'où la définition suivante :

Definition 1 : Soit $A \in CL(M, E)$ et soit $Q \in Ell_{ord>0}^{*,adm}(M, E)$. La trace pondérée par Q de A est :

$$Tr^Q(A) := \left[Tr(AQ^{-s}) - \frac{1}{s} Res_{s=0}(Tr AQ^{-s}) \right]_{s=0}.$$

Remarque 1 : Si $A \in CL(M, E)$ est de trace finie, alors

$$Tr^Q(A) := [Tr(AQ^{-s})]_{s=0} = Tr(A).$$

Remarque 2 : La fonction qui à s associe $Tr(Q^{-s})$ est encore appelée fonction Zéta de Q et se note ζ_Q . Elle se prolonge à \mathbb{C} en une fonction méromorphe qui est holomorphe en 0.

Résidu de Wodzicki [W] : Soit $A \in CL(M, E)$. Pour tout $Q \in Ell_{ord>0}^{*,adm}(M, E)$ le produit $o(Q).Res_{s=0}(Tr AQ^{-s})$ est indépendant de Q et coïncide avec le résidu de Wodzicki de l'opérateur A , $res(A)$. L'obstruction à ce que les traces pondérées soient traciales, ainsi que la dépendance par rapport au poids, s'expri-

me à l'aide du résidu de Wodzicki.

Proposition 2 [CDP] : Soient $A, B \in CL(M, E)$ et soit $Q \in Ell_{ord>0}^{*,adm}(M, E)$.

$$Tr^Q[A, B] = -\frac{1}{o(Q)} res([\log Q, A]B).$$

Soit $A \in CL(M, E)$ et soit $Q_1, Q_2 \in Ell_{ord>0}^{*,adm}(M, E)$.

$$Tr_1^Q(A) - Tr_2^Q(A) = res\left((\log Q_2/o(Q_2) - \log Q_1/o(Q_1))A\right).$$

Remarque 3 : Bien que $\log Q$ ne soit pas dans $CL(M, E)$ en général, $[\log Q, A]$ l'est.

Le résidu de Wodzicki admet une forme locale :

$$res(A) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_M \int_{S^*M} tr a_{-d}(x, \xi) d\xi dx.$$

On déduit de cette expression que le résidu s'annule pour un opérateur de classe impaire sur une variété de dimension impaire. De ces remarques et de la proposition 2, on déduit deux exemples de sous-algèbres de $CL(M, E)$ sur lesquelles la trace pondérée Tr^Q est traciale :

- la sous-algèbre \mathcal{A}_Q des opérateurs qui commutent avec Q ,
- la sous-algèbre \mathcal{A}_{-1} des opérateurs de classe impaire, lorsque la variété est de dimension impaire et lorsque Q est de classe impaire. La trace pondérée Tr^Q est alors indépendante de Q et coïncide avec la trace canonique de M. Kontsevich et S. Vishik.

Remarque 4 : Si M est réduite à un point, $CL(M, E)$ coïncide avec $M_n(\mathbb{C})$ (où n est le rang du fibré E) et on retrouve l'exemple initial des matrices.

Définition 2 : Soit (A_t) une famille d'opérateurs de $CL(M, E)$ d'ordre constant $\alpha \in \mathbb{R}$. L'espace des symboles d'ordre inférieur ou égal à α est muni d'une structure d'espace de Fréchet. Nous dirons que la famille (A_t) est continue, respectivement dérivable, par rapport à t si le symbole et les composantes homogènes du symbole de A_t sont continus, respectivement dérivables, par rapport à t dans l'espace des symboles d'ordres inférieurs ou égaux à α .

Proposition 3 : Soit (A_t) une famille d'opérateurs de $CL(M, E)$ d'ordre constant et soit $Q \in Ell_{ord>0}^{*,adm}(M, E)$. Si la famille (A_t) est continue par rapport à t alors $\lim_{t \rightarrow t_0} Tr^Q(A_t) = Tr^Q(A_{t_0})$. Si la famille (A_t) est dérivable par rapport à t alors $\frac{d}{dt} Tr^Q(A_t) = Tr^Q(\dot{A}_t)$.

5. Déterminants associés aux traces pondérées

Définition 3 : Soit $Q \in Ell_{ord>0}^{*,adm}(M, E)$. Pour tout opérateur A appartenant à $Ell_{ord \geq 0}^{*,adm}(M, E)$ admettant une coupure spectrale L_θ , le déterminant de A associé à la trace pondérée Tr^Q est :

$$\det_{\theta}^Q(A) := \exp \operatorname{Tr}^Q \left(\log_{\theta} A - \frac{o(A)}{o(Q)} \log Q \right).$$

Si $Q, A \in \mathcal{A}_{-1}$, si M est de dimension impaire et si A est d'ordre 0, alors, $\det_{\theta}^Q(A)$ est indépendant de Q .

Remarque 5 : Contrairement au cas de la dimension finie $\det_{\theta}^Q(A)$ dépend de la détermination du logarithme.

Tout comme dans le cas matriciel nous démontrons la multiplicativité des déter-

minants relatifs pour des opérateurs de $Ell_{ord \geq 0}^*(M, E)$, tels que leurs symboles principaux soient suffisamment proches de symboles principaux d'opérateurs de $Ell^{*,+}(M, E)$, et pris dans une algèbre où les traces pondérées correspondantes sont traciales.

Proposition 4 [DMP] : *Soit \mathcal{A} une sous-algèbre de $CL(M, E)$ telle que $\mathcal{A} \cap Ell^*(M, E)$ est un groupe et sur laquelle Tr^Q est traciale pour un certain $Q \in Ell_{ord > 0}^{*,adm}(M, E)$.*

Soit $(A_t)_{0 \leq t \leq 1}$ une famille d'opérateurs de $\mathcal{A} \cap Ell_{ord \geq 0}^(M, E)$, d'ordre constant, dérivable par rapport à t , et telle qu'il existe une même coupure L_{θ} des spectres de A_t pour tout t . On a :*

$$\frac{d}{dt} \log \det_{\theta}^Q(A_t) = \operatorname{Tr}^Q(\dot{A}_t A_t^{-1}).$$

Preuve : Elle se calque sur celle de la proposition 1. Le point essentiel à démontrer est : pour tout $\lambda \notin Sp(A_t)$,

$$\operatorname{Tr}^Q \left[(A_t - \lambda I)^{-1} \dot{A}_t (A_t - \lambda I)^{-1} \right] = \operatorname{Tr}^Q \left[\dot{A}_t (A_t - \lambda I)^{-2} \right].$$

D'après la proposition 3, on a : $\lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{Tr}^Q \left[(A_t - \lambda I)^{-1} \left(\frac{A_{t+h} - A_t}{h} \right) (A_t - \lambda I)^{-1} \right] = \operatorname{Tr}^Q \left[(A_t - \lambda I)^{-1} \dot{A}_t (A_t - \lambda I)^{-1} \right]$ et une écriture analogue pour le second membre. De la propriété de groupe de $\mathcal{A} \cap Ell^*(M, E)$, il résulte que ces traces sont des limites de traces d'opérateurs dans \mathcal{A} . L'égalité des traces se déduit donc, comme en dimension finie, du fait que Tr^Q est traciale.

Théorème 1 [D] : *Soit \mathcal{A} une sous-algèbre de $CL(M, E)$ vérifiant les hypothèses de la Proposition 4 et telle que si $A \in \mathcal{A} \cap Ell_{ord \geq 0}^{*,adm}(M, E)$ alors $A^t \in \mathcal{A}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Pour tous opérateurs $A, B \in \mathcal{A} \cap Ell_{ord \geq 0}^*(M, E)$ de*

symbole principal suffisamment proche du symbole principal d'un opérateur de $Ell^{*,+}(M, E)$ on a :

$$\det^Q(AB) = \det^Q(A)\det^Q(B).$$

Idée de la preuve : Soit F^Q l'anomalie multiplicative de \det^Q définie comme en (1). Soient $A, B \in \mathcal{A} \cap Ell_{ord \geq 0}^*(M, E)$.

Supposons $o(B) \neq 0$. On considère la famille $A_t := \left(AB^{-\frac{o(A)}{o(B)}} \right)^t B^{\frac{o(A)}{o(B)}}$, $0 \leq t \leq 1$. Si A et B ont un symbole principal suffisamment proche du symbole principal d'un opérateur de $Ell^{*,+}(M, E)$, alors il existe une même coupure des spectres de A, B, AB et A_t pour tout t , et on déduit des hypothèses sur \mathcal{A} que $A_t \in \mathcal{A} \cap Ell_{ord \geq 0}^*(M, E)$. D'après la proposition 4, on a $\frac{d}{dt} \log F^Q(A_t, B) = 0$ pour tout $0 \leq t \leq 1$. On montre que $F^Q\left(B^{\frac{o(A)}{o(B)}}, B\right) = 1$ d'où $F^Q(A, B) = 1$. Si $o(B) = 0$, on procède de façon analogue en considérant la famille $B_t := B^t$.

Exemple : Les sous-algèbres \mathcal{A}_{-1} , avec M de dimension impaire et Q de classe impaire, et \mathcal{A}_Q satisfont aux hypothèses du théorème 1.

6. Déterminant ζ -régularisé

Definition 4 : Pour tout opérateur $A \in Ell_{ord > 0}^{*,adm}(M, E)$, le déterminant ζ -régularisé de A est :

$$\det_\zeta(A) := \exp\left(-\zeta'_A(0)\right).$$

Remarque 6 : M. Kontsevich et S. Vishik dans [KV2] ont démontré qu'il n'existe pas de fonction linéaire "Tr" telle que $\det_\zeta(A) = \exp \text{Tr} \log A$.

Dans le cas impair, i.e. opérateurs de classe impaire et variété de dimension impaire, M. Kontsevich et S. Vishik ont remarqué que pour tout opérateur $A \in Ell_{ord=0}^*(M, E)$ de symbole principal suffisamment proche du symbole principal d'opérateur de $Ell^{*,+}(M, E)$, le quotient $\det_\zeta(AC)/\det_\zeta(C)$ ne dépend pas de l'opérateur C choisi dans $Ell_{ord > 0}^{*,+}(M, E)$. Pour un tel opérateur A , ils posent : $\det(A) := \det_\zeta(AC)/\det_\zeta(C)$. On vérifie facilement que les déterminants relatifs des opérateurs d'ordre 0 étendent le déterminant de M. Kontsevich et S. Vishik défini dans le cas impair.

Le résultat suivant relie les déterminants relatifs des opérateurs d'ordre strictement positif au déterminant ζ -régularisé.

Théorème 2 [D] : Soit $Q \in Ell_{ord>0}^{*,adm}(M, E)$ d'ordre q . Soit $a > 0$. Pour tout opérateur $A \in Ell^*(M, E)$ d'ordre a et de symbole principal suffisamment proche du symbole principal d'un opérateur de $Ell^{*,+}(M, E)$, il existe une constante $C_{Q,a} := det_{\zeta}(Q^{\frac{a}{q}})$ telle que :

$$\frac{det_{\zeta}(A)}{det^Q(A)} = C_{Q,a} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2a} \left[res \left(\log A - \frac{a}{q} \log Q \right)^2 \right] \right\}.$$

Corollaire : Pour tous opérateurs $A, B \in Ell_{ord>0}^*(M, E)$ de symboles principaux suffisamment proches de symboles principaux d'opérateurs appartenant à $Ell_{ord>0}^{*,+}(M, E)$, on a :

$$\begin{aligned} \log F(A, B) &= \frac{1}{2o(A)} res \left(\log A - \frac{o(A)}{o(A) + o(B)} \log(AB) \right)^2 \\ &+ \frac{1}{2o(B)} res \left(\log B - \frac{o(B)}{o(A) + o(B)} \log(AB) \right)^2 \\ &+ Tr^{AB} \left(\log(AB) - \log A - \log B \right). \end{aligned}$$

La formule donnée ci-dessus étend une formule établie par Wodzicki lorsque les opérateurs commutent (voir [K]).

7. Conclusion : Nous avons introduit un déterminant relatif det^Q , qui est du type " $expTr^Q log$ ", sur les opérateurs d'ordre 0. Pour les opérateurs d'ordre strictement positif, nous avons fixé une origine $\frac{log Q}{ord(Q)}$ dans l'espace des logarithmes des opérateurs pseudo-différentiels et nous avons remplacé " log " par " $log - \frac{ord(\cdot)}{ord(Q)} log Q$ ". Le théorème 2 exprime le quotient $\frac{det_{\zeta}}{det^Q}$ en terme d'une expression quadratique qui peut s'interpréter comme l'obstruction à exprimer det_{ζ} comme " $expTr^Q log$ ". Ceci confirme qu'il y a une non linéarité quadratique cachée dans le déterminant ζ -régularisé, selon les termes mêmes de M. Kontsevich et S. Vishik [KV1].

Références

- [CDP] A. Cardona, C. Ducourtioux, S. Paycha, *Renormalized Traces, Wodzicki Residue and Cohomologies on Algebras of Pseudo-Differential Operators*, en préparation
[DMP] C. Ducourtioux, J.P. Magnot et S. Paycha, *Geometry on Current Groups from the perspective of Regularized Traces*, en préparation
[D] C. Ducourtioux, Thèse, en préparation

- [K] Ch. Kassel, *Le résidu non commutatif [d'après Wodzicki]*, Séminaire Bourbaki **708** (1989)
- [KV1] M.Kontsevich, S. Vishik, *Determinants of elliptic pseudodifferential operators*, Max Planck Preprint (1994)
- [KV2] M.Kontsevich, S. Vishik, *Geometry of determinants of elliptic operators* in Functional Analysis on the Eve of the 21st Century **Vol. I** (ed. S.Gindikin, J.Lepowski,R.L.Wilson) Progress in Mathematics (1994)
- [RS] D.B. Ray, I.M. Singer *R-Torsion and the Laplacian on Riemannian Manifolds*, Adv. Math **T.7** 145-210 (1971)
- [Sh] M.A. Shubin, *Pseudodifferential Operators and Spectral Theory*, Springer Verlag (1987)
- [S] R.T. Seeley, *Complex powers of an elliptic operator* in Proc. Sympos. Pure Math. **10**, 288-307, Amer. Math. Soc. (1968)
- [W] M. Wodzicki, *Non commutative residue* in Lecture Notes in Mathematics **1289** Springer Verlag (1987)

Catherine Ducourtioux
 Laboratoire de Mathématiques Appliquées
 Université Blaise Pascal (Clermont II)
 Complexe Universitaire des Cézeaux
 63177 Aubière Cedex
 c.ducour@ucfma.univ-bpclermont.fr

Traces au bord d'un ouvert de solutions d'équations elliptiques

Michèle Grillot

On considère un ouvert Ω borné régulier de \mathbb{R}^N , $N \geq 2$, f une application réelle à valeurs réelles que l'on précisera dans la suite et le problème auquel on s'intéresse est le suivant : étant donnée une solution $u \in C^2(\Omega)$ de $\Delta u = f(u)$ dans Ω (où $\Delta = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$), peut-on définir une trace de u au bord $\partial\Omega$?

Remarque : si u est dans un espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, alors la trace de u est bien définie.

L'un des premiers résultats est le suivant, dû à Fatou :

Théorème 1 *Soit B la boule unité de \mathbb{R}^N , $N \geq 2$. Soit $u \in C^2(B)$ harmonique et positive dans B .*

(i) $\forall x_0 \in \partial B$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in C_0} u(x) \quad \text{existe pp.}$$

où C_0 est un cône centré en x_0 .

(ii) De plus, il existe une mesure de Radon μ sur ∂B , positive telle que

$$u(r, \cdot) \rightarrow \mu \quad \text{faiblement quand } r \rightarrow 1$$

où $x = (r, \sigma) \in (0, 1) \times S^{N-1}$ en coordonnées sphériques.

Doob a étendu ce résultat à des fonctions surharmoniques. La définition de trace de solutions d'équations aux dérivées partielles est un vaste domaine et a fait l'objet de nombreux travaux.

Les problèmes de trace au bord pour des solutions d'équations elliptiques semi-linéaires a été initié par L. Véron et M. Marcus. Ils se sont intéressés à une non-linéarité de type puissance en considérant des solutions positives de l'équation $-\Delta u + u^q = 0$ dans la boule unité de \mathbb{R}^N .

En collaboration avec L. Véron, j'ai travaillé sur la caractérisation de trace au bord de la boule unité ouverte B de \mathbb{R}^N , de solutions de l'équation à courbure moyenne prescrite

$$\Delta u + Ke^{2u} = 0 \quad \text{dans } B \quad (3.1)$$

où K est une fonction continue de \bar{B} . C'est une extension naturelle du problème avec la non-linéarité de type puissance.

Nous définissons les ensembles ω^+ , ω^- et ω^0 par $\omega^+ = \{\theta \in \partial B / K(\theta) > 0\}$, $\omega^- = \{\theta \in \partial B / K(\theta) < 0\}$ et $\omega^0 = \{\theta \in \partial B / K(\theta) = 0\}$ et nous définissons la trace au bord d'une solution minorée de (??). Notre principal résultat est le suivant :

Théorème 2 *Soit u une solution minorée de l'équation (??) dans B . Alors pour tout $\theta \in \partial B$, on a l'alternative suivante :*

I. Si $\theta \in \omega^-$

i) ou bien pour tout voisinage U de θ dans ∂B

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_U u(r, \sigma) d\sigma = \infty,$$

ii) ou bien il existe un voisinage ouvert U de θ dans ∂B et une fonctionnelle linéaire l_U sur $C_0(U)$ tels que

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_R u(r, \sigma) \zeta(\sigma) d\sigma = l_U(\zeta) \quad \forall \zeta \in C_0^\infty(U). \quad (3.2)$$

II. Si $\theta \in \omega^+$, il existe un voisinage ouvert U de θ dans ∂B et une fonctionnelle linéaire l_U sur $C_0(U)$ tels qu'on ait (??).

L'ensemble \mathcal{R} des éléments $\theta \in \partial B$ tels que l'on ait I.ii) ou II. est ouvert et il existe une unique mesure de Radon μ sur \mathcal{R} telle que

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_{\mathcal{R}} u(r, \sigma) \zeta(\sigma) d\sigma = \int_{\mathcal{R}} \zeta d\mu \quad \forall \zeta \in C_0^\infty(U).$$

On définit alors la trace au bord d'une solution minorée de $\Delta u + Ke^{2u} = 0$ dans B par le triplet $(\mathcal{S}, \mu, \omega^0)$ où $\mathcal{S} = \partial B \setminus \mathcal{R}$.

D'autre part, dans le cas où K est une fonction strictement négative dans \bar{B} , nous définissons des mesures de Radon admissibles, c'est à dire des mesures de Radon dont la partie régulière et le noyau de Poisson de la partie singulière vérifient des conditions d'intégrabilité, et nous montrons qu'étant donnée une mesure μ de Radon admissible, il existe une unique solution du problème $\Delta u + Ke^{2u} = 0$ dans B et $u = \mu$ sur ∂B .

Comme dans le travail de M. Marcus et L. Véron [?], nous étendons ce résultat d'existence aux mesures de Borel en donnant une condition suffisante pour qu'un couple (\mathcal{S}, μ) représente la trace au bord d'une solution de l'équation.

Enfin, nous caractérisons, en terme de capacité, les ensembles éliminables du bord pour cette équation.

Ce travail fait l'objet d'un article à paraître dans Proc. Roy. Soc. Ed. [?].

Références

- [1] M. Grillot and L. Véron : Boundary trace of the solutions of the prescribed Gaussian curvature equation, **Proc. Roy. Soc. Ed.**, (à paraître).
- [2] M. Marcus and L. Véron : The boundary trace of positive solutions of semilinear elliptic equations : the supercritical case, **J. Math. Pures Appl.** **77**, 481-524 (1998).

Michèle Grillot
MAPMO
Université d'Orléans
BP 6759
45 067 Orléans Cedex 02
France
`grillot@labomath.univ-orleans.fr`

Drap brownien fractionnaire

Stéphanie Léger

Le but de mes recherches est de trouver un ou plusieurs paramètres permettant de savoir si une personne a de l'ostéoporose ou non.

L'ostéoporose est une maladie qui touche surtout les femmes et qui se traduit par une augmentation du caractère poreux de l'os et donc de sa fragilité. L'ostéoporose se révèle tardivement car les douleurs n'apparaissent habituellement qu'à l'occasion de complications comme la fracture du col du fémur (Dans la plupart des cas, on dit qu'une personne est tombée et s'est cassée le col du fémur alors qu'en fait, le col s'est cassé et elle est tombée).

A l'heure actuelle, il existe des méthodes qui permettent de dépister l'ostéoporose (absorptiométrie photonique, absorptiométrie bi-photonique, études histomorphométriques, ...) mais elles sont très coûteuses.

La recherche de nouvelles techniques fiables et d'un prix réduit est actuellement un des axes de recherche dans ce domaine.

Comme l'ostéoporose se reconnaît à la radiographie par une hypertransparence diffuse de l'os ou par un amincissement des travées osseuses, la numérisation de clichés radiographiques et leur étude par des méthodes d'analyse d'images peuvent s'avérer un bon moyen d'obtenir des paramètres quantitatifs.

Nous sommes donc en possession de radiographies du Calcaneum (os du talon).

Nous avons testé sur ces images tous les paramètres classiques de l'analyse de textures d'images grâce à un logiciel créé par l'INRIA : Arthur. Aucun de ces paramètres ne nous a permis de séparer les malades des sains. Il a donc fallu s'orienter vers de nouvelles techniques. Une équipe de chercheurs d'Orléans (LESI) a montré l'intérêt d'un modèle fractal pour l'analyse d'images et a appliqué une méthode d'analyse fractale orientée (estimation du paramètre H du mouvement brownien fractionnaire ([?])) sur les radiographies d'os ([?]).

L'inconvénient de cette méthode est qu'elle ne considère pas l'image dans son ensemble mais ligne par ligne. Nous avons donc décidé de définir une extension du mouvement brownien fractionnaire à la dimension 2 pour étudier l'image dans sa globalité.

Maintenant que le cadre est défini, nous allons faire quelques rappels avant de passer à la définition du drap brownien fractionnaire.

Toutes les définitions de bases proviennent de [?].

Définition : Le drap brownien est un champ gaussien centré $\{B_{s,t}; (s,t) \in \mathfrak{R}^2\}$ dont la matrice des covariances est :

$$\forall (s_1, t_1), (s_2, t_2) \in \mathfrak{R}^2 \quad E(B_{s_1, t_1} B_{s_2, t_2}) = \inf(s_1, s_2) \times \inf(t_1, t_2). \quad (3.3)$$

Considérons maintenant une fonction $\Phi \in L^2(\mathfrak{R}^2)$. Alors, l'intégrale stochastique de ϕ par rapport au drap brownien fractionnaire s'écrit $Y = \int \phi(s, t) dB_{s,t}$. La propriété principale que nous allons utiliser est que Y est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $\int \int \phi^2(s, t) ds dt$.

Définition : On appelle Drap Brownien fractionnaire le champ $W_{\alpha, \beta}$ défini par $:\forall (s, t) \in (\mathfrak{R}^+)^2$

$$W_{\alpha, \beta}(s, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [(s-u)_+^{\alpha-\frac{1}{2}} - (-u)_+^{\alpha-\frac{1}{2}}][(t-v)_+^{\beta-\frac{1}{2}} - (-v)_+^{\beta-\frac{1}{2}}] dB_{u,v}$$

où, $(x)_+$ représente la partie positive de x et (α, β) sont deux paramètres réels à préciser pour que ces 4 intégrales aient un sens.

Ce processus est une généralisation du mouvement brownien fractionnaire de Mandelbrot et Van Ness ([?]) aux champs aléatoires définis comme double intégrale fractionnaire d'un drap brownien. Posons :

$$f_\alpha(s, u) = (s-u)_+^{\alpha-\frac{1}{2}} - (-u)_+^{\alpha-\frac{1}{2}} \text{ et } f_\beta(t, v) = (t-v)_+^{\beta-\frac{1}{2}} - (-v)_+^{\beta-\frac{1}{2}}.$$

On peut remarquer que ce sont les intégrands d'un mouvement brownien fractionnaire classique (aux constantes près) de paramètres respectifs α et β . Alors :

$$W_{\alpha, \beta}(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha(s, u) f_\beta(t, v) dB_{u,v}$$

Proposition : Si α et $\beta \in]0, 1[$, alors $W_{\alpha, \beta}$ est bien défini.

Preuve : Pour que $W_{\alpha, \beta}$ existe, il faut que les intégrales fractionnaires utilisées soient bien définies. Cela est vérifié dès que l'intégrand appartient à L^2 .

Proposition : Le champ $W_{\alpha, \beta}$ est un champ aléatoire gaussien centré nul sur les axes.

On définit, comme cela est classique pour les processus à double indice, les accroissements $W_{\alpha, \beta}(s, t, (s+h_i, t+k_i))$ du processus $W_{\alpha, \beta}$:

$$\begin{aligned} & W_{\alpha, \beta}(s, t, (s+h_i, t+k_i)) \\ &= W_{\alpha, \beta}(s+h_i, t+k_i) - W_{\alpha, \beta}(s+h_i, t) - W_{\alpha, \beta}(s, t+k_i) + W_{\alpha, \beta}(s, t) \end{aligned}$$

notés par la suite $A_{(s,t)} W(h_i, k_i)$.

Definition : Un processus $X = (X_t, t \in T)$ est stationnaire si :

$\forall n, \forall (t_1, \dots, t_n) \in T^n$ la loi de $(X_{t+t_1}, X_{t+t_2}, \dots, X_{t+t_n})$ ne dépend pas de t .

Proposition : Le processus $W_{\alpha, \beta}(s, t)$ est à accroissements stationnaires.

Preuve : Il faut donc montrer que pour tout $(s, t) \in (\mathfrak{R}^+)^2$, le processus accroissements $\{A_{(s,t)}W(h_i, k_i)\}_{(h_i, k_i) \in (\mathfrak{R}^+)^2}$ est de même loi que le processus $\{A_{(0,0)}W(h_i, k_i)\}_{(h_i, k_i) \in (\mathfrak{R}^+)^2}$.

On notera désormais $A_{\alpha, \beta}W(h, k)$ un tel accroissement qui vérifie le corollaire suivant :

Corollaire : Le processus d'accroissement $A_{\alpha, \beta}W$ est un champ aléatoire gaussien centré de matrice de covariance :

$$\frac{1}{4}C_\alpha C_\beta (|h_i|^{2\alpha} + |h_j|^{2\alpha} - |h_i - h_j|^{2\alpha})(|k_i|^{2\beta} + |k_j|^{2\beta} - |k_i - k_j|^{2\beta})$$

Proposition Le processus $W_{\alpha, \beta}$ est statistiquement auto-similaire dans le sens où :

si $\forall h, k \in \mathfrak{R}_*^+$, le processus $\hat{W}_{\alpha, \beta}$ défini par

$$\hat{W}_{\alpha, \beta}(s, t) = h^\alpha k^\beta W_{\alpha, \beta}\left(\frac{s}{h}, \frac{t}{k}\right),$$

est de même loi que $W_{\alpha, \beta}$.

Preuve : Il est évident que $\hat{W}_{\alpha, \beta}$ est un champs gaussien. Donc, pour montrer que les deux champs aléatoires ont la même loi, il suffit de montrer qu'ils ont la même moyenne et la même matrice de covariance.

Nous allons maintenant nous intéresser à la continuité des trajectoires.

Proposition Si α et $\beta \in]0, 1[$, $W_{\alpha, \beta}$ admet une modification dont les trajectoires sont continues sur \mathfrak{R}^2 au sens de Hölder à l'ordre (α', β') , $\forall \alpha' \in]0, \alpha[$, $\beta' \in]0, \beta[$.

L'un des objectifs futurs concernant le drap-brownien est bien sûr l'estimation des paramètres α et β et la simulation du processus. Dans cette optique, nous nous sommes intéressées à la régularité de W par rapport aux paramètres α et β .

Nous montrons que le drap brownien fractionnaire est continu en (α, β) dans le sens suivant :

Théorème : Soit $W_{\alpha, \beta}$, le processus défini en (??) avec $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$ et le compact de \mathfrak{R}^6

$$T_h = [0, L] \times [0, K] \times \{\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in [a, b]^2 \times [c, d]^2 / |\alpha - \alpha'| + |\beta - \beta'| \leq h\}$$

défini pour $[a, b] \times [c, d] \in (0, 1)^2$ et $L, K > 0$. On pose

$$A_h = \sup_{(s,t,\alpha,\alpha',\beta,\beta') \in T_h} |W_{\alpha,\beta}(s,t) - W_{\alpha',\beta'}(s,t)|.$$

Alors, A_h converge presque sûrement vers 0 lorsque h tend vers 0. Plus précisément, on obtient qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\delta < 1$, presque sûrement :

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \frac{A_h - Ch}{h^\delta} \leq \varepsilon.$$

Références

- [1] R.J. Adler, The Geometry of Random Fields, John Wiley and Sons, 1981.
- [2] Z. Ciesielski, A. Kamont, "Levy's fractional Brownian random field and function spaces", Acta Sci. Math., 60, 99-118, 1995.
- [3] D. Feyel, A. De La Pradelle, "Fractional integrals and Brownian processes", Preprint université d'Evry, 1996.
- [4] R. Jennane, Modélisation Fractale de Textures, Application à l'Analyse de l'Architecture Osseuse. Thèse de Troisième Cycle, Université d'Orléans, 1995.
- [5] A. Kamont, "On the fractionnal anisotropic wiener field", Prob. and Math. Stat., vol. 16, fasc. 1, 85-98, 1996
- [6] I. Karatzas, S. Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus, Springer-Verlag, 1988.
- [7] J. Levy-Vehel, R.F. Peltier, "Multifractional Brownian motion : definition and preliminary results", rapport de recherche INRIA 2645, Août 1995 ; à paraître dans Stoc. Proc. and their appli. .
- [8] T. Lindstrom, "Fractional Brownian fields as integrals of white noise", Bull. London Math. Soc., 25 ,83-88, 1993.
- [9] B.B. Mandelbrot, J.W. Van Ness, "Fractional Brownian motion , Fractional noises and applications", SIAM Review 10, 422-437, 1968.
- [10] Samorodnisky, Taqqu, Stable non-Gaussian Random Processes, Chapman and hall, 1994.

- [11] E. Wong et M. Zakai, Martingales and Stochastics Integrals for Processes with a Multi-Dimensional Parameter, *Zeit. Wahrsch.*, 29, 109-122, 1974.

Stéphanie Léger

MAPMO

Département de Mathématiques

BP 6759

45067 ORLEANS CEDEX 2

France

`leger@labomath.univ-orleans.fr.fr`

Problèmes de Contrôle Optimal Parabolique avec Contraintes sur le Contrôle.

Nora Merabet

Introduction et hypothèses

On propose d'étudier la stabilité et la sensibilité d'un problème de contrôle optimal gouverné par une équation parabolique semi-linéaire, avec des contraintes sur le contrôle.

On considère un système dont l'état y est donné par

$$\begin{cases} \partial_t y + Ay + f(y) = u & \text{in } Q \\ y = 0 & \text{on } \Sigma \\ y(0) = g & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (3.4)$$

et un problème de contrôle optimal (g étant fixé, $g = 0$)

$$(\mathcal{P}_\tau) \quad \begin{cases} \min J_\tau(u, y) := \frac{1}{2} \int_Q (y - \tau)^2 dx dt + \frac{N}{2} \int_Q u^2 dx dt \\ y = y(u) \text{ solution de (??)} \\ u \in \mathcal{K}, \end{cases}$$

où $N > 0$, $\tau \in L^p(Q)$ et \mathcal{K} un convexe fermé borné dans $L^p(Q)$. Ce genre de problème (\mathcal{P}_τ) a au moins une solution $u^*(\tau)$. Nous aimerions décrire la sensibilité locale de $u^*(\tau)$ par rapport à τ ainsi que le comportement de la fonction valeur optimale $\tau \mapsto J(u^*(\tau), y(u^*(\tau)))$. Sous des conditions d'optimalité du second ordre, nous donnerons un résultat de stabilité du contrôle par rapport au paramètre et en plus d'une hypothèse de polyédricité de \mathcal{K} (notion définie dans [?]) on établit un développement local du second ordre de la fonction valeur optimale au voisinage d'une valeur fixée $\bar{\tau}$. La plus part des techniques utilisées sont dûes à J.F. Bonnans [?] qui a étudié la question dans le cadre elliptique pour le même type de perturbation convexe. Par ailleurs, nous avons étudié le cas plus général d'une perturbation nonlinéaire (où la donnée initiale g mal connue dans l'équation d'état est considérée comme un paramètre). Ce que nous n'aborderons pas ici.

Précisons les hypothèses :

— **(H1)** A est un opérateur différentiel elliptique du second ordre défini

par

$$\begin{aligned}
Ay &= - \sum_{i,j=1}^N \partial_{x_i} (a_{ij}(x) \partial_{x_j} y) + a_o(x)y \text{ avec} \\
& a_{ij} \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}), \quad i, j = 1 \cdots N, \\
& a_o \in L^\infty(\Omega), \text{ Infess } \{a_o(x) \mid x \in \overline{\Omega}\} \geq 0. \\
\forall x \in \overline{\Omega}, \forall \xi \in R^N, \quad & \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq M \sum_{i=1}^N \xi_i^2 \text{ with } M > 0.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

- **(H2)** f est une fonction réelle \mathcal{C}^2 de R dans R , non croissante et globalement lipschitzienne continue. On note similairement la fonction f et l'opérateur de Nemytskii $f : y \mapsto f(y)$ tel que $f(y)(x, t) = f(y(x, t))$, $(x, t) \in Q$.

Propriétés de l'équation d'état :

(i) On suppose (H1) et (H2). Pour tout $u \in L^p(Q)$ et $g \in W_o^{1,p}(\Omega)$ avec $p > N$, l'équation (??) admet une unique solution $y = y(u, g) \in W_2(0, T) \cap \mathcal{C}(\overline{Q})$.

(ii) **Continuité de la fonction d'état par rapport aux données**

Pour tout $u \in L^p(Q)$ et tout $g \in W_o^{1,p}(\Omega)$, il existe $C > 0$ tel que

$$\|y\|_{\infty, Q} \leq C (\|u\|_{p, Q} + \|g\|_{\infty, \Omega} + 1), \tag{3.6}$$

D'autre part y est continue Hölder sur \overline{Q} : pour tout $M > 0$, il existe une constante C et $\nu > 0$ telles

$$\|u\|_{q, Q} + \|g\|_{\infty, \Omega} \leq M \implies \|y\|_{C^{\nu, \nu/2}(\overline{Q})} \leq C.$$

Preuve (voir [?]).

Théorème L'application $(u, g) \mapsto y(u, g)$ est séquentiellement continue

i) de $L^p(\Omega) \times W_o^{1,p}(\Omega)$ muni de la topologie faible- $L^p(Q) \times$ faible-étoile $L^\infty(\Omega)$ dans $\mathcal{C}(\overline{Q})$ (fort).

(ii) de $L^p(\Omega) \times W_o^{1,p}(\Omega)$ muni de la topologie faible dans $\mathcal{C}(\overline{Q})$ fort et dans $L^2(Q)$ fort.

Preuve Voir ([?]). Cette propriété de la fonction d'état est cruciale dans la suite.

On définit l'espace d'état

$$\mathcal{Y} = \{y \in W_p(0, T) \mid \partial_t y + Ay \in L^p(Q), y = 0 \text{ sur } \Sigma, y(0) \in W_o^{1,p}(\Omega)\}.$$

\mathcal{Y} est un sous-espace de $\mathcal{C}(\overline{Q})$, et muni de la norme

$$\|y\|_{\mathcal{Y}} = \|y\|_{W_p(0,T)} + \|y\|_{\mathcal{C}(\overline{Q})} + \|y_t + Ay\|_{L^p(Q)} + \|y(0)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)},$$

c'est un espace de Banach.

Si nous écrivons l'équation d'état sous forme d'opérateur \mathcal{T} qui est de classe \mathcal{C}^2 .

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : L^p(Q) \times \mathcal{Y} &\rightarrow L^p(Q) \times W_0^{1,p}(\Omega) \\ (u, y) &\mapsto (\partial_t y + Ay + f(y) - u, y(0)), \end{aligned}$$

alors le théorème des fonctions implicites nous dit que l'équation $\mathcal{T}(u, y) = 0$ admet une solution unique en $y := y(u)$ pour tout $u \in L^p(Q)$. En remplaçant dans l'expression de la fonction coût, (\mathcal{P}_τ) se formule ainsi :

$$(\mathcal{P}_\tau) \quad \begin{cases} \min F(u, \tau) := J_\tau(u, y(u)) \\ u \in \mathcal{K} \end{cases}$$

Propriétés de la fonction coût : (i) F est de classe \mathcal{C}^2 de $L^p(Q)$ dans R et

$$F'_u(u, \tau)v = (Nu + p(u), v)_{2,Q} \quad (3.7)$$

$$F''_u(u, \tau)(v, v) = ((1 - p(u)f''(y(u)))z_v, z_v)_{2,Q} + N\|v\|_{2,Q}^2. \quad (3.8)$$

où $p(u)$ est l'état adjoint associé à y et $z_v = Dy(u)v$.

(ii) F est séquentiellement faiblement continue sur $L^p(Q)$.

La condition d'optimalité suffisante du second ordre faible

(au sens de la norme L^2) est satisfaisante en u si

— u satisfait au système d'optimalité du premier ordre

$$\forall v \in \mathcal{K}, \quad (F'_\tau(u_\tau), v - u_\tau) \geq 0. \quad (3.9)$$

— et si

$$\exists \nu > 0, \quad \forall v \in C_2(u), \quad F''_\tau(u)(v, v) \geq \nu\|v\|_2^2, \quad (3.10)$$

où $C_2(u)$ est le cône critique dans $L^2(Q)$

$$C_2(u) = \{v \in L^2(Q); F'_\tau(u)v = 0, u + \delta v + o(\delta) \in \mathcal{K}, \delta > 0\}$$

Le problème quadratique associé à (\mathcal{P}_τ) :

Une autre approche de la théorie des conditions d'optimalité du second ordre

associe à chaque point admissible u de (\mathcal{P}_τ) un problème quadratique $(\mathcal{Q}_{u,\tau,\eta})$ qui est à la base du résultat de sensibilité. Pour tout η fixé dans $L^2(Q)$:

$$(\mathcal{Q}_{u,\tau,\eta}) \quad \begin{cases} \min F''(u, \tau)((v, \eta), (v, \eta)) \\ v \in \mathcal{C}_2(u) \end{cases}$$

Résultat de stabilité et de sensibilité

On notera $\mathcal{V}(\tau)$ (resp. $\mathbf{V}(\mathcal{Q}_{u,\tau,\eta})$) la fonction valeur optimale de (\mathcal{P}_τ) (resp. $(\mathcal{Q}_{u,\tau,\eta})$) :

Théorème : (i) Soit τ_k une suite de $L^p(Q)$ fortement convergente vers $\bar{\tau}$ dans $L^2(Q)$ et u_k solution de (\mathcal{P}_{τ_k}) . Alors, il existe \bar{u} solution de $(\mathcal{P}_{\bar{\tau}})$ tel que u_k converge vers \bar{u} faiblement dans $L^p(Q)$ et fortement dans $L^2(Q)$.

Si de plus \bar{u} vérifie (??) alors

$$\|u_k - \bar{u}\|_{2,Q} = O(\|\tau_k - \bar{\tau}\|_{2,Q}). \quad (3.11)$$

Supposons que \mathcal{K} est $L^2(Q)$ -polyédrique.

(ii) Soit $\tau_k = \bar{\tau} + t_k \eta$, avec $\eta \in L^p(Q)$. Si \bar{u} vérifie (??) alors on a le développement du second ordre de la fonction valeur optimale (à une sous-suite près)

$$\mathcal{V}(\tau_k) = \mathcal{V}(\bar{\tau}) + t_k F'_\tau(\bar{u}, \bar{\tau}) \eta + t_k^2 \mathbf{V}(\mathcal{Q}_{\bar{u}, \bar{\tau}, \eta}) + o(t_k^2).$$

(iii) Si v est une limite au sens faible de $\frac{u_k - \bar{u}}{t_k}$ dans $L^2(Q)$ alors v est une limite au sens fort de $\frac{u_k - \bar{u}}{t_k}$ dans $L^2(Q)$ et v est solution de $\mathbf{V}(\mathcal{Q}_{\bar{u}, \bar{\tau}, \eta})$.

preuve

La preuve se base essentiellement sur une méthode des sous et sur estimations des fonctions valeurs optimales sur la régularité de la fonction d'état et sur le lemme suivant qui permet d'écrire le développement de la fonction valeur optimale avec un reste dans $L^2(Q)$ pour des fonctions tests dans $L^p(Q)$.

lemme Soit $r(u, v)$ le reste dans le développement du second ordre de la fonction coût F , c'est à dire

$$F(u + v) = F(u) + F'(u)v + \frac{1}{2}F''(u)(v, v) + r(u, v).$$

Quand $v \rightarrow 0$ dans $L^2(Q)$, et v appartient à un ensemble borné dans $L^p(Q)$, avec $p > \frac{N}{2}$, on obtient $\frac{|r(u, v)|}{\|v\|_2^2} \rightarrow 0$.

Références

- [1] **N. Arada, M. Bergounioux and J.P Raymond**, *Minimax controls for uncertain distributed parabolic systems*, to appear SIAM Journal on Control and Optimization.
- [2] **M. Bergounioux and H. Zidani**, *Pontryagin Maximum Principle For Optimal Control of Variational Inequalities*, SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 37, n° 4, pp. 1273-1290, 1999.
- [3] **J.F. Bonnans**, *Second order analysis for control constrained optimal control problems of semilinear elliptic systems*, Applied Mathematics and Optimization, 38, pp. 303-325, 1998.
- [4] **J.F. Bonnans- R. Cominetti**, *Perturbed optimization in Banach spaces I : a general theory based on a strong directional constraint qualification*, SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 34, n° 4, pp 1172-1189, 1996.
- [5] **R. Dautray - J.L. Lions**, *Analyse mathématique and calcul numérique pour les sciences et les techniques. Evolution : semi-groupe, variationnel*, Tome 8, Masson, 1984.

Nora Merabet
Département de Mathématiques
UMR 6628 - MAMPO - Université d'Orléans
B.P. 6759 - 45067 Orléans Cedex 2
France
Nora.Merabet@labomath.univ-orleans.fr

Groupes de Hecke et Surfaces Modulaires de Hilbert

Andrea Moreira

Considérons le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}; \text{Im}(z) > 0\}$, qui est un domaine simplement connexe. Une surface de Riemann est obtenue, par exemple, comme le quotient de \mathbb{H} par un sous groupe Γ du groupe d'automorphismes de \mathbb{H} , à action discontinue sur \mathbb{H} .

Le groupe $GL^+(2, \mathbb{R})$ des matrices 2×2 , à coefficients réels et à déterminant positif, agit sur \mathbb{H} par applications fractionnaires :

$$\forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \gamma: \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$$

$$z \longmapsto \gamma z = \frac{az+b}{cz+d}$$

et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $(t\gamma)z = \gamma z$, donc on peut identifier ces deux éléments γ et $t\gamma$ de $GL^+(2, \mathbb{R})$ et on a alors,

$$\text{Aut}(\mathbb{H}) = PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R})/\{\pm I\}$$

On peut prendre par exemple $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z}) \subset PSL(2, \mathbb{R})$ qui a une action discontinue sur \mathbb{H} .

Les groupes de Hecke

Définition : Un groupe triangulaire de signature (p, q, r) , avec $p, q, r \geq 2$ et appartenant à $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, est un sous groupe de $SL(2, \mathbb{R})$, à trois générateurs $\{M_1, M_2, M_3\}$, dont l'image dans $PSL(2, \mathbb{R})$ est un groupe muni d'une présentation :

$$\{M_1^p = M_2^q = M_3^r = M_1 M_2 M_3 = 1\}.$$

Etant donnée une signature (p, q, r) vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$, le groupe est déterminé à conjugaison dans $SL(2, \mathbb{R})$ près.

Par exemple, le groupe de signature $(3, 2, \infty)$ est le groupe de Hecke correspondant à $SL(2, \mathbb{Z})$. Il est engendré par les matrices

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut aussi considérer le groupe $\Delta = (5, 2, \infty)$. Ce groupe est engendré par les matrices

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser à ces deux exemples.

Le groupe $(3, 2, \infty)$ est arithmétique alors que Δ ne l'est pas. Pour la définition d'arithméticité d'un groupe, se référer par exemple à [?], mais on peut interpréter cette notion par le fait que si un groupe Δ_0 est arithmétique, ses orbites sur \mathbb{H} sont en bijection avec une classe d'isomorphisme de variétés abéliennes, comme c'est le cas pour le groupe $SL(2, \mathbb{Z})$, où l'espace quotient $PSL(2, \mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$ est en bijection avec les classes d'isomorphismes sur \mathbb{C} des courbes elliptiques.

Si le groupe Δ n'est pas arithmétique alors, bien que les quotients $\Delta \backslash \mathbb{H}$ et $\Delta_0 \backslash \mathbb{H}$ puissent être les mêmes en tant qu'espaces, les orbites pour l'action de Δ sur \mathbb{H} n'ont pas d'interprétation en termes de variétés abéliennes. Néanmoins, P. Cohen et J. Wolfart ont démontré dans [?], que dans le cas triangulaire hyperbolique (ex., les groupes de Hecke), et en particulier dans le cas de Δ , il existe un plongement, qui n'est pas trivial, de $\Delta \backslash \mathbb{H}$ dans $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$, où Γ est le groupe modulaire de Hilbert pour le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Le quotient de \mathbb{H}^2 par Γ est l'espace de modules de variétés abéliennes. De plus, ce plongement respecte les $\overline{\mathbb{Q}}$ -structures des quotients.

Le groupe modulaire de Hilbert

Définition : Soient le corps de nombres quadratique $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ et O_K son anneau d'entiers ; $O_K = \mathbb{Z} + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\mathbb{Z}$. On note $\Gamma = SL(2, O_K)$ le groupe modulaire de Hilbert de K ,

$$\Gamma = \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in O_K, \det \gamma = 1 \right\}.$$

Le groupe Γ agit sur deux copies du demi-plan \mathbb{H} de Poincaré de la manière suivante :

$$\forall \gamma \in \Gamma, \quad \gamma : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H} \times \mathbb{H} \\ (z_1, z_2) \longmapsto (\gamma z_1, \gamma' z_2)$$

où γ' est l'image de γ par l'automorphisme de Galois non trivial de K dans \mathbb{R} , $x \mapsto x'$, donné par $\sqrt{5} \mapsto -\sqrt{5}$. C'est à dire si $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors

$$\gamma' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}.$$

Le groupe Γ a une action discontinue sur \mathbb{H}^2 donc on peut considérer l'espace quotient $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ qui a 1 pointe. On compactifie cet espace en rajoutant un point. On obtient une surface non-lisse $X_1 = \overline{\Gamma \backslash \mathbb{H}^2}$ appelée la surface modulaire de Hilbert pour $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ de niveau 1.

Il y a une manière naturelle de plonger $SL_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$ dans X_1 . En effet, le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $\Gamma = SL(2, O_K)$ et l'action de Γ sur \mathbb{H}^2 induit une action de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur \mathbb{H}^2 . De plus, on peut plonger \mathbb{H} dans \mathbb{H}^2 par le plongement diagonal $z \mapsto (z, z)$. Ce plongement est clairement compatible aux actions respectives de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur \mathbb{H} et \mathbb{H}^2 . On peut donc passer aux quotients et en déduire un morphisme (en fait un plongement) de $SL_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$ dans $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$. Ce plongement préserve les $\overline{\mathbb{Q}}$ -structures de ces quotients.

De même, Δ est un sous-groupe de $\Gamma = SL(2, O_K)$ et il existe, d'après [?], un plongement de $\Delta \backslash \mathbb{H}$ dans X_1 . Bien sûr, il n'est plus induit par le plongement diagonal et il est nettement plus compliqué à décrire.

Considérons maintenant le groupe

$$\Gamma[2] = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv 1 \pmod{2O_K} \right\},$$

appelé sous groupe principal de congruence de niveau 2 de Γ . Le quotient $\Gamma/\Gamma[2]$ est isomorphe au groupe alterné A_5 , par conséquent la surface $X_2 = \Gamma[2] \backslash \mathbb{H}^2$ est munie d'une action naturelle de A_5 et possède 5 pointes. En résolvant ces 5 singularités de X_2 , on obtient une surface complexe lisse Y_2 . Hirzebruch a démontré (voir Theorem 1 de [?]), que Y_2 est isomorphe en tant que surface complexe à une surface Y provenant d'un éclatement de la surface de Klein.

La surface de l'icosaèdre de Klein

Soit I l'icosaèdre de \mathbb{R}^3 inscrit dans la sphère S^2 . En projetant de l'origine sur la surface de S^2 , les 12 sommets déterminent 12 points sur S^2 , les 30 arêtes 15 grands cercles et les milieux des faces 20 points. L'identification antipodale $S^2 \mapsto S^2/\{\pm 1\} \simeq \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ identifie

$$\begin{array}{ll} 12 \text{ points} & \longleftrightarrow 6 \text{ points dans } \mathbb{P}_2 : \text{ les pôles} \\ 15 \text{ cercles} & \longleftrightarrow 15 \text{ droites projectives dans } \mathbb{P}_2 : \text{ les droites} \\ 20 \text{ points des faces} & \longleftrightarrow 10 \text{ points dans } \mathbb{P}_2 : \text{ les points} \end{array}$$

On complexifie $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ et on éclate les 6 pôles. On obtient une surface appelée la surface de l'icosaèdre de Klein. Elle a une description équivalente due à Clebsch comme surface dans $\mathbb{P}_4(\mathbb{C})$:

$$\left\{ (x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4) \in \mathbb{P}_4(\mathbb{C}); \sum_{j=0}^4 x_j = \sum_{j=0}^4 x_j^3 = 0 \right\}$$

avec 27 droites. On peut voir un modèle réel de cette surface dans [?], par exemple.

Si l'on éclate maintenant les transformés des 10 points, on obtient une surface complexe lisse $Y \simeq Y_2$.

La résolution de chaque pointe de X_2 est donné sur Y_2 par un cycle de 3 courbes de self-intersection -3 et on retrouve ainsi les 15 transformés propres sur Y des 15 droites de la surface de Klein provenant des 15 cercles.

Le quotient de $SL_2(\mathbb{Z})$ par son sous-groupe de congruence principal de niveau 2 est d'ordre 6, donc l'image de $SL_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$ dans $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ a une orbite de cardinalité 10 sous l'action de A_5 . Cette orbite correspond aux 10 diviseurs exceptionnels sur la surface Y provenant des 10 points éclatés sur la surface de Klein.

Nous avons donc une description "automorphe" de 15 des 27 droites de la surface de Clebsch ainsi que des 10 points éclatés. Mais il reste 12 droites de la surface de Clebsch à décrire, si possible, de cette façon. Dans [?], Thomas Schmidt résout ce problème en considérant le groupe de Hecke Δ , de signature $(2, 5, \infty)$.

L'image de $\Delta \backslash \mathbb{H}$ dans $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ a une orbite de cardinalité 6 sous l'action de A_5 . T. Schmidt a démontré dans [?] que cette orbite correspond à six diviseurs sur la surface Y qui ne sont ni les transformés des 15 droites des configurations triangulaires, ni les 10 diviseurs provenant des 10 points éclatés sur la surface de Clebsch. De plus, l'action de Δ sur \mathbb{H}^2 n'est pas diagonale donc l'automorphisme $\tau : (z_1, z_2) \mapsto (z_2, z_1)$ agit de manière non triviale sur les 6 orbites qui se trouvent dans X_2 , donnant lieu à 6 autres diviseurs. Ces 12 diviseurs ainsi obtenus sont les transformés propres des 12 droites restantes de la surface de Clebsch, c'est-à-dire les 6 diviseurs exceptionnels provenant des 6 pôles éclatés et les transformés des 6 coniques qui passent chacune par 5 des 6 pôles.

Références

- [1] *P. Cohen, J. Wolfart*, Modular embeddings for some non-arithmetic Fuchsian groups. *Acta Arith.* **LVI**, (1990), 93–110.
- [2] *F. Hirzebruch*, Regular Polyhedra and the football. Polycopié d'un exposé fait à Tokyo
- [3] *F. Hirzebruch*, Hilbert's modular group of the field $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ and the cubic diagonal surface of Clebsch and Klein. *Russian Math. Surveys* **31** :5, (1976), 96–110.
- [4] *T. Schmidt*, Klein's Cubic Surface and a "non-arithmetic" curve. *Math. Ann.* **309**, No.4 (1997), 533–539.
- [5] *K. Takeuchi*, A characterisation of arithmetic Fuchsian groups. *J. Math. Soc. Japan* **27**, No.4 (1975), 600–612.
- [6] *K. Takeuchi*, Arithmetic triangle groups. *J. Math. Soc. Japan* **29**, (1977), 91–106.

Andrea Moreira
Université Lille 1
Bâtiment M2 (212)
USTL, Cité Scientifique
59 655 Villeneuve d'Ascq
France
`moreira@gat.univ-lille1.fr`

**Le problème des grandes puissances et celui des grandes racines :
une introduction à la complexité
sur les corps et les corps différentiels**

Natacha Portier

Tous les corps considérés sont de caractéristique nulle.

Je vous donne un élément a d'un corps K , et un élément x , et je vous demande si $x = a^6$. Comment faire ? Vous avez le droit de multiplier, d'additionner ou de soustraire deux éléments du corps, et de tester si un élément est nul. Il suffit de multiplier a par lui-même pour obtenir a^2 , puis a^2 par lui-même pour obtenir a^4 , puis a^2 par a^4 pour obtenir a^6 , de soustraire x et de tester si le résultat obtenu est 0.

Il vous a fallu 5 opérations pour répondre à la question, ou 7 si on prend en compte le fait de regarder x et a au départ. Si on suppose que chaque opération prend le même temps, alors il vous a fallu un temps 7 pour répondre à la question. Si je vous demande maintenant si x est égal à a^{2^n} , vous pourrez répondre à la question en $n + 4$ opérations.

On regroupe les questions en problèmes. Un problème X est un ensemble de uples (x_1, \dots, x_n) de K , de différentes longueurs n . Par exemple, pour a fixé, $X_a = \{(x_1, \dots, x_n) / x_1 = a^{2^n}\}$. Si $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ est un uple d'éléments de K , on s'intéresse à la question $\bar{x} \in X$? Etudier la complexité des problèmes, c'est vouloir les classer selon le temps qu'il faut pour répondre aux questions en fonction de la taille n de la donnée. En simplifiant, si le temps pour répondre est borné par un polynôme de la taille de la donnée, on dit que le problème est polynomial (le problème est P). C'est le cas de l'exemple X_a . On parle de complexité algébrique car les opérations qu'on peut faire sont des opérations algébriques et qu'on peut tester un certain nombre de relations sur l'ensemble considéré, ici le corps K .

Certains problèmes se résolvent en temps polynomial pour peu qu'on donne une indication : c'est le cas par exemple des systèmes d'équations polynomiales. Etant donné un tel système, il n'est pas facile de savoir s'il a une solution. Par contre, si on donne un candidat, c'est facile et polynomial de tester si c'est bien une solution. La classe des problèmes de ce type est appelée NP . La lettre N signifie non déterministe, car cela revient à tirer un uple au hasard pour voir si c'est une solution. La complexité est définie plus précisément pour les anneaux dans le livre de L. Blum, F. Cucker, M. Shub et S. Smale [?], et plus généralement pour un ensemble avec des opérations

quelconques dans le livre de B. Poizat ([?]).

Une des questions importantes en théorie de la complexité est de savoir si $P = NP$ dans l'ensemble considéré (ici le corps K). Comme en général on ne sait pas répondre, on montre des théorèmes de transfert, c'est à dire on regarde les liens entre $P = NP$ dans un ensemble et dans un autre :

Théorème ([?]) : la question $P = NP?$ a la même réponse dans tous les corps algébriquement clos de caractéristique nulle.

Que se passe-t-il si on ajoute des opérations ? On munit par exemple K d'une structure de corps différentiel en ajoutant une dérivée. C'est une fonction d de K dans K telle que pour tout x et tout y de K , $d(x+y) = dx+dy$ et $d(xy) = xdy + ydx$. On peut alors, en autorisant cette nouvelle fonction dans les calculs, définir de nouvelles classes P et NP . D'autre part, on définit la notion de corps différentiellement clos K , qui sont aux corps différentiels ce que les corps algébriquement clos sont aux corps. Un corps est algébriquement clos si pour tout polynôme $P(X)$ non constant, il existe un élément x tel que $P(x) = 0$. L'axiomatisation des corps différentiellement clos est due à L. Blum ([?]) : pour tout polynôme différentiel $P(X)$, i.e. un polynôme de l'indéterminée X et de ses dérivées successives, et pour tout polynôme différentiel $Q(X)$ avec des dérivées de X plus grandes, il existe un élément x de K tel que $P(x) \neq 0$ et $Q(x) = 0$. Comment relier la complexité dans les corps et dans les corps différentiels ? On montre le théorème de transfert suivant :

Théorème ([?]) : La question $P = NP?$ a la même réponse dans tous les corps différentiellement clos de caractéristique nulle. De plus, si $P = NP$ pour les corps différentiellement clos, alors $P = NP$ pour les corps algébriquement clos.

La réciproque est ouverte.

Ces théorèmes sont les conséquences d'une propriété des corps et des corps différentiels, la stabilité polynomiale : si k est un sous-corps de K , si X est un problème P sur K , alors sa restriction à k est encore P ([?]). C'est encore vrai si k est un sous-corps différentiel de K , et si on considère les classes de complexité au sens des corps différentiels ([?]). Cette propriété sert également à montrer le théorème des grandes puissances et des grandes racines (voir plus bas).

On peut se demander plus précisément dans quelle mesure une dérivée permet de répondre plus vite aux questions. Est-ce que tous les problèmes

deviennent polynomiaux avec une dérivée? Ou est-ce qu'au contraire, les problèmes polynomiaux avec la dérivée sont exactement ceux qui l'étaient déjà sans? L'étude d'exemples particuliers, le problème des grandes racines et celui des grandes puissances, permet de répondre négativement à la première question. On considère une fonction f de l'ensemble des entiers dans lui-même, qui croisse suffisamment vite, i.e. qui ne soit majorée par aucune exponentielle de polynôme. Le problème des grandes racines de l'élément a est l'ensemble des uples de la forme (x_1, \dots, x_n) , où n est un entier strictement positif, $x_1^{f(n)} = a$ et x_2, \dots, x_n sont des éléments de K . Le problème des grandes puissances de l'élément a est l'ensemble des uples de la forme $(a^{f(n)}, x_2, \dots, x_n)$, où n est un entier strictement positif et x_2, \dots, x_n des éléments de K . On peut alors donner une version simplifiée du théorème :

Théorème ([?]) : Si K est un corps algébriquement clos, le problème des grandes racines n'est polynomial ni sans la dérivée ni avec.

Si a n'est ni 0 ni une racine de l'unité, le problème des grandes puissances n'est polynomial ni sans la dérivée ni avec, même si on considère une définition moins forte des problèmes polynomiaux.

Pour montrer ce théorème, outre la stabilité polynomiale des corps et des corps différentiels, on utilise une notion d'arithmétique : la hauteur des nombres algébriques. La hauteur d'un rationnel x est définie (par exemple dans le livre de S. Lang [?]) comme le produit sur toutes les valeurs absolues classiques v (le module et les valeurs absolues p -adiques pour p premier) de $\max(1, v(x))$. C'est le maximum des modules de son numérateur et de son dénominateur. Cette définition s'étend aux nombres algébriques en considérant les extensions de ces valeurs absolues sur des corps de nombres (i.e. des extensions finies du corps des rationnels). On peut donner une définition équivalente à l'aide de la mesure de Mahler (voir par exemple l'article de G. Everest [?]). Si α est un nombre algébrique, il est racine d'un polynôme de degré minimal à coefficients entiers premiers entre eux dans leur ensemble et de coefficient dominant a_d . Si A est l'ensemble des racines de ce polynôme, alors la hauteur de α est $H(\alpha) = |a_d| \prod_{\alpha_i \in A} \max(1, |\alpha_i|)$. Quels sont les éléments algébriques de hauteur 1? D'après un théorème de Kronecker (1895), si toutes les racines d'un polynôme à coefficients entiers sont de module 1, alors ce sont des racines de l'unité. Ceci implique que les seuls nombres algébriques de hauteur 1 sont 0 et les racines de l'unité. C'est la raison pour laquelle on distingue ce cas dans le théorème des grandes puissances.

Nous savons maintenant que l'utilisation de la dérivée ne permet pas de répondre à toutes les questions en temps polynomial. Mais permet-elle au moins dans quelques cas de répondre plus vite ?

Références

- [1] *Lenore Blum*, Generalized algebraic structures : A model theoretic approach. Thèse de Ph. D. , Massachussets Institute of Technology (1968)
- [2] *Lenore Blum, Felipe Cucker, Mike Shub et Steve Smale* , Complexity and Real Computation. Springer Verlag (1998)
- [3] *Graham Everest*, Measuring the Height of a Polynomial. The Mathematical Intelligencer, pp. 9–16, vol. 20, nb. 3, (1998)
- [4] *Serge Lang*, Fundamentals of Diophantine Geometry. Springer Verlag (1983)
- [5] *Bruno Poizat*, Les petits cailloux. ALEAS éditeur (1995)
- [6] *Natacha Portier*, Stabilité polynomiale des corps différentiels. *Journal of Symbolic Logic*, Vol. 64, Number 2, June 1999, pp. 803-816
- [7] *Natacha Portier*, Le problème des grandes puissances et celui des grandes racines. À paraître dans le *Journal of Symbolic Logic*

Natacha Portier
Laboratoire de l'Informatique du Parallélisme
École Normale Supérieure de Lyon
46, Allée d'Italie
69364 LYON CEDEX 07
Natacha.Portier@ens-lyon.fr
<http://www.ens-lyon.fr/~nportier/>

femmes & math

Revue de l'association *femmes et mathématiques*

Institut Henri Poincaré

11 rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris cedex 05

fetm@ihp.jussieu.fr

<http://www.desargues.univ-lyon1.fr/home/fem/fem.html>

Troisième et quatrième forums des jeunes mathématiciennes (1998 et 1999)

• Editorial 1	1
• Table des matières	3
• Forum 98	5
• Forum 99	82

Coordination du supplément : Françoise Delon et Natacha Portier

Directrice de Publication : Christine Charretton

Imprimerie de l'Université Rennes I

Numéro ISSN : 1271-3546

Dépôt légal : Octobre 2000

Prix du numéro : 60 FF