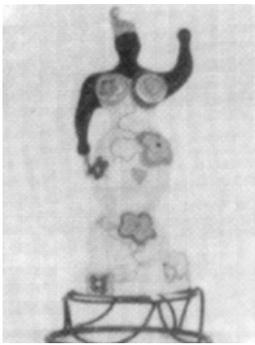


# *femmes & math*

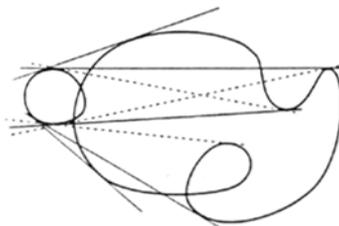
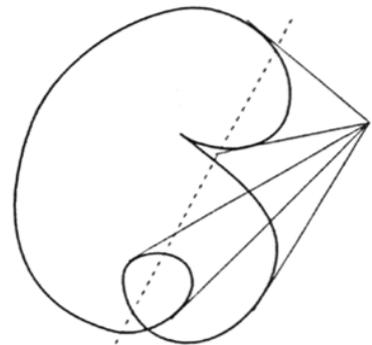


N°3. Supplément

Janvier 1999

## *Sommaire*

Deuxième forum des jeunes  
mathématiciennes (1997):  
Editorial  
Contributions  
mathématiques  
Enquête



Revue de l'Association  
*femmes et mathématiques*

Institut Henri Poincaré  
11 rue Pierre et Marie Curie  
75231 Paris CEDEX 05

*Niki de St Phalle*  
Nana with Golden turt  
1986

Women's art magazine  
Sept/oct 1993

*Eileen Cooper*  
Woman with birds  
1989

L'ouvert  
juin 1994

Women's art magazine  
jan/feb 1992

*Claude Cahun*  
Autoportrait  
1929

L'ouvert

juin 1994

Women's art  
magazine  
sept/oct 1995

## Editorial

Ce supplément au numéro 3 de la revue *femmes & math* est consacré entièrement au compte-rendu du second forum des jeunes mathématiciennes organisé à Paris à l'HP le 31 janvier 1997. Le forum 1997 était couplé avec l'anniversaire des 10 ans de l'Association *femmes & mathématiques*, qui a été marqué notamment par la journée *Des femmes dans les mathématiques contemporaines* consacrée aux travaux de quatre pionnières, Yvonne Choquet-Bruhat, Jacqueline Ferrand, Paulette Libermann et Marie-Hélène Schwartz. Nous publierons le compte-rendu de cette journée ultérieurement.

L'organisation du Forum des jeunes mathématiciennes est motivée par une double conviction : il y a dans notre pays de nombreuses jeunes mathématiciennes talentueuses et enthousiastes, et, paradoxalement, les difficultés rencontrées par les jeunes mathématiciennes à s'insérer dans le milieu mathématique sont toujours là. Les statistiques sont inquiétantes : alors que la proportion actuelle de maîtres de conférences femmes en mathématiques est autour de 25 %, leur taux de recrutement ces dernières années est tombé à environ 17 %, à l'Université comme au CNRS. On risque donc de s'acheminer vers une baisse de la proportion des femmes présentes dans l'enseignement supérieur et la recherche en mathématiques.

Face à ce danger, notre réponse est la suivante : rendre plus visibles et mieux faire connaître les contributions des femmes aux mathématiques, encourager les jeunes mathématiciennes à avoir confiance en elles-mêmes et à se sentir chez elles dans la communauté mathématique.

Ce deuxième forum des jeunes mathématiciennes a répondu à notre attente : une quarantaine de participantes, une vingtaine d'exposés, de nombreux débats, discussions et prises de contact. Jeunesse, fraîcheur, décontraction, amour des mathématiques, plaisir de les comprendre et de les communiquer furent les traits marquants de cette rencontre. Un point faible souligné lors du premier forum a été rectifié : les mathématiciennes plus expérimentées ont été plus nombreuses.

Nous souhaitons remercier les formations doctorales qui ont dans de nombreux cas pris en charge le déplacement des jeunes mathématiciennes pour leur participation au forum.

Merci surtout aux participantes, à celles qui ont exposé puis rédigé et à celles qui les ont écoutées.

*Colette Guillopé, Marie-Françoise Roy*



## Branches continues de solutions pour un système elliptique et algébrique

*Cristelle Barillon*

Nous nous intéressons au système couplé d'équations elliptique et algébrique suivant :

$$F(u_1) - \alpha(u_1 - u_2) = 0, \tag{1}$$

$$\Delta u_2 - \alpha(u_2 - u_1) = 0, \tag{2}$$

modélisant un problème d'explosion thermique dans un milieu hétérogène (voir par exemple [2], [3]). Dans ces équations,  $u_1$  et  $u_2$  sont les températures de deux phases ( $u_2$  phase gazeuse, et  $u_1$  phase particulaire dans laquelle a lieu une réaction exothermique par exemple), la non-linéarité  $F$  caractérise le taux de production de chaleur, et le paramètre positif  $\alpha$  le taux d'échange de chaleur entre les deux phases. On considère ce problème dans un domaine  $\Omega$  borné assez régulier (de classe  $C^{(2+\delta)}$  par exemple, où  $0 < \delta < 1$ ) de  $R^m$ . La condition sur la frontière est la condition de Dirichlet pour  $u_2$  :

$$u_2 |_{\partial\Omega} = 0 \tag{3}$$

La non-linéarité  $F(u)$  est supposée régulière ( $C^{(2+\delta)}$ ) et positive lorsque  $u$  est non-négatif. Le domaine  $\Omega$  est de plus supposé étoilé, c'est-à-dire qu'il existe un point  $x_0$  à l'intérieur de  $\Omega$  tel qu'à partir de  $x_0$ , on peut atteindre chacun des points de  $\bar{\Omega}$  par un seul segment entièrement inclus dans  $\Omega$ . On peut alors introduire une famille de domaines  $\Omega_L$  obtenus par dilatation d'un domaine fixe  $\Omega$ , de telle sorte que si  $L_1 < L_2$  alors  $\Omega_{L_1} \subset \Omega_{L_2}$ .  $L$  représente la taille du domaine considéré.

La question essentielle de la théorie de l'explosion thermique est de trouver des conditions critiques d'existence et de stabilité des solutions qui dépendent des paramètres du problème, et en particulier, de la taille du domaine.

dans [2], [3] ce problème a été étudié pour une dimension d'espace et pour une forme particulière de la non-linéarité  $F(u) = \exp(u)$ . Par ailleurs, on pourra trouver certains résultats sur les systèmes couplés d'équations différentielles et algébriques dans [4] et les références de cet article.

Dans cet exposé, je parlerai des résultats obtenus en collaboration avec Vitaly Volpert, mon directeur de thèse, à l'Université Claude Bernard, Lyon 1. La partie physique a été discutée avec G.M. Makhviladze, University of Central Lancashire. Le premier outil dont nous avons besoin, concerne les bornes des solutions classiques. En effet, si on exprime  $u_2$  en fonction de  $u_1$  et qu'on le substitue dans (2), on obtient un problème qui peut être dégénéré. D'autre part, si l'on exprime  $u_1$  en fonction de  $u_2$ , on obtient une non-linéarité qui peut être multi-variée. Le théorème suivant concerne les bornes et la régularité pour les solutions classiques de (1)-(3).

**Théorème 1** *Supposons que :*

$$F(u_1^0) = \alpha u_1^0, F(u) < \alpha u, u_1^0 < u \leq u_1^*, F'(u_1) < \alpha, u_1^0 \leq u_1 < u_1^*$$

et  $F'(u_1^*) = \alpha$ . Supposons aussi que  $F''(u_1^*) \neq 0$  et que la fonction inverse de  $u_1 - \frac{1}{\alpha}F(u_1)$  est de Hölder dans l'intervalle  $[u_1^0, u_1^*]$ .

Si  $u = (u_1, u_2)$  est une solution du problème (1)-(3) telle que  $u_1$  soit borné presque partout et  $u_2$  appartienne à  $L^2(\Omega)$ , alors on a en fait les bornes suivantes pour  $u_1$  dans  $\bar{\Omega}$  :

$$u_1^0 \leq u_1(x) \leq u_1^*$$

et les résultats de régularité suivants :

$$u_2(x) \in C^{(2+\delta)}(\bar{\Omega}), u_1(x) \in C^{(\delta)}(\bar{\Omega})$$

pour un certain  $\delta > 0$ . De plus, l'ensemble des points de  $\Omega$  où  $u_1(x) = u_1^*$  est de mesure de Hausdorff nulle.

En plus d'une régularité assez forte pour les solutions, la dernière assertion du théorème précise que le problème sera dégénéré au plus sur un ensemble de mesure nulle.

Le second outil dont nous allons avoir besoin est le théorème de comparaison pour les systèmes semi-linéaires paraboliques dégénérés :

**Théorème 2** *On considère le problème suivant :*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\Delta u + \Phi(u) \text{ dans } \Omega, \quad (4)$$

où  $u = (u_1, \dots, u_m)$  et  $a$  est une matrice diagonale constante avec  $a_i = 0, i = 1..k, k < m$  et  $a_i > 0, i = k + 1..m$ . La condition aux limites est celle de Dirichlet pour les  $(m - k - 1)$  dernières composantes de  $u$ . On se donne aussi une condition initiale  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $x \in \Omega$ . On fait les hypothèses suivantes de régularité sur la non-linéarité :  $\Phi$  est de classe  $C^1$  sur  $R$ ,  $\Phi'(u)$  est irréductible pour tout  $u$ , et ses éléments non-diagonaux sont positifs.

On note  $u(x, t, f)$  la solution de ce problème associée à la condition initiale  $f$ . Si  $f_1(x) \geq f_2(x)$  dans  $\Omega$ , alors  $u(x, t, f_1) > u(x, t, f_2)$  dans  $\Omega$  et pour tous temps positifs.

Attachons-nous à présent, à la stabilité des solutions. Pour énoncer le théorème principal sur ce sujet, nous avons d'abord besoin de certaines notations. Considérer le problème (1)-(3) dans un domaine  $\Omega_L$  est équivalent au problème renormalisé dans un domaine fixe  $\Omega$  :

$$F(u_1) - \alpha(u_1 - u_2) = 0 \text{ dans } \Omega \quad (5)$$

$$\Delta u_2 + L^2 F(u_1) = 0 \text{ dans } \Omega \quad (6)$$

$$u_2|_{\partial\Omega} = 0. \quad (7)$$

On notera alors pour  $L$  fixé,  $w_m(L)$  le maximum dans  $\bar{\Omega}$  de la première composante  $w_{L,1}$  d'une solution  $w_L = (w_{L,1}, w_{L,2})$  au problème (5)-(7) (nous n'excluons pas ici la possibilité qu'il puisse y avoir plusieurs solutions). Peut-on alors définir la fonction  $L(w_m)$ ? C'est l'objet du théorème suivant concernant la première branche continue et croissante de solutions :

**Théorème 3** *La fonction  $L(w_m)$  est bien définie (i.e. uni-valuée) et croissante sur un intervalle  $[u_1^0, \bar{u}_1]$  ( $\bar{u}_1 < u_1^*$ ) où  $\bar{u}_1$  est un argument de maximum pour  $L(w_m)$ .*

*De plus, les solutions du problème sur cette branche sont stables.*

L'idée de la preuve repose sur la théorie du degré topologique (voir par exemple [1]). Si l'on désigne par  $A_L$  l'opérateur agissant de  $C^{(s)}(\bar{\Omega}) \times C_0^{(2+\delta)}(\bar{\Omega})$  à valeurs dans  $C^{(\delta)}(\bar{\Omega}) \times C^{(\delta)}(\bar{\Omega})$  qui correspond au premier membre des équations (5)-(7), alors on montre que l'on peut définir le degré topologique pour cet opérateur. Pour  $L = 0$  ce degré est égal à 1; en effet, il existe une unique solution  $w_0 = (u_1^0, 0)$  correspondant à  $L = 0$  dans un certain borné  $G$  de  $C^{(\delta)}(\bar{\Omega}) \times C_0^{(2+\delta)}(\bar{\Omega})$  contenant  $w_0$ . D'une part, grâce à l'invariance par homotopie, ce degré reste constant dans  $G$  pour tout  $L$  fini tel qu'il n'y ait pas de solution au problème sur la frontière de cet ensemble. D'autre part, on peut démontrer qu'il existe une section du plan  $(w_m, L)$  contenant le point  $(u_1^0, 0)$ , telle que le spectre de l'opérateur  $A_L$  linéarisé autour d'une solution dont la première composante n'excède pas un certain  $\tilde{u}_1$ , est entièrement inclus dans le demi-plan gauche. On obtient donc que l'index de chaque solution (i.e. le degré topologique calculé sur un très petit voisinage) correspondant à cette section est égal à 1. Le degré étant la somme des index, on a le premier résultat : l'unicité des solutions qui donne que la courbe  $L(w_m)$  est bien définie dans une section du plan  $(w_m, L)$ . Au passage, on obtient aussi la stabilité de ces solutions. Ensuite, pour montrer que cette branche est croissante, on va se servir du théorème de comparaison.

Supposons alors que nous ne sommes pas sur une branche croissante. Dans ce cas, il existe  $w_{L_1}$ , et  $w_{L_2}$  solutions correspondant respectivement aux domaines  $\Omega_{L_1}$ , et  $\Omega_{L_2}$ , avec  $L_1 < L_2$  et  $w_m(L_1) > w_m(L_2)$ . On décroît continuellement la taille du domaine de  $L_1$  à 0. Il existe alors  $L^*$  tel que  $w_{1,L^*}(x_0) = w_{1,L_2}(x_0)$  en un point  $x_0$  du domaine et  $w_{1,L^*}(x) < w_{1,L_2}(x)$  partout ailleurs. On considère le problème parabolique dans  $\Omega_{L_2}$  associé au problème (1)-(3). On choisit comme condition initiale la fonction  $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$  avec  $f_1(x) = u_1^0$  et  $f_2(x) = 0$  dans  $\Omega_{L_2}/\Omega_{L^*}$ ,  $f_1(x) = w_{1,L^*}(x)$  et  $f_2(x) = w_{2,L^*}(x)$  dans  $\Omega_{L^*}$ . La solution du problème parabolique avec cette condition initiale est strictement croissante en temps et converge vers une solution stationnaire qui est nécessairement  $w_{L_2}$  par l'unicité. On a donc une contradiction avec le théorème de comparaison. Pour finir, on montre que tous les points de la courbe  $L(w_m)$  appartenant à la branche croissante issue de  $(u_1^0, 0)$  correspondent à des solutions asymptotiquement stables. Ceci prouve que l'on atteint bien un maximum local en un certain  $\bar{u}_1$  et achève la démonstration.

## Bibliographie

- [1] *K. Deimling*. Nonlinear Functional Analysis. Springer-Verlag 1985.
- [2] *I.G. Dik, A. Yu. Krainov*. Ignition regims of a gas suspension in a vessel with heated walls. Combustion, Explosion and Shock Wawes, 1984, 20, No. 5, pp 58-61
- [3] *M.A. Gurevich, G.E. Ozerova, A.M. Stepanov*. Ignition limit of a monofractional gas suspension. Combustion, Explosion and Shock Wawes, 1974, 10, No. 1, pp 83-93
- [4] *R.E. O'Malley, L. V. Kalachev*. Regularization of nonlinear differential-algebraic equations. SIAM J. Math. Anal., 1994, 25 No. 2, pp 615-629

Christelle Barillon  
U.M.R. 5585 LAN Université Claude Bernard Lyon 1  
43, bd du 11 Novembre 1918, 69622 Villeurbanne CEDEX  
barillon@iris.univ-lyon1.fr

## Contractions d'algèbre de Lie et torsion de Nijenhuis

*Naïma Bedjaoui*

Les contractions d'algèbres de Lie définies par Inonũ et Wigner [2] ont été généralisées par Saletan [7]. Nous rappelons les définitions, étudions quelques exemples et montrons que, sous la condition "torsion de Nijenhuis nulle", crochet contracté et crochet déformé sont identiques. Enfin, nous nous intéressons à la compatibilité des crochets contracté et initial.

Des contractions de type plus général ont été envisagées par d'autres auteurs récemment, entre autres Rainer [6] en 1995, sous le nom de transition.

**Definition 1** Soit  $S$  un espace vectoriel et  $\mathcal{G}^{(0)} = (S, [ , ])$  une algèbre de Lie d'espace sous-jacent  $S$ . Pour  $\lambda \in [0, 1]$ , on désigne par  $U_\lambda : S \rightarrow S$  une famille continue d'endomorphismes, inversibles si et seulement si  $\lambda \neq 0$ . Si  $\lambda \in ]0, 1]$ , on peut définir une algèbre de Lie  $(S, [ , ]_\lambda)$  isomorphe à  $\mathcal{G}^{(0)}$ , par.

$$\forall x, y \in S, [x, y]_\lambda = U_\lambda^{-1} ([U_\lambda(x), U_\lambda(y)]). \quad (1)$$

Si la limite de  $[x, y]_\lambda$  quand  $\lambda$  tend vers 0 existe, on la note  $[x, y]^{(1)}$ . Muni de  $[ , ]^{(1)}$ ,  $S$  est alors une algèbre de Lie notée  $\mathcal{G}^{(1)}$ , en général non isomorphe à  $\mathcal{G}^{(0)}$  et appelée contraction ou contractée de  $\mathcal{G}^{(0)}$ .

Soit  $\mathcal{G}^{(0)} = sl(2, \mathbb{C})$  muni de la base  $B = \{e_1, e_2, e_3\}$  telle que

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

alors  $[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = -2e_1, [e_2, e_3] = 2e_2$ .

**Exemple 1** On considère la famille d'endomorphismes, pour  $\lambda \in [0, 1]$ ,

$$U_\lambda = \begin{pmatrix} 1 + \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

$$[e_1, e_2]_\lambda = (1 + \lambda)e_3, [e_1, e_3]_\lambda = -2\lambda e_1, [e_2, e_3]_\lambda = 2\lambda e_2,$$

d'où  $[e_1, e_2]^{(1)} = e_3, [e_1, e_3]^{(1)} = 0, [e_2, e_3]^{(1)} = 0$ , et  $\mathcal{G}^{(1)} = (S, [ , ]^{(1)})$  est donc l'algèbre de Heisenberg.

**Exemple 2** Prenons pour famille d'endomorphismes, pour  $\lambda \in [0, 1]$ ,

$$V_\lambda = \begin{pmatrix} 1 + \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

alors

$$[e_1, e_2]_\lambda = \lambda(1 + \lambda)e_3, [e_1, e_3]_\lambda = -2\lambda e_1, [e_2, e_3]_\lambda = 2\lambda e_2$$

$$[e_1, e_2]^{(1)} = [e_1, e_3]^{(1)} = [e_2, e_3]^{(1)} = 0$$

L'algèbre contractée  $\mathcal{G}^{(1)}$  est commutative.

**Exemple 3** Prenons enfin la famine, pour  $\lambda \in [0, 1]$ ,

$$W_\lambda = \begin{pmatrix} 1 + \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$[e_1, e_2]_\lambda = \frac{1 + \lambda}{\lambda} e_3$$

et  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} [e_1, e_2]_\lambda$  n'existe pas. Dans ce cas, la contraction de  $\mathcal{G}^{(0)}$  n'existe pas.

Remarquons que dans les trois cas, la limite de la famille d'endomorphismes quand  $\lambda$  tend vers 0 est la même, ce qui montre que l'existence de la contraction ainsi que l'algèbre contractée (si elle existe) dépendent de la famille  $U_\lambda$  d'endomorphismes choisie et pas seulement de  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} U_\lambda$ .

**Definition 2** Nous appellerons contractions de Saletan [7], les contractions correspondant aux endomorphismes  $U_\lambda$  qui s'écrivent  $U_\lambda = \lambda I + u$  où  $u$  est un endomorphisme de  $S$  singulier. Si le crochet contracté  $[\cdot, \cdot]^{(1)}$  existe, on dit alors que  $u$  contracte  $\mathcal{G}^{(0)}$  et que  $[\cdot, \cdot]^{(1)}$  est le crochet contracté de  $[\cdot, \cdot]$  par  $u$ .

**Proposition** Pour tout endomorphisme  $u$  de  $S$ , il existe un entier naturel non nul  $q$ , appelé indice de Riesz ou indice de longueur de chaîne, tel que :

$$\begin{aligned} S \supset \text{Im } u \supset \text{Im } u^2 \supset \dots \supset \text{Im } u^q = \text{Im } u^{q+1} = \dots \\ 0 \subset \text{Ker } u \subset \text{Ker } u^2 \subset \dots \subset \text{Ker } u^q = \text{Ker } u^{q+1} = \dots \end{aligned}$$

**Remarque** Le cas étudié par Inönü et Wigner dans [2] est celui où  $U_\lambda = \lambda I + u$ , et  $u$  est d'indice de Riesz  $q = 1$ .

On pose alors  $\text{Im } u^q = S_R$ ,  $\text{Ker } u^q = S_N$  et l'on a la décomposition de Fitting [1] [5]  $S = S_R \oplus S_N$ . Pour tout  $x \in S$ , on désigne par  $x_R$  la projection de  $x$  sur  $S_R$  et par  $x_N$  la projection de  $x$  sur  $S_N$ . Nous nous proposons de montrer, par une méthode qui évite les calculs assez complexes de [7], le théorème suivant.

**Théorème 1** Une condition nécessaire et suffisante pour que le crochet contracté  $[\cdot, \cdot]^{(1)}$  existe est

$$\forall x, y \in S, u^2[x, y]_N - u[ux, y]_N - u[x, uy]_N + [ux, uy]_N = 0 \quad (2)$$

Sous cette condition, l'expression de  $[\cdot, \cdot]^{(1)}$  est donnée par

$$\forall x, y \in S, [x, y]^{(1)} = u^{-1}[ux, uy]_R - u[x, y]_N + [ux, y]_N + [x, uy]_N \quad (3)$$

Démonstration. Nous introduisons la torsion de Nijenhuis de  $u, T(u) : S \times S \rightarrow S$  définie sur  $(S, [ \ , \ ])$  par :  $T(u)(x, y) = [ux, uy] - u[ux, y] - u[x, uy] + u^2[x, y]$ .

Remarquons tout d'abord que,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in S$ ,

$$T(u)(x, y) = [(\lambda I + u)x, (\lambda I + u)y] - (\lambda I + u)(\lambda[x, y] + [ux, y] + [x, uy] - u[x, y]) \quad (4)$$

ce qui implique, lorsque  $\lambda I + u$  est inversible,

$$(\lambda I + u)^{-1}[(\lambda I + u)x, (\lambda I + u)y] = \lambda[x, y] + [ux, y] + [x, uy] - u[x, y] + (\lambda I + u)^{-1}(T(u)(x, y)). \quad (5)$$

La démonstration utilise le lemme suivant.

**Lemme.** *Pour tout  $x \in S$ , la projection de l'image par  $u$  de  $x$  sur  $S_N$  (resp.  $S_R$ ) est égale à l'image par  $u$  de la projection de  $x$  sur  $S_N$  (resp.  $S_R$ ), c'est-à-dire*

$$\forall x \in S, u(x_N) = (u(x))_N \text{ et } u(x_R) = (u(x))_R$$

Pour la famille  $U_\lambda = \lambda I + u$ , la contraction existe si et seulement si :

$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (\lambda I + u)^{-1}[(\lambda I + u)x, (\lambda I + u)y]$  existe. D'après (5), cette limite existe si et seulement si :  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (\lambda I + u)^{-1}(T(u)(x, y))$  existe.

D'après le lemme, cette condition est équivalente à la relation (2). D'autre part, d'après la définition et la relation (5),

$$\forall x, y \in S, [x, y]^{(1)} = [ux, y] + [x, uy] - u[x, y] + u^{-1}(T(u)(x, y))_R \quad (6)$$

car  $T(u)(x, y) \in S_R$ . D'après la relation (4),

$$\begin{aligned} [x, y]^{(1)} &= [ux, y] + [x, uy] - u[x, y] + u^{-1}([ux, uy]_R - u[ux, y]_R - u[x, uy]_R + u^2[x, y]_R) \\ &= [ux, y] + [x, uy] - u[x, y] + u^{-1}[ux, uy]_R - [ux, y]_R - [x, uy]_R + u[x, y]_R \\ &= [ux, y]_N + [x, uy]_N - u[x, y]_N + u^{-1}[ux, uy]_R \end{aligned}$$

ce qui démontre la relation (3).

**Definition 3**  $(S, [ \ , \ ])$  étant une algèbre de Lie et  $u$  un endomorphisme de  $S$ , on note  $[ \ , \ ]^u$  le crochet défini par  $\forall x, y \in S, [x, y]^u = [ux, y] + [x, uy] - u[x, y]$  appelé, par abus de langage, crochet déformé de  $[ \ , \ ]$  par  $u$  [5].

L'équation (3) montre que crochet contracté et crochet déformé ont même projection sur  $S_N$ . En effet,

$$\begin{aligned} \forall x, y \in S, [x, y]_N^{(1)} &= [ux, y]_N + [x, uy]_N - u[x, y]_N \\ &= ([ux, y] + [x, uy] - u[x, y])_N = ([x, y]^u)_N \end{aligned}$$

De plus, l'équation (6), expression du crochet contracté en fonction de la torsion de Nijenhuis, montre de façon triviale que sous la condition  $T(u) = 0$ , condition suffisante pour l'existence des crochets déformé et contracté, on a  $\forall x, y \in S, [x, y]^{(1)} = [x, y]^u$ .

Le crochet initial  $[, ]$  et le crochet contracté  $[, ]^{(1)}$  sont-ils compatibles, c'est-à-dire leur somme est-elle aussi un crochet de Lie ?

Pour tous  $x, y$  éléments de  $S$ , et tout  $t$  élément de  $\mathbb{R}$ , on pose :  $[x, y]_{(t)} = [x, y] + t[x, y]^{(1)}$

$$\begin{aligned} & [x, [y, z]_{(t)}]_{(t)} + [z, [x, y]_{(t)}]_{(t)} + [y, [z, x]_{(t)}]_{(t)} \\ &= t ([x, u^{-1}T(u)(y, z)] + [z, u^{-1}T(u)(x, y)] + [y, u^{-1}T(u)(z, x)] \\ &+ u^{-1}(T(u)(x, [y, z])) + u^{-1}(T(u)(z, [x, y])) + u^{-1}(T(u)(y, [z, x]))) \end{aligned}$$

Cette égalité montre que sous la condition  $T(u) = 0$ , l'identité de Jacobi est vérifiée pour  $[, ]_{(t)}$ , donc  $[, ]$  et  $[, ]^{(1)}$  sont compatibles. On retrouve le résultat énoncé dans [3], selon lequel crochet initial et crochet déformé sont compatibles car sous la condition  $T(u) = 0$ , crochet contracté et crochet déformé sont égaux.

D'une manière plus générale, nous montrons le

**Théorème 2** *Sous la condition nécessaire et suffisante de contractibilité, crochet contracté et crochet déformé sont compatibles si et seulement si  $u^{-1}T(u)$  est un cocycle de l'algèbre de Lie  $(S, [, ])$ .*

## Bibliographie

- [1] *H. G. Heuser* Functional Analysis, Wiley, (1982).
- [2] *E. Inönü, E.P. Wigner* On the contraction of groups and their representations, Proc. Natl.Acad. Sci. U. S. 39, (1953) 510–524.
- [3] *Y. Kosmann-Schwarzbach, F. Magri* Poisson-Nijenhuis structures, Ann. Inst. H. Poincaré, 53, No 1, 1990, 35-81.
- [4] *A. Nijenhuis, W. Richardson Jr.* Deformations of Lie algebras structures, J. Math. and Mech., 17, No. 1, 1967, 89-105.
- [5] *M. Postnikov* Leçons de géométrie. Groupes et algèbres de Lie, Mir. Moscou, 1985.
- [6] *M. Rainer* Topological classifying spaces of Lie algebras and the natural completion of contractions, Algebras, groups and geometry, 12, No. 4, 1995, 353-401.
- [7] *E. J. Saletan* Contraction of Lie groups, J. Math. Phys. 2, (1961)1-21.

*Naïma Bedjaoui*

Département de mathématiques U.R.A - C.N.R.S (751)  
Faculté des Sciences rue Jean Souvraz S.P 18 62307 Lens

## Polynômes de Bernstein génériques et relatifs associés à une application analytique

*Hétène Biosca*

Cet exposé aborde essentiellement les deux thèmes suivants :

- les Singularités (et plus précisément la théorie de l'équisingularité, via la constance d'invariants topologiques associés à une déformation) ;
- les  $\mathcal{D}$ -modules (notamment par la connaissance de variétés caractéristiques).

Nous nous proposons de relier ces deux sujets, à l'aide de la notion de polynôme de Bernstein associé à une déformation. Ce concept a été introduit en 1972 par I.N. Bernstein afin de prolonger certaines *distributions*. Rappelons-en sa définition.

On appelle *polynôme de Bernstein* associé à la fonction analytique  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  le polynôme unitaire minimal non nul  $b(s) \in \mathbb{C}[s]$  réalisant une équation fonctionnelle du type  $b(s)F^s \in \mathcal{D}[s]F^{s+1}$ , où  $\mathcal{D}$  est l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients analytiques et où  $F^s$  désigne la puissance (formelle)  $s$ -ième de  $F$ .

L'existence d'un tel polynôme a été établie par Bernstein et Kashiwara, puis Malgrange ([10]) et Kashiwara ([5]) lui ont donné ses "lettres de noblesse" dans la théorie des singularités, établissant un lien très étroit entre les racines de  $b(s)$  et les valeurs propres de la monodromie agissant sur les groupes de cohomologie de la fibre de Milnor.

Par la suite, l'existence des polynômes de Bernstein a été généralisée au cadre d'une application analytique  $(F_1, \dots, F_p) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$ , i.e. il existe  $B(s_1, \dots, s_p) \in \mathbb{C}[s_1, \dots, s_p] \setminus \{0\}$  tel que

$$B(\underline{s})F_1^{s_1} \dots F_p^{s_p} \in \mathcal{D}[\underline{s}]F_1^{s_1+1} \dots F_p^{s_p+1}, \quad (\underline{s} = (s_1, \dots, s_p))$$

Dans [9], C. Sabbah décrit de plus le lieu des zéros d'un tel polynôme et en donne une interprétation géométrique.

Là-encore, ce concept se révèle intéressant, tant dans la théorie des distributions (*cf.* le comportement asymptotique de certaines intégrales oscillantes, [1]), que dans la théorie des singularités (*cf.* les cycles évanescents itérés, [9]).

Il est naturel de considérer une *version relative* de ces polynômes. Introduisons tout d'abord quelques notations. Soient  $X$  (resp.  $Y$ ) un voisinage de 0 dans  $\mathbb{C}^n$  (resp.  $\mathbb{C}^k$ ) et  $\pi : X \times Y \rightarrow Y$  la projection canonique. On notera  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, \dots, y_k)$  les coordonnées sur  $X$  et  $Y$ , puis  $\frac{d}{dx} = (\frac{d}{dx_1}, \dots, \frac{d}{dx_n})$  et  $\frac{d}{dy} = (\frac{d}{dy_1}, \dots, \frac{d}{dy_k})$  les dérivations correspondantes. On considère  $(F_1, \dots, F_p)$  une application analytique sur  $X \times Y$ , *déformation* à  $k$  paramètres de l'application  $(f_1, \dots, f_p)$  définie sur  $X$ , au sens " $F_j(x, 0) = f_j(x)$ ".

**Définition.** Un polynôme de Bernstein relatif (à  $\pi$ ) associé à la déformation  $(F_1, \dots, F_p)$  est un élément  $B_{rel}(\underline{s}) \in \mathbb{C}[\underline{s}] \setminus \{0\}$  tel que

$$B_{rel}(\underline{s})F_1^{s_1} \cdots F_p^{s_p} \in \mathcal{D}_{rel}[\underline{s}]F_1^{s_1+1} \cdots F_p^{s_p+1}$$

où  $\mathcal{D}_{rel}$  est le sous-anneau de  $\mathcal{D}$  constitué des opérateurs différentiels indépendants des dérivations par rapport aux paramètres  $y$ , i.e.  $\mathcal{D}_{rel} = \mathbb{C}\{x, y\} \langle \frac{d}{dx} \rangle$ .

Un polynôme de Bernstein générique associé à  $(F_1, \dots, F_p)$  est un élément  $B_{gen}(\underline{s}) \in \mathbb{C}[\underline{s}] \setminus \{0\}$  pour lequel il existe  $h \in \mathbb{C}\{y\} \setminus \{0\}$  tel que

$$h(y)B_{gen}(\underline{s})F_1^{s_1} \cdots F_p^{s_p} \in \mathcal{D}_{rel}[\underline{s}]F_1^{s_1+1} \cdots F_p^{s_p+1}.$$

Si l'existence des polynômes de Bernstein (absolus) est, comme on l'a rappelé, toujours assurée, la situation est tout autre pour les polynômes de Bernstein relatifs et génériques, ce qui nécessite d'introduire des hypothèses sur la déformation  $(F_1, \dots, F_p)$ . Pour  $p = 1$ , un certain nombre de résultats dans cette direction ont été établis dans [6] et [7] : notamment l'existence du polynôme de Bernstein relatif de  $F$  a été caractérisée à l'aide d'une condition géométrique (dite de "non-caractéristicité") portant sur  $W_F$ , le conormal relatif de  $F$ , ou en termes de constance du nombre de Milnor  $\mu$  si  $F$  est une déformation d'hypersurfaces à singularité isolée. Notre but est d'étudier cette version relative des polynômes de Bernstein dans le cadre général  $p \geq 1$  (cf. [3], [4]).

Les méthodes employées relèvent à la fois de la théorie des  $\mathcal{D}$ -modules et de celle de l'équisingularité : concernant les  $\mathcal{D}$ -modules, la pierre angulaire est la connaissance de la variété caractéristique du  $\mathcal{D}[\underline{s}]$ -module  $\mathcal{D}[\underline{s}]F_1^{s_1} \cdots F_p^{s_p}$ , laquelle coïncide ([5]) avec le sous-espace analytique de  $T^*(X \times Y) \times \mathbb{C}^p$  égal à

$$W_{(F_1, \dots, F_p)}^\# = \overline{\left\{ (x, y, \sum_{l=1}^p \lambda_l dF_l, \lambda_1 F_1, \dots, \lambda_p F_p t), (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{C}^p \right\}}$$

Concernant l'équisingularité, on utilise la caractérisation par les relations de dépendance intégrale de la constance du nombre de Milnor  $\mu$  ou de celle, plus forte, de la suite  $\mu^*$  formée des nombres de Milnor de toutes les sections planes génériques (cf. [12], [13]). Nous montrons alors :

**Théorème 1** Soit  $(f_1, \dots, f_p) : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  un germe analytique définissant une intersection complète à singularité isolée et soit une déformation analytique  $(F_1, \dots, F_p) : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ .

S'il existe un ouvert de Zariski dense de l'espace des  $(n-p)$ -uplets de formes linéaires définies sur  $\pi^{-1}(0)$  tel que  $\forall (l_1, \dots, l_{n-p})$  dans cet ouvert, l'application  $(F_1, \dots, F_p, l_1, \dots, l_{n-p})$  admet un polynôme de Bernstein relatif, alors la déformation  $(F_1, \dots, F_p)$  est à  $\mu^*$ -constant le long de la courbe lisse  $\{0\} \times \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ .

Pour  $p = 1$ , nous obtenons une entière caractérisation de la constance de  $\mu^*$  en termes d'existence de polynômes de Bernstein relatifs, mais aussi en termes de “non-caractéristicité” :

**Proposition 1** *Soit  $F : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  une déformation analytique d'un germe d'hypersurface à singularité isolée. Il y a équivalence entre :*

(1) *L'hypersurface  $\pi^{-1}(0)$  est non caractéristique pour l'espace  $W_{(F, x_1, \dots, x_{n-1})}^\#$ , pour  $n - 1$  formes linéaires génériques  $(x_1, \dots, x_{n-1})$  définies sur  $\pi^{-1}(0)$ .*

(2) *L'application  $(F, x_1, \dots, x_{n-1})$  admet un polynôme de Bernstein relatif, pour  $n - 1$  formes linéaires génériques  $(x_1, \dots, x_{n-1})$  définies sur  $\pi^{-1}(0)$ .*

(3) *La déformation  $F$  est à  $\mu^*$ -constant le long de  $\{0\} \times \mathbb{C}$ .*

La condition (1) stipule, par définition, que

$$W_{(F, x_1, \dots, x_{n-1})}^\# \cap \left( T_{\pi^{-1}(0)}^*(X \times Y) \times \{0_{\mathbb{C}^n}\} \right) \subset T_{(X \times Y)}^*(X \times Y) \times \{0_{\mathbb{C}^n}\},$$

ce qui revient à “écarter une direction” dans  $W_{(F, x_1, \dots, x_{n-1})}^\#$ .

Dans le cas particulier de deux variables, mais sans hypothèse de singularité isolée, nous obtenons le résultat suivant :

**Proposition 2** *Les propriétés suivantes sont équivalentes ( $n = 2$  et  $k = 1$ ) :*

(1) *L'hypersurface  $\pi^{-1}(0)$  est non caractéristique pour  $W_{(F_1, \dots, F_p)}^\#$ .*

(2) *L'application  $(F_1, \dots, F_p)$  admet un polynôme de Bernstein relatif.*

(S) *L'application  $(F_1, \dots, F_p)$  est une déformation équisingulière de  $(f_1, \dots, f_p)$  le long d'une section de la projection  $\pi$ .*

La condition (3) signifie, par définition, que la fonction réduite sous-jacente à  $F_1 \cdots F_p$  est une déformation équisingulière de la fonction réduite sous-jacente à  $f_1 \cdots f_p$ , où la dernière notion d'équisingularité est “canonique” (car  $n = 2$ ) : c'est “au choix” la constance du nombre de Milnor, la constance de  $\mu^*$ , ou l'existence d'une résolution simultanée forte des singularités de la déformation ([13]).

Enfin, voici un théorème d'existence concernant les polynômes de Bernstein génériques ([2]) :

**Théorème 2** *Soit  $(F_1, \dots, F_p)$  une déformation analytique à  $k$  paramètres de  $(f_1, \dots, f_p)$ . Elle admet un polynôme de Bernstein générique dans les trois situations suivantes :*

(1) *Un paramètre i.e.  $k = 1$ .*

(2) *Singularité isolée : on suppose que toutes les sous-familles d'applications de  $(f_1, \dots, f_p)$  définissent des intersections complètes à singularité isolée.*

(2) *Cadre (semi)-polynomial ; on suppose que  $F_l \in \mathbb{C}\{y\}[x]$  pour  $l = 1 \dots p$ .*

La propriété (1), resp. (2), généralise un résultat de [2], resp. [6], qui concerne le cas  $p = 1$ .

## Bibliographie

- [1] *A. Bartet, H.M. Maire* Asymptotique des intégrales-fibres, Ann. Inst. Fourier 43, No.5, p. 1267-1299, 1993.
- [2] *H. Biosca*, Sur l'existence de polynômes de Bernstein génériques, C.R.A.S. Paris, tome 322, série I, p. 659-662, 1996.
- [3] *H. Biosca*, Caractérisation de l'existence de polynômes de Bernstein relatifs associés à une famille d'applications analytiques, C.R.A.S. Paris, tome 325, série I, p. 395-398, 1997.
- [4] *H. Biosca*, Polynômes de Bernstein génériques et relatifs associés à une application analytique, Thèse de doctorat, Nice, Novembre 1996.
- [5] *H. Biosca, J. Briançon, Ph. Maisonobe, H. Maynadier*, Modules différentiels et espaces conormaux associés à un morphisme, prépub. n° 451 de l'Université de Nice, Mars 1996.
- [6] *J. Briançon, F. Geandier, Ph. Maisonobe*, Déformation d'une singularité isolée d'hypersurface et polynôme de Bernstein, B.S.M.F., 120, p. 15-49, 1992.
- [7] *J. Briançon, Y. Laurent, Ph. Maisonobe*, Sur les modules différentiels holonomes réguliers, cohérents relativement à une projection, C.R.A.S. Paris, 313, série 1, p. 285-288, 1991.
- [8] *F. Geandier* : Déformations à nombre de Milnor constant : quelques résultats sur les polynômes de Bernstein, Compositio Math., 77, p. 131-163, 1991.
- [9] *M. Kashiwara*, On the holonomic systems of linear differential equations, Invent. Math., 49, 1978.
- [10] *B. Malgrange*, Polynômes de Bernstein-Sato et cohomologie évanescence, Astérisque 101-102, p. 233-267, 1983.
- [11] *C. Sabbah*, Proximité évanescence II, Equations différentielles pour plusieurs fonctions analytiques, Compositio Math., 64, p. 213-241, 1987.
- [12] *B. Teissier*, Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney, in Singularités à Cargèse, Astérisque 7-8, p. 285-362, 1973.
- [13] *B. Teissier*, Résolution simultanée I et II, Séminaire sur les singularités des surfaces, Ecole polytechnique, 1976.

*Hélène Biosca*  
University de Nice-Sophia Antipolis  
Laboratoire J.A. Dieudonné, Parc Valrose, 06108 Nice, CEDEX 2  
biosca@hera.unice.fr

## Calcul fonctionnel harmonique dans une $\star$ -a.l.m.c complète et dans une $\star$ -a.b.m.c complète

*Lamiâa Bourass*

### Introduction

Considérons une algèbre de Banach  $\mathcal{A}$  munie d'une involution continue. On cherche à donner un sens à  $f(x)$  où  $x$  est un élément de  $\mathcal{A}$  et  $f$  une fonction harmonique sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{C}$  contenant le spectre  $Sp_{\mathcal{A}}x$  à valeurs dans  $\mathcal{A}$ . Dans [1], A. El Kinani a défini un calcul fonctionnel harmonique en proposant la définition suivante :

**Définition 1** Soient  $\mathcal{A}$  une algèbre de Banach unitaire involutive,  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ ,  $z_0 \in \Omega$  tels que  $\mathbb{D}(z_0, R) \subset \Omega$ , ( $R > 0$ ) . Soit  $x$  un élément de  $\mathcal{A}$  avec  $Sp_{\mathcal{A}}x \subset \mathbb{D}(z_0, R)$  . Pour tout  $f$  dans  $h(\Omega, \mathcal{A})$ , l'élément  $f(x)$  est donné par la formule intégrale de Poisson :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z-z_0|=R} f(z) \Re [(z+x-2z_0)(z-x)^{-1}] \frac{|dz|}{R}$$

( $h(\Omega, \mathcal{A})$  désigne l'espace des fonctions harmoniques sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathcal{A}$ ).

Cette définition s'étend à des classes d'algèbres plus générales, notamment les limites inductives d'algèbres de Banach involutives (algèbres bornologiques localement multiplicativement convexes complètes involutives au sens de [5], en abrégé  $\star$ -a.b.m.c. complètes) et les limites projectives d'algèbres de Banach involutives (algèbres localement multiplicativement convexes complètes involutives au sens de [6], en abrégé  $\star$ -a.l.m.c. complètes). Nous obtenons les résultats suivants :

### Calcul fonctionnel harmonique dans une $\star$ -a.b.m.c. complète

Soit  $\mathcal{A}$  une  $\star$ -a.b.m.c. complète, on écrit  $\mathcal{A} = \lim_{\rightarrow} (A_i, I_{ji}, I)$  où  $(A_i)_{i \in I}$  est système inductif filtrant croissant d'algèbres de Banach involutives unitaires et  $I_{ji}$  est l'injection canonique involutive définie de  $A_i$  dans  $A_j$  quand  $i \geq j$ . Soit  $\tilde{I}_{ji}$  l'injection canonique de  $h(\Omega, A_i)$  dans  $h(\Omega, A_j)$  . Le système  $(h(\Omega, A_i), \tilde{I}_{ji}, I)$  est inductif ; on définit alors l'espace des fonctions harmoniques sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathcal{A}$ , noté  $h(\Omega, \mathcal{A})$  , la limite inductive algébrique et bornologique des espaces  $h(\Omega, A_i)$ .

**Théorème 1** Soient  $\mathcal{A}$  une  $\star$ -a.b.m.c. unitaire et complète et  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ . Il existe une unique application  $x \rightarrow \Phi_x$  et une seule qui associe à tout élément  $x$  de  $\mathcal{A}$ , dont le spectre est contenu dans  $\Omega$ , un morphisme unitaire borné  $\Phi_x$  de  $h(\Omega, \mathcal{A})$  dans  $\mathcal{A}$  défini par :

$$\Phi_x : h(\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$$

$$f \longmapsto f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z-z_0|=R} f(z) \Re [(z+x-2z_0)(z-x)^{-1}] \frac{|dz|}{R}$$

**Le “spectral mapping theorem”**

**Definition 2** Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre munie d’une involution  $\star$ . On dit que  $\mathcal{A}$  est hermitienne si  $Sp_{\mathcal{A}}h \subset \mathbb{R}, \forall h \in H(\mathcal{A})$  ( $H(\mathcal{A}) = \{h \in \mathcal{A} : h^{\star} = h\}$ ).

Pour les éléments normaux (un élément  $x$  est dit normal si  $xx^{\star} = x^{\star}x$ ) d’une algèbre bornologique stellaire non commutative, le “spectral mapping theorem” est vrai pour les fonctions harmoniques car ces dernières sont continues [5]. Il est aussi vrai pour les éléments normaux d’une  $\star$ -a.b.m.c. complète et hermitienne et on a la proposition suivante :

**Proposition 1** Soient  $\mathcal{A}$  une  $\star$ -a.b.m.c. unitaire complète et hermitienne,  $z_0 \in \Omega$  tel que  $\overline{\mathbb{D}(z_0, R)} \subset \Omega, x$  un élément normal dont le spectre est contenu dans  $\mathbb{D}(z_0, R)$  et  $f \in h(\Omega)$ . Alors  $Sp_{\mathcal{A}} f(x) = f(Sp_{\mathcal{A}} x)$ .

**Extensions des résultats de Ky Fan [3]**

Dans la suite,  $|\cdot|$  désigne la fonction de Ptàk définie par  $|x| = \rho_{\mathcal{A}}(xx^{\star})^{\frac{1}{2}}, \forall x \in \mathcal{A}$  où  $p_{\mathcal{A}}(x)$  est le rayon spectral de  $x$ . On s’intéressera aux classes des fonctions suivantes :

$$B(\mathbb{D}) = \{f \in H(\mathbb{D}), |f(z)| < 1, \forall z \in \mathbb{D}\}$$

$$P(\mathbb{D}) = \{g \in H(\mathbb{D}), \Re g(z) > 0, \forall z \in \mathbb{D}\}$$

où  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ .

**Proposition 2**(Analogue du théorème de Ky Fan) Soient  $\mathcal{A}$  une  $\star$ -a.b.m.c. unitaire complète et hermitienne,  $x \in \mathcal{A}$  tel que  $|x| < 1$ . Alors on a les deux assertions suivantes :

1.  $\forall f \in B(\mathbb{D}), |f(x)| < 1$ .
2.  $\forall g \in P(\mathbb{D}), \Re g(x) > 0$ .

**Proposition 3** (Analogue du théorème de Von Neumann) Soient  $\mathcal{A}$  une  $\star$ -a.b.m.c. unitaire complète et hermitienne,  $x$  un élément de  $\mathcal{A}$  tel que  $|x| \leq 1, f$  une fonction holomorphe au voisinage du disque unité fermé  $\overline{\mathbb{D}}$ . Si  $|f(z)| \leq 1$  pour tout  $z \in \overline{\mathbb{D}}$  alors  $|f(x)| \leq 1$ .

**Proposition 4** (Analogue du lemme de Schwarz) Soient  $\mathcal{A}$  une  $\star$ -a.b.m.c. unitaire complète et hermitienne,  $x$  un élément de  $\mathcal{A}$  tel que  $|x| < 1$ . Soient  $f, g$  et  $h$  dans  $H(\mathbb{D})$  tels que  $f = g.h$  avec  $|h(z)| \leq 1, \forall z \in \mathbb{D}$ . Alors

$$g(x)^{\star}g(x) \geq f(x)^{\star}f(x) \tag{1}$$

$$|g(x)| \geq |f(x)| \tag{2}$$

Dans (1) l’inégalité est stricte, si et seulement si,  $g(x)^{\star}g(x) > 0$  et  $h$  n’est pas une constante. L’inégalité (2) devient une égalité, si et seulement si, soit  $g(x) \in \text{Rad}(\mathcal{A})$ , soit  $g(x)$  est une constante.

On remarque que la première assertion de l’extension du théorème de Ky Fan est un cas particulier du lemme de Schwarz, c’est-à-dire, le cas où  $g$  est égal à 1.

### Calcul fonctionnel harmonique dans une $\star$ -a.l.m.c. complète

Soit  $\mathcal{A}$  une  $\star$ -a.l.m.c. unitaire complète, en utilisant les notations et la décomposition de A. E. Michael dans [6], on écrit  $\mathcal{A} = \lim_{\leftarrow} (A_i, \overline{\Pi}_{ij}, I)$  où  $\overline{\Pi}_{ij}$  et  $\overline{\Pi}_i$  sont respectivement les morphismes de transitions de  $\mathcal{A}$  dans  $A_i$  et de  $A_j$  dans  $A_i$  quand  $j \geq i$ . Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $f$  une fonction de deux variables réelles  $x$  et  $y$ . On dit que  $f$  est harmonique si elle est deux fois continûment différentiable et satisfait à la condition suivante :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\delta x^2} + \frac{\partial^2 f}{\delta y^2} = 0.$$

On désigne par  $h(\Omega, \mathcal{A})$  l'ensemble des fonctions harmoniques sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathcal{A}$ . Il est clair que  $h(\Omega, \mathcal{A})$  muni des opérations habituelles est un espace vectoriel complexe. Soient  $\overline{\Pi}_i$  et  $\overline{\Pi}_{ij}$  respectivement les morphismes canoniques de  $h(\Omega, \mathcal{A})$  dans  $h(\Omega, A_i)$  et de  $h(\Omega, A_j)$  dans  $h(\Omega, A_i)$  quand  $j \geq i$ . Le système  $(h(\Omega, A_i), \overline{\Pi}_{ij}, I)$  est un système projectif ayant pour limite  $h(\Omega, \mathcal{A})$ . On munit l'espace  $h(\Omega, \mathcal{A})$  de la topologie limite projective.

**Définition 2** Soient  $\mathcal{A}$  une  $\star$ -a.l.m.c. unitaire complète,  $z_0 \in \Omega$  et  $R > 0$  tels que  $\mathbb{D}(z_0, R)$  soit contenue dans  $\Omega$ . Soit  $x$  dans  $\mathcal{A}$  dont le spectre  $Sp_{\mathcal{A}} x$  est contenu dans  $\mathbb{D}(z_0, R)$ . Nous noterons, si  $f \in h(\Omega, \mathcal{A})$ ,  $f(x)$  l'élément de  $\mathcal{A}$  donné par :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z-z_0|=R} f(z) \Re [(z+x-2z_0)(z-x)^{-1}] \frac{|dz|}{R}$$

**Proposition 5** Soient  $\mathcal{A}$  une  $\star$ -a.l.m.c. unitaire complète et hermitienne,  $x$  un élément normal de  $\mathcal{A}$  dont le spectre est contenu dans  $\mathbb{D}(z_0, R)$  et  $f$  dans  $h(\Omega)$ . Alors  $f(Sp_{\mathcal{A}} x) = Sp_{\mathcal{A}} f(x)$ .

En utilisant le calcul fonctionnel harmonique défini précédemment, on montre que les  $\mathbb{Q}$ -algèbres localement multiplicativement convexes unitaires involutives (en abrégé  $\mathbb{Q}$ - $\star$ -a.l.m.c) hermitiennes et complètes constituent un cadre général pour les résultats de Ky Fan énoncés dans [3].

**Proposition 6** (Analogie du théorème de Ky Fan) Soient  $\mathcal{A}$  une  $\mathbb{Q}$ - $\star$ -a.l.m.c. unitaire complète et hermitienne;  $x$  un élément de  $\mathcal{A}$  tel que  $|x| < 1$ . Alors on a les deux assertions suivantes :

1.  $\forall f \in B(\mathbb{D}), |f(x)| < 1$ .
2.  $\forall g \in P(\mathbb{D}), \Re g(x) > 0$ .

**Proposition 7** (Analogie du théorème de Von Neumann) Soient  $\mathcal{A}$  une  $\mathbb{Q}$ - $\star$ -a.l.m.c. unitaire complète et hermitienne,  $x$  un élément de  $\mathcal{A}$  tel que  $|x| \leq 1$  et  $f$  une fonction holomorphe au voisinage du disque unité fermé  $\overline{\mathbb{D}}$ . Si  $|f(z)| \leq 1$  pour tout  $z \in \overline{\mathbb{D}}$  alors  $|f(x)| \leq 1$ .

**Proposition 8** (Analogie du lemme de Schwarz)

Soient  $\mathcal{A}$  une  $\mathbb{Q}$ - $\star$ -a.l.m.c. unitaire complète et hermitienne,  $x$  un élément de  $\mathcal{A}$  tel que  $|x| < 1$ . Soient  $f, g$  et  $h$  dans  $H(\mathbb{D})$  tels que  $f = g.h$  avec  $|h(z)| \leq 1, \forall z \in \mathbb{D}$ . Alors :

$$g(x)^*g(x) \geq f(x)^*f(x) \quad (1)$$

$$|g(x)| \geq |f(x)| \quad (2)$$

Dans (1), l'inégalité est stricte si et seulement si  $g(x)^*g(x) > 0$  et  $h$  n'est pas une constante. L'inégalité (2) devient une égalité si et seulement si  $g(x) \in \text{Rad}(\mathcal{A})$  où  $g$  est une constante.

## Bibliographie

- [1] *M. Akkar, A. Elkinani, M. Oudadess.* Calculs fonctionnels harmonique et analytique réel. J. Aan. Math. Quebec, 12 :151-169, 1988.
- [2] *M. Akkar* Theorèmes de structures de certaines algèbres topologiques ou bornologiques et applications. C. R. A.-S. Paris, série A, 285 :549-552, 1977.
- [3] *Ky Fan.* Analytic functions of proper contraction, Math. Zeitschrift, 160 :275-290, 1978.
- [4] *M. M Fragoulopoulo* Symmetric topological algebras applications, Schriftenreihe des Mathematischen Instituts und des Graduiertenkollegs der Universität Münster, Mai 1993.
- [5] *H. Hogbe-Nlend.* Les fondements de la theorie spectrale des algèbres bornologiques. Bol. Soc. Brasil. Math., 3 :19-56, 1972.
- [6] *E. A. Michael.* Locally multiplicatively convex topological algebras, Mem. of the Amer. Math. Soc., 1952.
- [7] *V. Ptak.* On the spectral radius in Banach algebras with involution. Bull. London. Math. Soc., 2 :327-334, 1970.

*Lamiâa Bourass*

Université de Bordeaux 1 U.F.R. de Mathématiques  
351, cours de la libération 33405 Talence cedex.  
bourass@math.u-bordeaux.fr

## Sur un problème mathématique en mécanique des fluides

*Renata Bunoiu*

Ce travail porte sur les méthodes mathématiques en mécanique des fluides, en particulier sur l'écoulement dans des domaines de faible épaisseur.

On étudie ici l'écoulement d'un fluide à viscosité non linéaire dans un domaine de faible épaisseur, de l'ordre d'un petit paramètre strictement positif  $\varepsilon$ . L'étude des fluides pour lesquels la viscosité est une fonction non linéaire de la vitesse du fluide est importante. Effectivement, dans la nature il y a plusieurs fluides de ce type, comme par exemple l'encre, les peintures, les graisses, les polymères. On travaille avec une loi générale pour la viscosité, comme dans [3]. Les conditions imposées sur la viscosité sont satisfaites en particulier par les lois de Cross, Williamson, Carreau.

L'étude mathématique a été faite sur deux modèles. Dans les deux cas on considère une équation du type Navier-Stokes dans un domaine de dimension trois. Dans le premier cas (exposé plus loin) on considère des conditions de Dirichlet non-homogènes au bord du domaine, les forces extérieures étant supposées nulles. Dans le deuxième cas, on considère des conditions de Dirichlet homogènes au bord du domaine, mais dans ce cas les forces extérieures sont non nulles.

La solution d'un problème analogue pour un fluide à viscosité linéaire est due à Assemien, Bayada, Chambat [1]. Le cas avec la viscosité linéaire donnée par la loi de la puissance (cas  $r > 2$ ) a été traité par Bourgeat, Mikelič, Tapiéro [2] avec des conditions de Dirichlet non homogènes sur la frontière latérale du domaine.

Dans le premier cas traité, on démontre d'abord un résultat d'existence d'une solution pour le cas  $\varepsilon$  fixé. Ensuite on s'intéresse au passage à la limite ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) qu'on ne traite que dans un cas moins général. On fait des hypothèses supplémentaires sur la géométrie du domaine et sur les valeurs de la vitesse sur le bord du domaine, comme dans [1]. On donne des estimations a priori et des résultats de convergence pour les nouvelles fonctions et ensuite le problème qui lie les limites de la vitesse et de la pression.

Dans le deuxième cas, on connaît grâce à [3] l'existence d'au moins une solution pour le cas  $\varepsilon$  fixé. On s'intéresse pour ce problème aux passages à la limite uniquement.

Dans certains cas particuliers de viscosité on retrouve, à la limite, le problème de Reynolds classique, comme dans [1]. Le système limite trouvé peut être découpé si on impose des hypothèses supplémentaires sur la viscosité du fluide.

## Presentation du problème

On travaille dans le domaine tridimensionnel  $\Omega_\varepsilon$  défini par :

$\Omega_\varepsilon = \{(x_1, x_2, x_3) \text{ tel que } (x_1, x_2) \in \omega \text{ et } 0 < x_3 < \varepsilon h(x_1, x_2)\}$   
 où  $\omega$  est un rectangle du plan et la fonction continue  $h : \bar{\omega} \rightarrow \mathbb{R}_+$  vérifie  $\alpha < h(x_1, x_2) < 1$ , dans  $\omega$ , avec  $\alpha > 0$ . On considère comme dans [1] un écoulement régi par l'équation de Navier-Stokes, mais ici on suppose que la viscosité est non linéaire. Soit  $\mu$  une fonction vérifiant les propriétés suivantes :

$\mu$  est continûment différentiable de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}_+$  (H1)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t) = \mu_\infty > 0 \text{ (H2)}$$

$$0 < m_0 = \inf_{t \in \mathbb{R}_+} \mu(t) \text{ (H3)}$$

$\exists E \subset \mathbb{R}_+$  tel que  $\mu'(t) \geq 0, \forall t \in E$  et  $t|\mu'(t)| \leq \mu(t), \forall t \in \mathbb{R}_+ \setminus E$ . (H4) .

On définit la viscosité non-linéaire du fluide comme dans [3] en fonction de la vitesse  $u$  par :

$$\mu(s(u)) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

avec  $s(u) = \sqrt{2D_{II}(u)}$ ,  $D_{II}(u) = \frac{1}{2}D(u)D(u)^t$ ,  $D(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^t)$  .

Soient  $\Gamma_+^\varepsilon, \Gamma_-^\varepsilon, \Gamma_L^\varepsilon$  les faces supérieure, inférieure et latérale du domaine et  $\Gamma^\varepsilon = \Gamma_+^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon$ . L'application  $g^\varepsilon$  étant donnée, le problème est de trouver la vitesse  $u^\varepsilon$  et la pression  $p^\varepsilon$  qui vérifient :

$$-div(2\mu(s(u^\varepsilon))D(u^\varepsilon)) + u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega_\varepsilon \text{ (1)}$$

$$div u^\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega_\varepsilon, u^\varepsilon = g^\varepsilon \text{ sur } \Gamma^\varepsilon \text{ (2)}$$

De plus, on cherche une pression  $p^\varepsilon$  telle que :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} p^\varepsilon dx = 0. \text{ (3)}$$

On multiplie l'équation (1) par  $v \in V^\varepsilon = \{\phi \in \mathbb{H}_0^1(\Omega_\varepsilon) \mid div \phi = 0 \text{ dans } \Omega_\varepsilon\}$  et on trouve :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} 2\mu(s(u^\varepsilon)) D(u^\varepsilon) D(v) dx + \int_{\Omega_\varepsilon} u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon v dx = 0, \forall v \in V^\varepsilon. \text{ (4)}$$

On ajoute la condition de compatibilité suivante ( $\nu$  étant la normale extérieure) :

$$\int_{\Gamma^\varepsilon} g^\varepsilon \nu d\sigma = 0. \text{ (5)}$$

Pour le cas  $\varepsilon$  fixé on démontre les résultats suivants :

**Lemme** Soit  $g \in \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_\varepsilon)$  vérifiant (5). Alors il existe  $G^\varepsilon \in \mathbb{L}^4(\Omega_\varepsilon)$  qui satisfait :

$$\operatorname{div} G^\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega_\varepsilon, \quad G^\varepsilon = g^\varepsilon \text{ sur } \Gamma^\varepsilon \quad |G^\varepsilon|_{\mathbb{H}^1(\Omega_\varepsilon)} \leq c |g^\varepsilon|_{1 \leq 2, \Gamma^\varepsilon}$$

**Théorème 1** Si  $g^\varepsilon \in \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_\varepsilon)$  vérifie la relation (5) et si  $G^\varepsilon$  vérifie la relation :

$$|G^\varepsilon|_{\mathbb{L}^4(\Omega_\varepsilon)} \leq \frac{m_0}{c_S^\varepsilon c_P^\varepsilon},$$

où  $c_S^\varepsilon$  est la norme de l'injection de  $\mathbb{H}^1(\Omega_\varepsilon)$  dans  $\mathbb{L}^4(\Omega_\varepsilon)$  et où  $c_P^\varepsilon$  est la constante de Poincaré, alors le problème (2)-(5) a au moins une solution  $u^\varepsilon \in \mathbb{H}^1(\Omega_\varepsilon)$ . Il existe  $c^\varepsilon$  constante telle que :

$$|\nabla u^\varepsilon|_{0, \varepsilon} \leq c^\varepsilon.$$

Etude du cas limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  pour la lubrification

Pour passer à la limite on fait le changement de variables  $(y_1, y_2, z) = (x_1, x_2, x_3/\varepsilon)$ . Le nouveau domaine et sa frontière sont notés par :  $\Omega, \Gamma, \Gamma_+, \Gamma_-, \Gamma_L$  et les nouvelles inconnues sont :  $\hat{u}^\varepsilon(y_1, y_2, z) = u^\varepsilon(x_1, x_2, x_3)$  et  $\hat{p}^\varepsilon(y_1, y_2, z) = p^\varepsilon(x_1, x_2, x_3)$ . On donne des conditions particulières pour la fonction  $g^\varepsilon$  comme suit :

$$g^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_+, g^\varepsilon = (g_1, g_2, \varepsilon g_3) \text{ sur } \Gamma_- \cup \Gamma_L,$$

où les fonctions  $g_1, g_2, g_3$  sont indépendantes de  $\varepsilon$  et  $g_3 = 0$  sur  $\Gamma_-$ . De plus, on suppose :

$$\int_{\Gamma_L} g \nu d\sigma = 0$$

**Théorème 2** Quitte à extraire une sous-suite, on a les résultats suivants :

$$\hat{u}^\varepsilon \rightarrow u^* \text{ dans } \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ faible et } \frac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial u^*}{\partial z} \text{ dans } \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ faible}$$

$$u_3^* = 0, \quad \int_0^{h(y)} \hat{u}_i^\varepsilon(y, z) dz \rightarrow \int_0^{h(y)} u_i^*(y, z) dz \text{ dans } \mathbb{L}^2(\omega), i = 1, 2$$

$$\operatorname{div}_y \int_0^{h(y)} u^*(y, z) dz = 0 \text{ dans } \omega, \quad u^*(y, 0) = (g_1, g_2, 0) \text{ dans } \omega$$

$$\varepsilon^2 \hat{p}^\varepsilon \rightarrow p^* \text{ dans } L_0^2(\Omega) \text{ faible et } \frac{\partial p^*}{\partial z} = 0$$

Par abus de notation posons  $u^* = (u_1^*, u_2^*, 0)$ . Pour une application  $\mu$  qui vérifie de plus :

(H5),  $\mu = \mu(\beta^\varepsilon s(u))$ , où  $\beta^\varepsilon$  est une constante dépendant de  $\varepsilon$

on a :

**Théorème 3** Le couple  $(u^*, p^*)$  défini par le théorème 2 vérifie pour  $i=1,2$  :

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left( \mu^*(u^*) \frac{\partial u_i^*}{\partial z} \right) + \frac{\partial p^*}{\partial x_i} = 0 \text{ dans } \Omega, \quad u_i^* = g_i \text{ sur } \Gamma_+ \cup \Gamma_-$$

$$\mu^*(u^*) = \begin{cases} \mu \left( \beta \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\partial u^*}{\partial z} \frac{\partial u^*}{\partial z}} \right) & \text{si } \frac{\beta^\varepsilon}{\varepsilon} \rightarrow \beta < +\infty \\ \mu(0) & \text{si } \frac{\beta^\varepsilon}{\varepsilon} \rightarrow 0 \\ \mu_\infty & \text{si } \frac{\beta^\varepsilon}{\varepsilon} \rightarrow +\infty \end{cases}$$

## Bibliographie

- [1] *A. Assemien, G. Bayada, M. Chambat* Inertial effects in the asymptotic behavior of a thin film flow, Preprint nr.121, Equipe d'Analyse Numérique, Lyon-Saint-Etienne.
- [2] *A. Bourgeat, A. Mikelič, R. Tapiero* Dérivation des équations moyennées décrivant un écoulement non newtonien dans un domaine de faible épaisseur, C.R.Acad.Sci.Paris, 316, Série I, p. 965-970, 1993.
- [3] *D. Cioranescu* Quelques exemples de fluides newtoniens généralisés, Math. topics in fluid dynamics, ed. J.F. Rodrigues-A. Sequiera, Pitman Research Notes in Math. nr.274, Longman Scientific and Technical, 1993, p. 132-168
- [4] *V. Girault, P.-A. Raviart* Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 749, 1979.
- [5] *J.-L. Lions* Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, Paris, 1969.

*Renata Bunoiu*

Université de Metz, Département des Mathématiques  
B.P.80794, 57012 Metz, Cedex 1, France  
bunoiu@poncelet.univ-metz.fr

## Linéarisation de certaines structures de Poisson

*Véronique Chloup-Arnould*

La notion de structures de Poisson apparaît naturellement en mécanique dans l'étude des systèmes Hamiltoniens et généralise la notion de structure symplectique. Si le rang de  $\Lambda$  (tenseur de Poisson sur la variété  $M$ ) est constant et égal à la dimension de  $M$  alors  $\Lambda$  est inversible et son inverse définit une structure symplectique sur  $M$ . Le théorème de Darboux affirme que deux variétés symplectiques de même dimension sont localement isomorphes. On peut se demander si un résultat similaire est vrai pour les structures de Poisson générales, i.e. si deux structures de Poisson de même rang en un point donné sont localement isomorphes. La réponse à cette question est non et c'est précisément cela qui rend intéressante l'étude du comportement local de ces structures.

L'étude locale des structures de Poisson se fait de la façon suivante : on utilise d'abord le théorème de décomposition de Weinstein [9] pour décomposer localement une variété de Poisson  $(M, \Lambda)$  en un produit d'une variété symplectique et d'une variété avec une structure de Poisson nulle en un point. Un tel produit est un produit de Poisson. En utilisant cette décomposition on se ramène à l'étude des structures de Poisson nulles en un point.

Une structure de Poisson sur une variété  $M$  est la donnée d'un crochet de Lie sur  $\mathbb{C}^\infty(M)$ , noté  $\{ , \} : \mathbb{C}^\infty(M) \times \mathbb{C}^\infty(M) \rightarrow S(M)$  et vérifiant la règle de Leibniz :

$$\forall f, g, h \in C^\infty(M) \quad \{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}.$$

Dans des coordonnées locales quelconques  $(x^1, \dots, x^n)$ , on obtient :

$$\{f, g\} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \Lambda^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}$$

où  $\Lambda$  est un champ de tenseurs deux fois contravariant antisymétrique vérifiant

$$[\Lambda, \Lambda] = 0 \quad ([ , ] \text{ désigne le crochet de Schouten}).$$

Si  $\Lambda$  s'annule en  $e$ , dans des coordonnées locales quelconques  $(x^1, \dots, x^n)$  centrées en  $e$ , on peut écrire

$$\Lambda^{ij}(x) = \sum_{1 \leq k \leq n} C_k^{ij} x^k + R^{ij}(x)$$

où les  $R^{ij}$  représentent les termes non linéaires dans le développement en série de Taylor de  $\Lambda^{ij}$  et où les  $C_k^{ij}$  sont les constantes de structure d'une algèbre de Lie  $\mathcal{H}$  appelée *la linéarité de la structure* (Weinstein [9]).

La structure de Poisson  $\Lambda$  sera dite *linéarisable* si on peut trouver des nouvelles coordonnées locales  $(y^1, \dots, y^n)$  dans lesquelles  $\Lambda$  s'écrit

$$\Lambda^{ij}(y) = \sum_{1 \leq k \leq n} C_k^{ij} y^k$$

V. Arnold a montré, le premier, que toute structure de Poisson dont la linéarisée est l'algèbre de Lie non triviale de dimension deux est linéarisable.

La question de la linéarisation de structures de Poisson telles que  $\mathcal{H}$  soit semi-simple a été soulevée dans Weinstein [9] ; si la linéarisée d'une structure de Poisson est une algèbre de Lie semi-simple, alors  $\Lambda$  est formellement linéarisable. De plus, J. Conn [4] a démontré que si  $\Lambda$  est analytique, la linéarisation est analytique. Dufour [6] a démontré que la semi-simplicité n'est pas nécessaire en exhibant une algèbre résoluble de dimension 3 vérifiant la même propriété. J. Conn [5] a démontré que dans le cas d'une structure de Poisson  $C^\infty$ , si la linéarisée  $\mathcal{H}$  est semi-simple de type compact alors la linéarisation est  $C^\infty$ . Weinstein [10] a exhibé des exemples de structures de Poisson  $C^\infty$  ayant pour linéarisée une algèbre de Lie semi-simple, de type non compact et de rang réel au moins deux, qui ne sont pas linéarisables par un changement de coordonnées  $C^\infty$ .

Le problème de la linéarisation formelle se traduit en un problème de cohomologie. Notons  $\Lambda^{ij}(x) = \sum_{1 \leq k \leq n} C_k^{ij} x^k + \Lambda_{(k)}^{ij}(x) + \Lambda_{(k+1)}^{ij}(x) + \dots$  le développement de  $\Lambda^{ij}$  en série formelle où  $\Lambda_{(k)}^{ij}(x)$  est le terme homogène de degré  $k$  en les  $x^1, \dots, x^n$  ( $k \geq 2$ ) .

L'idée de la linéarisation formelle est de repousser les termes de degré  $k$  en des termes de degré supérieur par un changement de coordonnées locales de degré  $k$ . Posons donc  $y^i = x^i + f^i(x)$  où les  $f^i$  sont des polynômes homogènes de degré  $k$ . On peut alors considérer  $\Lambda_{(k)} : \mathcal{H} \wedge \mathcal{H} \rightarrow S^k(\mathcal{H})$  définie par  $\Lambda_{(k)}(x^i \wedge x^j) \mapsto \Lambda_{(k)}^{ij}$ . La relation  $[\Lambda, \Lambda] = 0$  se traduit à l'ordre  $k$  par  $\partial_2 \Lambda_{(k)} = 0$  où  $\partial_2$  est l'opérateur de cohomologie de Chevaly de  $\mathcal{H}$  associé à la représentation adjointe de  $\mathcal{H}$  sur  $S(\mathcal{H}) : (\partial_2(f))(x \wedge y \wedge z) = \sum_{x,y,z} (ad(x)f(y \wedge z) + f(x, [y, z]))$  . Donc  $\Lambda_{(k)}$  est un 2-cocycle. Considérons  $f_{(k)} : \mathcal{H} \rightarrow S^k(\mathcal{H}) x^i \mapsto f_{(k)}^i$ . Alors  $(\{y^i, y^j\} - \sum_k C_k^{ij} y^k)$  est d'ordre strictement supérieur à  $k$  si et seulement si  $(\Lambda_{(k)} + \partial_1 f_{(k)})(x^i, x^j) = 0$ .

Ainsi, si le 2-cocycle  $\Lambda_{(k)}$  est un cobord, on repousse les termes de degré  $k$  en des termes de degré  $k + 1$ .

En itérant le processus on obtient une suite  $\{x_\nu^i\}$  qui détermine un système de coordonnées formelles limite  $x_\infty^i = x^i + g_\infty^i(x)$  dans lequel  $\Lambda$  est linéaire. On parlera de *linéarisation formelle*.

En particulier,  $\Lambda$  est formellement linéarisable si  $H^2(\mathcal{H}, S(\mathcal{H})) = 0$ . C'est le cas si  $\mathcal{H}$  est semi-simple ou si par exemple  $\mathcal{H} = \mathcal{G}_1 \oplus \mathbb{R}$  où  $\mathcal{G}_1$  est semi-simple (dans ce cas, la linéarisation est même analytique, cf. Molinier [7]).

Nous nous intéressons au problème de la linéarisation des tenseurs de Lie-Poisson. Tous ces résultats se trouvent dans Chloup-Arnould [1].

Soit  $G$  un groupe de Lie et  $P$  un tenseur de Poisson sur  $G$ .  $(G, P)$  est un *groupe de Lie-Poisson* si  $P$  est multiplicatif, i.e. s'il vérifie :  $P(xy) = L_{x*}P(y) + R_{y*}P(x)$  . En particulier  $P(e) = 0$ .

La linéarisation des structures de Lie-Poisson est un cas particulier de la linéarisation locale d'une structure de Poisson. Le cadre Lie-Poisson dans cette étude se justifie d'une part par le fait que la structure de Lie-Poisson est automatiquement analytique réelle. D'autre part, sur le groupe  $\mathbb{R}^n$ , toute structure de Lie-Poisson est linéarisable alors que certaines structures de Poisson générales ne le sont pas. De plus une structure de Lie-Poisson est entièrement déterminée par sa partie linéaire sans être toujours linéarisable (voir M. Cahen, S. Gutt et J. Rawnsley [3]).

Soit  $\mathcal{G}$  une algèbre de Lie.  $(\mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$  (aussi notée  $(\mathcal{G}, p)$ ) est une *bigèbre de Lie* s'il existe une structure d'algèbre de Lie sur  $\mathcal{G}^*$  telle que son application duale, notée  $p$ , soit un cocycle sur  $\mathcal{G}$ , i.e.  $p : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} \wedge \mathcal{G}$  vérifie :  $p([X, Y]) = [p(X), Y] - [p(Y), X]$ .

Soit  $(G, P)$  est un groupe de Lie-Poisson, alors  $P_r(x) = R_x^{-1} P(x)$  est un cocycle pour la représentation  $Ad$ , i.e.  $P_r(xy) = P_r(x) + Ad_x P_r(y)$ . Alors  $p = P_{r*\varepsilon}$  définit une structure de bigèbre de Lie sur  $\mathcal{G}$  l'algèbre de Lie de groupe de Lie  $G$ . Réciproquement si  $(\mathcal{G}, p)$  est une bigèbre de Lie, alors  $(G, P)$  est un groupe de Lie-Poisson, où  $G$  est le groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie  $\mathcal{G}$  et où  $P$  est donné dans un voisinage de  $e$  par :  $P(\exp X) = R_{\exp X, \frac{e^{\text{ad } X} - 1}{\text{ad } X}} p(X)$ . Ainsi la structure est déterminée par sa partie linéaire et la linéarisée coïncide avec  $\mathcal{G}^*$ .

Nous généralisons le résultat obtenu par J. Conn [4] en prenant comme point de départ l'algèbre de Lie  $\mathcal{H} = \mathcal{G}^*$ . Nous nous intéressons au cas où  $\mathcal{g}^*$  est réductive :

**Théorème 1** *Soit  $G$  un groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie  $\mathcal{G}$ . Soit  $P$  un tenseur de Lie-Poisson sur  $G$  tel que  $\mathcal{G}^*$ , le dual de  $\mathcal{G}$ , s'écrive  $\mathcal{G}^* = \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{R}$  en produit direct où  $\mathcal{R}$  est un idéal abélien et où  $\mathcal{G}_1$  est une algèbre de Lie semi-simple. Alors  $P$  est analytiquement linéarisable.*

Ce théorème n'est pas vérifié pour certains tenseurs de Poisson généraux (non Lie-Poisson) ayant la même linéarisée  $\mathcal{H} = \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{R}$ . Soit  $P$  un tenseur de Poisson sur  $\mathbb{R}^{n+r}$  (où  $n = \dim \mathcal{G}_1$  et  $r = \dim \mathcal{R}, r > 2$ ), s'annulant en 0 et tel que :

$$P^{ij}(x) = \sum_{1 \leq k \leq n} C_k^{ij} x^k + B^{ij}$$

où les  $C_k^{ij}$  sont les constantes de structure de  $\mathcal{H} = \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{R}$  dans la base  $\langle e_1, \dots, e_{n+r} \rangle$  où  $e_i \in \mathcal{G}_1, \forall i \leq n$  et  $e_j \in \mathcal{R}, \forall j > n$  et où  $B^{ij}$  sont les termes non linéaires de  $P^{ij}$ , et nous supposons que  $B^{ij} = 0$  pour  $i$  ou  $j \leq n$ .

Alors si  $B$  n'est pas nul, la dimension maximale des feuilles symplectiques pour la structure linéaire est différente de la dimension maximale des feuilles symplectiques pour  $P$ , donc  $P$  n'est pas linéarisable.

**Théorème 2** *Soit  $G$  un groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie  $\mathcal{G}$ . Soit  $P$  un tenseur de Lie-Poisson sur  $G$  tel que  $\mathcal{G}^*$ , le dual de  $\mathcal{G}$ , s'écrive  $\mathcal{G}^* = \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{R}$  en produit direct où  $\mathcal{R}$  est un idéal de dimension  $r$  et où  $\mathcal{G}_1$  est une algèbre de Lie semi-simple de dimension  $n$ . Alors  $P = L \oplus T$  où  $L$  est le tenseur de*

Lie-Poisson linéaire donné par les constantes de structure de  $\mathcal{G}_1$  et  $T(x^1, \dots, x^{n+r}) = \sum_{n+1 \leq i, j \leq n+r} T^{ij}(x^{n+1}, \dots, x^{n+r}) \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}$ . Ce théorème n'est pas vérifié pour certains tenseurs de Poisson généraux (non Lie-Poisson) ayant la même linéarisée  $\mathcal{H} = \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{R}$ ; on a le résultat suivant (également obtenu par Wade [8]) :

**Proposition** Soit  $\Lambda$  une structure de Poisson sur une variété  $M$ , s'annulant en un point  $z$  et telle que la linéarisée en  $z$  soit  $\mathcal{H} = \mathcal{G}_1 \ltimes \mathcal{R}$  le produit semi-direct d'une sous-algèbre de Lie semi-simple de dimension  $n$  et d'un idéal de dimension  $r$ .

Alors il existe des coordonnées formelles  $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^r)$  au voisinage de  $z$  telles que dans ces coordonnées, on ait :

$$\begin{aligned} \{x^i, x^j\} &= \sum_{1 \leq k \leq n} C_k^{ij} x^k \\ \{x^i, y^\alpha\} &= \sum_{1 \leq \gamma \leq r} C_\gamma^{i\alpha} y^\gamma \\ \{y^\alpha, y^\gamma\} &= \sum_{1 \leq \nu \leq r} C_\nu^{\alpha\gamma} y^\nu + R^{\alpha\gamma}(x, y) \end{aligned}$$

où les  $C_k^{ij}$  sont les constantes de structure de  $\mathcal{H}$  et où les  $R^{\alpha\gamma}$  sont des séries en  $x$  et  $y$  d'ordre supérieur à deux.

D'autre part, nous regardons le problème de linéarisation des structures de Lie-Poisson en suivant une autre approche : le point de départ est alors  $G$  (voir Chloup-Arnould [2] ou [1] pour les calculs détaillés).

## Bibliographie

- [1] V. Chloup-Arnould, Groupes de Lie-Poisson, Thèse de l'université de Metz (1996).
- [2] V. Chloup-Arnould, Linearization of some Poisson-Lie tensor, Journal of Geometry and Physics 815 (sous presse).
- [3] M. Cahen, S. Gutt, J. Rawnsley, Non linearizability of the Iwasawa Poisson-Lie structure, Lett. Math. Phys. 24 (1992) p79-83.
- [4] J.F. Conn, Normals forms for analytic Poisson structures, Ann. of Mathematics 119 (1984) p577-601.
- [5] J.F. Conn, Normals forms for smooth Poisson structures Ann. of Math. 121 (1985) (3) p. 565-593.
- [6] J.P. Dufour, Linéarisation de certaines structures de Poisson, J. Diff. Géo. 32 (5) (1990) p 415 → 428.
- [7] Molinier, Linéarisation de stuctures de Poisson, thèse de l'université de Montpellier II (1993).

- [8] *A. Wade, Normalisation de structures de Poisson*, Thèse de l'université de Montpellier II (1996).
- [9] *A. Weinstein*, The local structure of Poisson manifolds, *J. Differential Geometry* 18 (1983) p 523-557.
- [10] *A. Weinstein*, Poisson geometry of the principal series and non linearisable structures, *J. Differential Geometry* 25 (1987) p 55-73.

Véronique Chloup-Arnould  
Département de Mathématiques  
Université de Metz, Ile du Saulcy,  
F-57045 Metz Cedex, France  
chloup@poncelet.univ-metz.fr



## Milieux poreux fissurés avec double périodicité

*Ioana-Andreea Ene*

### Introduction

L'écoulement des fluides à travers des milieux poreux représente un problème d'une grande importance, avec de nombreuses applications dans l'exploitation des gisements pétroliers, la pollution, la géophysique, etc. Dans la pratique des exploitations pétrolières on rencontre le plus souvent des milieux poreux fissurés. Dans ce cas un problème sur lequel on a beaucoup discuté est la modélisation de ces mouvements. Dans la modélisation mathématique des écoulements des fluides dans les milieux poreux fissurés, le milieu poreux est composé de blocs poreux, qui sont séparés par des fissures qui ont des dimensions plus grandes que celles des pores. Dans ces conditions même s'il existe une seule phase fluide en mouvement, elle va se comporter de manière différente dans les blocs poreux et dans les fissures. Ceci laisse supposer qu'au niveau microscopique on peut avoir deux pressions différentes qui correspondent aux deux cas décrits.

En effet on connaît les équations proposées par Barenblatt et Zheltov [4] qui introduisent deux pressions différentes dans les blocs poreux et dans les fissures. On décrit, dans ce cas, l'écoulement moyen, ou macroscopique, avec deux équations qui contiennent un terme de transfert entre les blocs poreux et les fissures ; ce terme est représenté par la différence des deux pressions.

En utilisant la méthode de l'homogénéisation on a obtenu une modélisation mathématique de ce type de problème avec deux hypothèses. La première suppose l'existence d'une double périodicité, ce qui correspond aux blocs poreux et aux fissures. La deuxième suppose l'existence d'une double porosité.

En utilisant la méthode de l'homogénéisation, Th. Levy [11] et P. Donato et J. Saint Jean Paulin [6] ont proposé un modèle qui contient une double périodicité. Plus précisément dans les fissures l'écoulement est périodique en  $\varepsilon$  et dans les blocs poreux en  $\varepsilon^2$ . Le résultat qu'on obtient en passant à la limite est une loi de Darcy avec un tenseur de perméabilité différent du tenseur classique de la loi de Darcy (E. Sanchez-Palencia [14]).

Un autre modèle d'écoulement dans les milieux poreux fissurés, proposé par T. Arbogast, U. Hornung et J. Douglas [3] et U. Hornung [10], connu comme le modèle de double porosité, consiste dans l'introduction de deux perméabilités très différentes dans les blocs poreux et dans les fissures. Plus précisément si on suppose que la perméabilité des fissures est de l'ordre de l'unité, alors dans les blocs poreux on prend une perméabilité de l'ordre de  $\varepsilon^2$ . Le résultat du processus d'homogénéisation qu'on obtient est un modèle avec deux pressions et donc avec un terme de transfert lié à la différence des deux pressions.

Les deux modèles semblaient donner des solutions différentes. En partant de cette remarque je me suis située dans mon étude dans le cas d'une double périodicité, mais en

étudiant le problème de Neumann, ce qui correspond plus ou moins au cas de la double porosité. Le résultat que j'ai obtenu montre que, du moins dans le cas d'un écoulement stationnaire, le modèle à double porosité et celui à double périodicité coïncident. Au niveau macroscopique j'ai obtenu une loi de Darcy.

D'un point de vue mécanique, on sait que l'écoulement d'un fluide à travers un milieu poreux est décrit par

- la loi de Darcy :

$$v = -k(\nabla p - f)$$

où  $v$  est le vecteur vitesse,  $p$  la pression,  $k$  le tenseur de perméabilité (qui est symétrique et défini positif, cf. E. San& ez-Palencia), et  $f$  les forces extérieures.

- l'équation de continuité :

$$\operatorname{div} v = 0$$

- la condition sur les frontières imperméables :

$$v \cdot n = 0$$

On voit donc, que d'un point de vue mathématique, on est conduit à résoudre un problème de Neumann :

$$-\operatorname{div} (A \nabla u) = f$$

$$A \nabla u \cdot n = 0$$

Si l'on considère maintenant que le milieu poreux est formé par des fissures d'ordre  $\varepsilon$  et des blocs poreux qui contiennent des inclusions (ou des trous d'ordre  $\varepsilon^2$ ), le problème de Neumann qu'on a à résoudre est tel qu'on cherche des solutions doublement périodiques en  $\varepsilon$  et  $\varepsilon^2$ .

### Quelques résultats de convergence 3-échelle

**Definition** Soit  $u_\varepsilon$  une suite bornée dans  $L^2(\Omega)$ . On dit que  $u_\varepsilon$  converge 3-échelle vers une limite  $u_0(x, y, z) \in L^2(\Omega \times Y \times Z)$  si et seulement si pour toute fonction  $\psi(x, y, z) \in \mathcal{D}(\Omega, C_p^\infty(Y \times Z))$  on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) \psi \left( x, \frac{x}{s}, \frac{x}{s^2} \right) dx = \int_{\Omega} \int_Y \int_Z u_0(x, y, z) \psi(x, y, z) dx dy dz$$

**Théorème** (i) Soit  $u_\varepsilon$  une suite bornée dans  $H^1(\Omega)$ , qui converge faiblement vers sa limite  $u(x)$ , dans  $H^1(\Omega)$ . Alors  $u_\varepsilon$  converge 3-échelle vers  $u(x)$  et il existe deux fonctions  $u_1(x, y) \in L^2(\Omega, H_p^1(Y)/R)$ ,  $u_2(x, y, z) \in L^2(\Omega \times Y, H_p^1(Z)/R)$  telles que, quitte à extraire une sous-suite,  $\nabla u_\varepsilon$  converge 3-échelle vers  $\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y) + \nabla_z u_2(x, y, z)$ .

(ii) Soient  $u_\varepsilon$  et  $\varepsilon^2 u_\varepsilon$  deux suites bornées dans  $L^2(\Omega)$ , respectivement  $(L^2(\Omega))^N$

Alors il existe une fonction  $u_0(x, y, z) \in L^2(\Omega \times Y, H_p^1(Z)/R)$  tel que, quitte à extraire une sous-suite,  $u_\varepsilon$  et  $\nabla u_\varepsilon$  converge 3-échelle vers  $u_0(x, y, z)$  respectivement  $\nabla_z u_0(x, y, z)$ .

### Problème de Neumann dans un milieu poreux fissuré

On veut étudier avec la méthode de l'homogénéisation le système suivant :

$$-\Delta u_\varepsilon = f \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon \quad (8)$$

$$u_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \partial \Omega \quad (9)$$

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial S_\Omega^\varepsilon \quad (10)$$

où  $f \in L^2(\Omega)$ .

La structure de  $\Omega_\varepsilon$  présente une double périodicité ( $\varepsilon$  et  $\varepsilon^2$ ). Les zones dans lesquelles les inclusions sont concentrées sont  $\varepsilon$ -périodiques et de dimension  $\varepsilon$ . Les inclusions dans chaque zone sont  $\varepsilon^2$ -périodiques et de dimension  $\varepsilon^2$ .

Pour résoudre un tel problème on doit utiliser un opérateur de prolongement  $P_\varepsilon \in \mathcal{L}(V_\varepsilon, H_0^1(\Omega))$  (D. Cioranescu et J. Saint Jean Paulin [5]). Avec cette construction on peut alors donner :

### Théorème de convergence

(i) Quitte à extraire une sous-suite, les convergences suivantes ont lieu :

$$P_\varepsilon u_\varepsilon \rightarrow u(x) \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible}$$

$$P_\varepsilon u_\varepsilon \text{ converge 3-échelle } u(x)$$

(ii) Il existe deux fonctions  $u_1(x, y) \in L^2(\Omega, H_p^1(Y)/R)$ ,  $u_2(x, y, z) \in L^2(\Omega \times Y, H_p^1(Z)/R)$  telles que, quitte à extraire une sous-suite on a :

$$\nabla(P_\varepsilon u_\varepsilon) \text{ converge 3-échelle } \nabla_x u(x) + \nabla_y u_1(x, y) + \nabla_z u_2(x, y, z)$$

La limite 3-échelle du système est alors :

$$\int_{\Omega \times Y \times Z} (\chi_F(y) + \chi_{Y \setminus F}(y) \chi_{Z \setminus S}(z)) (\nabla_x u(x) + \nabla_y u_1(x, y) + \nabla_z u_2(x, y, z))$$

$$(\nabla_x \Phi(x) + \nabla_y \Phi_1(x, y) + \nabla_z \Phi_2(x, y, z)) = \left( \frac{|F|}{|Y|} + \frac{|Y \setminus F|}{|Y|} \frac{|Z \setminus S|}{|Z|} \right) \int_\Omega f(x) \Phi(x) dx$$

Pour voir de manière plus claire le système macroscopique on introduit les notations suivantes :

$$A(y, z) = \chi_F(y) + \chi_{Y \setminus F}(y) \chi_{Z \setminus S}(z)$$

$$A_1(y) = \int_{Z \setminus S} A(y, z) (Id - \nabla_z w) dz$$

$$A^h = \int_F A_1(y) (Id - \nabla_y v(y)) dy.$$

Problème homogénéisée “classique” :

$$-\operatorname{div}_x (A^h \nabla_x u(x)) = \left( \frac{|F|}{|Y|} + \frac{|Y \setminus F|}{|Y|} \frac{|Z \setminus S|}{|Z|} \right) f(x) \text{ dans } \Omega \quad (11)$$

$$u(x) = 0 \text{ sur } \partial \Omega \quad (12)$$

**Remarque** Un problème qui trouve toute sa place dans le cadre des milieux poreux fissurés est celui de l’étude de l’équation de diffusion :

$$\frac{\partial p^\varepsilon}{\partial t}(x, t) = \nabla (d^\varepsilon \nabla p^\varepsilon(x, t)) + f(x, t) \text{ dans } \Omega^\varepsilon \times (0, T) \quad (13)$$

$$p^\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial \Omega \times (0, T) \quad (14)$$

$$[p^\varepsilon] = 0 \text{ sur } \partial S_\Omega^\varepsilon \times (0, T) \quad (15)$$

$$d^\varepsilon \nabla p^\varepsilon \cdot n = 0 \text{ sur } \left( \partial S_\Omega^\varepsilon \setminus \left( \partial F^\varepsilon \cap \partial \Omega_f^\varepsilon \right) \right) \times (0, T) \quad (16)$$

$$d^\varepsilon \nabla p^\varepsilon \cdot n = q^\varepsilon \text{ sur } \partial F^\varepsilon \times (0, T) \quad (17)$$

Les mêmes techniques d’homogénéisation et de convergence 3-échelle nous permet d’obtenir à la limite un système avec deux pressions, et donc de lier ce type de modèle avec celui de Warren et Root et de Brenblatt et Zheltov [4].

## Bibliographie

- [1] *G. Allaire*, Homogenization and two-scale convergence, *SIAM J. Math. Anal.*, 23, 6, 1482-1518, 1992
- [2] *G. Allaire, M. Briane*, Multi-scale convergence and reiterated homogenization, *Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique, Univ. Paris 6*, R 94019, 1994
- [3] *T. Arbogast, J. Douglas, U. Hornung* Derivation of the double porosity model of single phase flow via homogenization theory, *SIAM J. Math. Anal.*, 21, 823-836, 1990
- [4] *G. I. Barenblatt, I. P. Zheltov, I. N. Kocina* Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks, *J. Appl. Math. Mech.*, 24, 1286-1303, 1960
- [5] *D. Cioranescu, J. Saint Jean Paulin*, Homogenization in open sets with holes, *J. Math. Anal. Appl.*, 71, 2, 590-607, 1979
- [6] *P. Donato, J. Saint Jean Paulin*, Stokes flow in a porous medium with double periodicity, *Progress in Partial Differential Equations : the Metz surveys*, Eds. M. Chipot, J. Saint Jean Paulin et I. Shafrir, Pitman, Longman Press, 116-129, 1994
- [7] *I-A. Ene*, Etude de quelques problèmes d'écoulement dans les milieux poreux, Thèse de Doctorat de l'Université de Metz, 1995
- [8] *I-A. Ene, J. Saint Jean Paulin*, On a Model of Fractured Porous Medium, *Proceedings of the International Conference Mathematical Modelling of Flow Through Porous Media*, eds. A. Bourgeat, C. Carasso, S. Lu & Haus et A. Mikelić, World Scientific, 402 → 409, 1996
- [9] *I-A. Ene, T. Estebenet, B. Noetinger*, Homogénéisation de l'équation de diffusion dans un milieu poreux fissuré (en préparation)
- [10] *U. Hornung*, Applications of the homogenization method to flow and transport in porous media, *Summer School on Flow and Transport in Porous Media*, Ed. Xiao Shu-tie, World Scientific, 167-222, 1992
- [11] *T. Levy*, Filtration in a porous fissured rock : influence of the fissures connectivity, *European J. Mech., B/Fluids*, 9,4, 309-327, 1990
- [12] *G. Nguetseng*, A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization, *SIAM J. Math. Anal.*, 20, 608-623, 1989

- [13] *G. Nguetseng*, Asymptotic analysis for a stiff variational problem arising in mechanics, *SIAM J. Math. Anal.*, 21, 6, 1394-1414, 1990
- [14] *E. Sanchez Palencia*, Non-homogeneous media and vibration theory, *Lecture Notes in Physics*, 127, Springer, Berlin, 1980

*Ioana-Andreea Ene*  
Departement de Mathématiques  
Université de Metz, Ile du Saulcy,  
F-57045 Metz Cedex, France  
ene@poncelet.univ-metz.fr

## Décomposition spectrale de 1-formes différentielles sur une surface de Riemann et series d'Eisenstein.

*Thérèse Falliero*

On considère une surface de Riemann hyperbolique  $M$  et  $\Delta$  l'opérateur de Laplace,  $\Delta = d\delta + \delta d$ ,  $\delta = - * d*$ , où  $*$  est l'opérateur de Hodge.  $\Delta$  agit sur l'espace  $L^2(M)$  des 1-formes différentielles  $w$  de carré intégrable pour le produit scalaire

$$\langle w_1, w_2 \rangle = 1/2 \int_M w_1 \wedge * \bar{w}_2$$

Lorsque la surface de Riemann est compacte, il existe une base hilbertienne orthonormée formée de 1-formes propres :

$$w = \sum_{\lambda} (w)_{\lambda}$$

où  $(\dots)_{\lambda}$  désigne la projection orthogonale sur le sous-espace associé à la valeur propre  $\lambda$  du spectre discret de  $\Delta$ .

Lorsque  $M$  n'est plus compacte (par exemple  $\underline{M} = \hat{M} - \{a\}$ , avec  $\hat{M}$  compacte), le laplacien possède un spectre continu, lié à des séries d'Eisenstein  $E_2, E_{-2}$  associées à la pointe de  $M$  et on a la formule de décomposition spectrale

$$\begin{aligned} w(z) = & \sum_{\lambda} (w)_{\lambda}(z) + \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle w, E(1/2 + it, )_2 \rangle E(1/2 + it, z)_2 dt \\ & + \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle w, E(1/2 + it, )_{-2} \rangle E(1/2 + it, z)_{-2} dt \end{aligned}$$

On se propose ici d'établir cette formule et d'expliciter les séries d'Eisenstein qui entrent en jeu et d'en donner quelques propriétés. On pose ainsi les outils qui nous seront nécessaires pour étudier une dégénérescence des séries d'Eisenstein hyperboliques de Kudla et Millson ([1]).

On utilisera quelques notations :  $Im(z)$  est la partie imaginaire de  $z = x + iy$ ,  $H$  est le demi-plan de Poincaré,  $G = SL_2(\mathbb{R})$ ,  $M = \Gamma \backslash H$ ,  $\Gamma$  est un groupe fuchsien de co-volume fini, sans points elliptiques. L'existence de pointes de  $M$  correspond à la présence d'éléments paraboliques dans  $\Gamma$ . Quitte à faire une conjugaison sur  $\Gamma$ , on peut supposer que  $\infty$  est la pointe de  $M$  et que son stabilisateur est engendré par  $\gamma_{\infty} : z \rightarrow z + 1, \Gamma_{\infty} = \langle \gamma_{\infty} \rangle$ .

La décomposition des 0-formes a été faite à l'origine par Selberg. On donne pour référence à la décomposition des 1-formes les livres de : T.Kubota ([2]), G.G.P.S. ([3]), H.Iwaniec ([4]), D.A.Hejhal ([5], [6]).

On interprète ici la décomposition des 1-formes en termes de fibré en sphères de  $M$ .

### 1. Le fibré en sphères de $M$

Le fibré en sphères  $S(H)$  est paramétrisable par les coordonnées locales  $(z, \zeta)$  où  $z \in H$  et  $\zeta \in \mathbb{C}$ ,  $|\zeta| = y$  ([7]). Le groupe  $\Gamma$  agit sur  $S(H)$  de la façon suivante, pour tout  $\gamma \in \Gamma$  :  $\gamma : (z, \zeta) \rightarrow (\gamma z, \gamma^l(z)\zeta)$ . On vérifie que  $S(M)$  s'obtient en factorisant  $S(H)$  par  $\Gamma$ . En notant  $\theta$  l'argument du vecteur tangent  $\zeta$ , on a une métrique invariante sous l'action de  $\Gamma$  :

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} + \left( d\theta + \frac{dx}{y} \right)^2$$

La mesure associée est alors  $d\mu = dV \frac{d\theta}{2\pi}$  où  $dV = \frac{dx dy}{y^2}$ . On a

**Proposition 1**  $S(M)$  est une variété riemannienne de dimension  $S$ , isométrique à  $\Gamma \backslash G$ .

On considère l'espace de Hilbert  $L^2(S(M))$  muni du produit scalaire ([7]) :

$$\langle F, G \rangle = \int_{S(M)} F \bar{G} dV \frac{d\theta}{2\pi}$$

Pour tout  $m \in \mathbb{Z}$ , on définit les sous-espaces fermés  $H_m \subset L^2(S(M))$  de la façon suivante

$$H_m = \{G(z, \zeta) \in L^2(S(M)) \mid G(z, \zeta) = g(z)\zeta^m\}$$

alors on a la décomposition orthogonale :  $L^2(S(M)) = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} H_m$ . De plus

**Proposition 2** Le laplacien associé à la métrique de  $S(M)$  est

$$-\Delta = y^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - 2y \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Il admet une unique extension auto-adjointe à  $L^2(S(M))$  encore notée  $\Delta$ .

### 2. Décomposition spectrale de $H_1$

On appelle séries d'Eisenstein incomplètes les fonctions

$$E((z, \zeta) \mid \psi) = \sum_{\sigma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \psi(\sigma(z, \zeta))$$

avec  $\psi((z, \zeta)) = \psi(y)\zeta$ ,  $\psi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^+)$ . On note  $\mathcal{E}(S(M))$  l'espace engendré par les  $E((z, \zeta) \mid \psi)$ . On obtient la décomposition orthogonale

**Proposition 3**

$$H_1 = \tilde{C}(S(M)) \oplus \tilde{\mathcal{E}}(S(M))$$

où le tilde désigne l'adhérence dans l'espace de Hilbert  $L^2(S(M))$  et  $C(S(M))$  l'espace des fonctions  $F$  de  $H_1, C^\infty$ , bornées, telles que si  $F(z, \zeta) = f(z)\zeta$ ,  $\int_0^1 f(z) dx = 0$ . On a le théorème suivant

**Théorème 1** Le spectre de  $\Delta$  opérant sur  $C(S(M))$  est discret.

Pour effectuer la résolution spectrale de  $\mathcal{E}(S(M))$ , on note dans la suite  $y(\sigma(z, \zeta), s)_1 = y(z)^{s-1}\zeta = y(z)^s e^{i\theta}$  et on donne la :

**Définition 1** On appelle série d'Eisenstein généralisée, la série définie par

$$E((z, \zeta), s)_1 = \sum_{\Gamma_\infty \backslash \Gamma} y(\sigma(z, \zeta), s)_1.$$

Elle est définie sur le fibré  $S(M)$ .

On a convergence absolue en tout  $(z, \zeta) \in S(M)$  de cette série si et seulement si  $Re(s) > 1$ .

On utilise alors un théorème de prolongement des séries d'Eisenstein généralisées

**Théorème 3** Les séries d'Eisenstein généralisées admettent un prolongement méromorphe à tout le plan des  $s$ , sont holomorphes pour  $Res \geq 1/2$  sauf en des pôles simples, indépendants de  $z$  sur  $]1/2, 1[$ .

On obtient

**Proposition 4**

$$E((z, \zeta)|\psi) = \sum_{1/2 < s_j < 1} \hat{\psi}(s_j) u_{1j}(z, \zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_{Res=1/2} \hat{\psi}(s) E((z, \zeta), s)_1 ds$$

où  $u_{1j}(z, \zeta)$  est le résidu de  $E((z, \zeta), s)_1$  en  $s = s_j$  et  $\hat{\psi}(s) = \int_0^\infty \psi(y) y^{-s} dy$ . D'où la formule de décomposition pour tout  $F \in H_1$  :

$$F(z, \zeta) = \sum_j \langle F, u_j \rangle u_j(z, \zeta) + \sum_{1/2 < s_j < 1} u_{1j}(z, \zeta) \langle F, u_{1j} \rangle \|u_{1j}\|^{-2} + \frac{1}{4\pi i} \int_{Res=1/2} \langle F, E(\cdot, s)_1 \rangle E((z, \zeta), s)_1 ds$$

### 3. Formule de décomposition spectrale d'une 1-forme

Soit  $w$  une 1-forme différentielle sur  $M$ ,  $w \in L^2(S(M))$ . Comme corollaire de tout ce qui précède, on a la décomposition spectrale suivante :

$$\begin{aligned} w(z) &= \sum_j \langle w, v_j dz \rangle v_j(z) dz + \sum_j \langle w, \bar{v}_j d\bar{z} \rangle \overline{v_j(z)} d\bar{z} \\ &+ \sum_{1/2 < s_j < 1} \langle w, v_{1j} dz \rangle \|v_{1j}\|^{-2} v_{1j}(z) dz + \sum_{1/2 < s_j < 1} \langle w, \bar{v}_{1j} d\bar{z} \rangle \|v_{1j}\|^{-2} \overline{v_{1j}(z)} d\bar{z} \\ &+ \frac{1}{4\pi i} \int_{Res=1/2} \left\langle w, E(\cdot, s)_1 \frac{dz}{y} \right\rangle E(z, s)_1 \frac{dz}{y} ds + \frac{1}{4\pi i} \int_{Res=1/2} \left\langle w, E(\cdot, s)_{-1} \frac{dz}{y} \right\rangle E(z, s)_{-1} \frac{d\bar{z}}{y} ds \end{aligned}$$

De plus on a la formule valable pour  $Res \geq 1/2$  :

$$\Delta_{Diff} \left( E(z, s)_1 \frac{dz}{y} \right) = s(1-s) E(z, s)_1 \frac{dz}{y}$$

## Bibliographie

- [1] *S.Kudlaf J.Millson*, Harmonic differentials and closed geodesics on a Riemann surface. Invent.Math. 54 (1979), 193-211.
- [2] *T.Kubota*, Elementary theory of Eisenstein series, Halsted Press, New York (1973)
- [3] *I.M. Gelfand, M.I. Graev and I.I.Pyatetskii-Shapiro*, Representation Theory and Automorphic Functions, W.B.Saunders Company (1969)
- [4] *H.Iwaniec*, Introduction to the Spectral Theory of Automorphic Forms, Biblioteca de la revista matematica iberoamericana (1995)
- [5] *D.A.Hejhal*, The Selberg Trace Formula for  $PSL(2, \mathbb{R})$  , Springer Lecture Notes 548 (1976)
- [6] *D.A.Hejhal*, The Selberg Trace Formula for  $PSL(2, \mathbb{R})$  , Springer Lecture Notes 1001 (1983)
- [7] *S. Katok*, Closed geodesics periods and arithmetic of modular forms. Invent.Math. 80 (1985), 469-480.

*Thérèse Falliero*  
U.F.R. Mathématiques et Informatique  
Université Bordeaux I  
351, cours de la Libération, 33405 Talence Cedex  
falliero@math.u-bordeaux.fr

## Un théorème de Paley-Wiener pour les groupes de Lie complètement résolubles

Gayatri Garimella

Pour une fonction mesurable  $\phi$  sur  $\mathbb{R}^n$ , la transformée de Fourier  $\hat{\phi}$  est définie par

$$\hat{\phi}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) e^{-ixy} dx$$

Soit  $\rho$  une représentation de groupe du Lie  $G$ ; on définit la transformée de Fourier à valeur dans les opérateurs par

$$\hat{\phi}_\rho = \int_G \phi(g) \rho(g) dg$$

où  $dg$  est la mesure de Haar sur  $G$ .

Le résultat principal de ce travail est le suivant.

**Théorème :** *Soient  $G$  un groupe de Lie complètement résoluble connexe et simplement connexe de dual unitaire  $\hat{G}$  et  $\phi$  une fonction bornée, mesurable à support compact ( $\phi \in L_c^\infty(G)$ ). Supposons qu'il existe un sous-ensemble  $E \subset \hat{G}$  de mesure de Plancherel positive tel que  $\hat{\phi}_\rho = 0_f$  pour tout  $\rho \in E$ . Alors  $\phi = 0$  presque partout sur  $G$ .*

Dans le cas de  $\mathbb{R}^n$ , la transformée de Fourier ordinaire  $\hat{\phi}$  se prolonge comme une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C}^n$ . Donc dès que  $\hat{\phi}$  s'annule sur un ensemble dont la mesure de Plancherel est positive,  $\hat{\phi}$  est nulle identiquement et donc  $\phi = 0$ . Mais dans un groupe de Lie, on travaille avec la transformée de Fourier à valeurs dans les opérateurs, qui ne prolonge pas comme une fonction holomorphe. Il faut donc utiliser des méthodes beaucoup plus sophistiquées. Ce théorème de Paley-Wiener a néanmoins été démontré pour les groupes de Lie nilpotents en traitant deux cas classiques. Il a été démontré par récurrence sur la dimension de  $G$  en utilisant la mesure de Plancherel explicite et la formule de Plancherel explicite [3].

La même question a été posée pour les groupes de Lie complètement résolubles. Les ingrédients utilisés dans la démonstration : description des orbites co-adjointes dans  $\mathcal{G}^*$  dual de l'algèbre de Lie  $\mathcal{G}$  de  $G$ , mesure de Plancherel explicite et formule de Plancherel explicite se trouvent dans les travaux de B.N.Currey [2]. Les résultats de B.N.Currey sont des généralisations de ceux de L.Pukanszky [5]. Ce théorème a été démontré par récurrence sur la dimension de  $G$ .

Ici, on donne la démonstration de ce théorème pour le groupe  $ax + b$ . Pour plus de détails et pour la démonstration dans le cas général voir [4].

### Exemple : Groupe $ax + b$

Considérons le groupe

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a > 0, b \in \mathbb{R} \right\}$$

On note

$$(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La multiplication des matrices donne

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2, a_1 b_2 + b_1)$$

et l'inverse

$$(a, b)^{-1} = (a^{-1}, -ba^{-1})$$

Soit  $H = (1, b)$  le groupe dérivé de  $G$  qui s'identifie à  $\mathbb{R}$ . Pour  $y \in \mathbb{R}$ , soit  $\chi_y$  le caractère de  $H$  défini par  $\chi_y((1, b)) = e^{iby}$ .

Remarquons que  $(a, b) = (1, b)(a, 0)$ . Soit  $\rho_y = \text{Ind}_H^G \chi_y$  la représentation de  $G$  induite de  $\chi_y$ . Cette représentation se réalise dans l'espace  $L^2(\mathbb{R})$ . On sait que pour tout  $y > 0$ ,  $\rho_y$  est équivalente à  $\rho_1$  et on notera  $\rho_+$  la classe de  $\rho_1$ ; de même si  $y < 0$ ,  $\rho_y$  est équivalente à  $\rho_{-1}$  et on notera  $\rho_-$  la classe de cette représentation.

L'algèbre de Lie de  $G$  est l'ensemble des matrices

$$\mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Dans la base

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on a  $[X, Y] = Y$ . Avec cette même base  $X$  et  $Y$  on a

$$\text{Ad}(a, b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b & a \end{pmatrix}$$

De même dans la base  $\{X^*, Y^*\}$

$$\text{Ad}^*(a, b) = \begin{pmatrix} 1 & ba^{-1} \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}.$$

Pour  $\ell = \alpha X^* + \beta Y^* \in \mathcal{G}^*$ , les orbites de  $G$  dans  $\mathcal{G}^*$  sont le demi-plan  $\beta > 0$ , le demi-plan  $\beta < 0$  et les points  $(\alpha, 0)$ .

Soient  $\mathcal{B} = \{X, Y\}$  la base de  $\mathcal{G}$  définie plus haut, et  $B^* = \{X^*, Y^*\}$  la base duale de  $\mathcal{G}^*$ . Il existe un ensemble  $J = \{j_1, j_2\}$  de  $\{1, 2\}$  et  $M = \{j_2\}$  sous-ensemble de  $J$ , alors  $V \subset \mathbb{R}^2, V = ]0, \infty[ \times \mathbb{R}$ . On a  $W_D = (0)$  et  $W_M$  est engendré par le vecteur  $\{X_{j_2}^* \mid j_2 \in M\}$ .

Les ouverts  $U_+$  et  $U_-$  sont les demi-plans définis ci-dessus de  $\mathcal{G}^*$  et  $U = U_+ \cup U_-$ . Donc  $a = 1$  et  $\epsilon \in \{1, -1\}$ .

Puisque il n'y a que deux orbites ouvertes, l'ensemble

$$W = \{\ell \in W_M \cap U \mid q_{j_2}(\ell)1 = 1, j_2 \in M\}$$

la réunion de deux points de  $\mathcal{G}^*$ . On a  $W_+ = W \cap U_+$  et  $W_- = W \cap U_-$ . Soit  $\epsilon \in \{1, -1\}$ . Dans ce cas l'ouvert de Zariski  $\Lambda_{ell} = \Lambda_+$  ou  $\Lambda_\ell = \Lambda_-$  de  $W_D$  qui se réduisent à un point.

Dans ce cas particulier on peut démontrer le théorème de Paley-Wiener par un calcul direct.

Soient  $\phi \in C_c^\infty(G)$ ,  $f \in L^2(\mathbb{R}_+^*)$  et  $t \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} (\widehat{\phi}_{\rho_\ell} f)(t) &= \int_G \phi((a, b)) \rho_\ell((a, b)) f(t) a^{-2} da db \\ &= \int_G \phi((a, b)) f((a, b)^{-1}(t, 0)) a^{-2} da db \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}} \phi((a, b)) f((a^{-1}t, -ba^{-1})) a^{-2} da db \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \phi((a, b)) f((a^{-1}t, 0)(1, -bt^{-1})) a^{-2} da db \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \left( \int_{\mathbb{R}} \Delta(b)^{1/2} \phi((a, b)) \chi_y((1, -bt^{-1})) db \right) f((a^{-1}t, 0)) a^{-2} da \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \left( \int_{\mathbb{R}} \phi^a(b) e^{-2i\pi byt^{-1}} db \right) f((a^{-1}t, 0)) a^{-2} da \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \widehat{\phi}_{\chi_{yt^{-1}}}^a f((a^{-1}t, 0)) a^{-2} da \end{aligned}$$

où  $\phi^a(b) = \Delta(b)^{1/2} \phi((a, b))$  et  $\Delta(b) = |\det(Ad(b))|$ .

Remarquons que  $\phi^a \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ . Par hypothèse on a  $\widehat{\phi}_{\rho_p} = 0$  pour tout  $\ell \in E$ ; d'après ces calculs ceci entraîne que pour presque tout  $a > 0$  on a  $\widehat{\phi}_{\chi_{yt^{-1}}}^a = 0$  pour presque tout  $t > 0$  et  $y$  fixé.

Alors comme  $\phi^a \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\widehat{\phi}_{\chi_{yt^{-1}}}^a$  se prolonge en une fonction holomorphe sur  $S$ ,  $\widehat{\phi}_{\chi_{yt^{-1}}}^a$  est nulle sur un ensemble dont la mesure de Plancherel  $d\mu_1$  est positive donc d'après le théorème de Paley-Wiener classique on a  $\phi^a = 0$ , donc  $\phi = 0$  presque partout sur  $G$ . Remarquons que d'après la théorie générale, la mesure de

Plancherel sur  $W$  s'écrit

$$\begin{aligned}d\mu &= \frac{1}{(2\pi)^2} |\beta| (d\delta_+ + d\delta_-) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} |\beta| d\delta\end{aligned}$$

où  $d\delta$  est la mesure ponctuelle.

Donc si  $E$  est un ensemble non négligeable pour la mesure de Plancherel  $d\mu$ , c'est l'ensemble constitué de par  $\rho_+$  ou  $\rho_-$  ou  $\{\rho_+, \rho_-\}$

Donc  $\widehat{\phi_{\chi(\ell^t)}^a} = 0$  pour tout  $t$  et  $a$  dans  $\mathbb{R}$ , ce qui signifie que  $\widehat{\phi_{\chi(\ell^t)}^a}$  s'annule sur un ensemble de dual de  $\mathbb{R}$  contenant une demi-droite. Cette ensemble est non-négligeable pour la mesure de Plancherel de  $\mathbb{R}$ . D'où une autre démonstration de ce résultat.

## Bibliographie

- [1] *P. Bernat et al*, Représentations des groupes de Lie résolubles, Paris : Dunod, 1972.
- [2] *B.N. Currey*, An explicit Plancherel formula for completely solvable Lie groups, Michigan Math. Journal, 38 (1991) 75-87.
- [3] *G. Garimella*, Un théorème de Paley-Wiener pour les groupes de Lie nilpotents, Journal of Lie theory, vol 5 (1995), 165-172.
- [4] *G. Garimella*, Théorème de Paley-Wiener. Opérateurs différentiels invariants sur les groupes de Lie nilpotents, Thèse, Université de Poitiers, 1997.
- [5] *L. Pukanszky*, On the characters and the Plancherel formula of nilpotent Lie groups, Journal of Func. Analysis 1 (1967), 255-280.

*Gaytari Garimella*

Mathématiques, Université de Poitiers  
40, Avenue du Recteur Pineau, 86022 Poitiers.  
gaya@mathrs.univ-poitiers.fr

## Formes d'enlacement et invariants des 3-variétés.

Catherine Gille

### 1. Présentation de chirurgie des 3-variétés et matrices d'enlacement

**Definition :** Un *entrelacs* orienté à  $n$  composantes dans la 3-sphère  $S^3$  est une sous-variété difféomorphe à  $n$  copies du cercle  $S^1$ . On le note  $L = L_1 \cup \dots \cup L_n$ . Un *entrelacs parallélisé* est un entrelacs orienté tel que chaque composante  $L_i$  est munie d'un "framing"  $f_i$ , c'est-à-dire une classe d'isotopie d'une section de la projection  $\partial N(L_i) \rightarrow L_i$  ( $N(L_i)$  est un voisinage tubulaire de  $L_i$  dans  $S^3$ ). On appelle *matrice d'enlacement* de l'entrelacs parallélisé  $L$  à  $n$  composantes la matrice entière symétrique  $B_L = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  avec  $b_{ij} = lk(L_i, L_j)$  si  $i \neq j$  et  $b_{ii} = lk(L_i, f_i)$ .

Dans la suite, tous les entrelacs sont parallélisés, même si ce n'est pas précisé. A partir d'un entrelacs parallélisé  $L$  dans  $S^3$ , on peut construire par chirurgie une variété de dimension 3 orientée fermée connexe, notée  $S^3(L)$ . Explicitons la chirurgie : soit  $N(L) = \bigcup_{i=1}^n N(L_i)$  un voisinage tubulaire de l'entrelacs  $L$  dans  $S^3$ . On oriente le tore  $\partial N(L_i)$  avec la convention "vecteur normal sortant = premier vecteur". On a alors :

$$S^3(L) = \left( S^3 \setminus \overset{\circ}{N}(L) \right) \bigcup_g \left( \prod_{i=1}^n (D^2 \times S^1)_i \right)$$

où l'homéomorphisme de recollement  $g : \prod_{i=1}^n \partial (D^2 \times S^1)_i \rightarrow \bigcup_{i=1}^n \partial N(L_i)$  renverse l'orientation et envoie, pour tout  $i = 1, \dots, n$ , le méridien  $m_i$  de  $\partial (D^2 \times S^1)_i$  sur la longitude  $f_i$ . De plus, on dispose des deux résultats fondamentaux suivants :

**Theorème** [Lickorish [4]] *Pour toute 3-variété orientée fermée connexe  $M$ , il existe un entrelacs parallélisé  $L$  tel que  $M$  est homéomorphe à  $S^3(L)$ .*

**Theorème** [Kirby[3]] *Les variétés  $S^3(L)$  et  $S^3(L')$  sont homéomorphes si et seulement si les entrelacs  $L$  et  $L'$  sont reliés, à orientation près, par une suite finie de mouvements élémentaires de type :*

- *KI (stabilisation) :  $L \longleftrightarrow L \cup L_{n+1}$  où  $L$  est un entrelacs à  $n$  composantes,  $L_{n+1}$  est une composante non nouée telle que  $lk(L_{n+1}, f_{n+1}) = \pm 1$  et  $L_{n+1}$  et  $L$  sont inclus dans deux boules disjointes,*

- *KII (glissement d'anse) :  $L_1 \cup \dots \cup L_n \longleftrightarrow L_1 \cup \dots \cup L_{k-1} \cup L'_k \cup L_{k+1} \cup \dots \cup L_n$  où  $L'_k$  est la somme connexe de  $L_k$ , et  $f_l$  et  $lk(L'_k, f'_k) = lk(L_k, f_k) + lk(L_l, f_l) + 2\eta lk(L_k, L_l)$  avec  $\eta = +1$  si les orientations de  $L_k$  et  $L_l$  sont compatibles,  $\eta = -1$  sinon.*

Par conséquent, si on a un invariant des entrelacs orientés qui est compatible avec les mouvements KI et KII et le changement d'orientation d'une composante, on obtient un invariant des 3-variétés.

Regardons ce qui se passe pour la matrice d'enlacement.

Soit  $L$  un entrelacs et  $L'$  l'entrelacs obtenu en changeant l'orientation de la composante  $L_k$ . Alors les éléments de la matrice d'enlacement  $B_{L'}$  s'expriment en fonction de ceux de  $B_L$  de la manière suivante :  $b'_{ij} = -b_{ij}$  si  $i = k$  ou  $j = k$  et  $(i, j) \neq (k, k)$  et  $b'_{ij} = b_{ij}$  sinon. On a donc  $B_{L'} = {}^t S B_L S$  où  $S = (s_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  est telle que  $S_{ii} = 1$  si  $i \neq k$ ,  $s_{kk} = -1$  et  $s_{ij} = 0$  dans les autres cas.

Soit maintenant  $L$  un entrelacs et  $L'$  l'entrelacs obtenu par glissement de la composante  $L_k$  sur la composante  $L_l$ . Alors on a :  $b'_{ik} = b_{ik} + \eta b_{il}$  si  $i \neq k$ ,  $b'_{kk} = b_{kk} + 2\eta b_{lk} + b_{ll}$  et  $b'_{ij} = b_{ij}$  si  $i \neq k$  et  $j \neq k$ . Autrement dit  $B_{L'} = B_L + \eta B_L E_{lk} + \eta E_{kl} B_L + b_{ll} E_{kk}$ , où  $E_{ij}$  désigne la matrice carrée dont tous les éléments sont nuls excepté celui placé à la  $i^{\text{ème}}$  ligne et  $j^{\text{ème}}$  colonne qui vaut 1. On a donc  $B_{L'} = {}^t (I + \eta E_{lk}) B_L (I + \eta E_{lk})$ .

Soit enfin  $L$  un entrelacs et  $L'$  l'entrelacs obtenu par stabilisation de  $L$ . Alors il est clair que :  $B_{L'} = \begin{pmatrix} B_L & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$

Ces considérations associées au théorème de Kirby conduisent à la définition et la proposition suivantes :

**Définition** : Soient  $B$  et  $B'$  deux matrices symétriques entières. On dit que  $B$  et  $B'$  sont *stablement équivalentes* si elles sont reliées par un nombre fini d'opérations du type :

$$Q_1 : B \leftrightarrow {}^t S B S \text{ où } S \text{ est une matrice carrée entière et } \det S = \pm 1,$$

$$Q_2 : B \leftrightarrow \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

**Proposition** Soient  $L$  et  $L'$  deux entrelacs parallélisés tels que  $S^3(L) \simeq S^3(L')$ . Alors les matrices  $B_L$  et  $B_{L'}$  sont stablement équivalentes.

Autrement dit, la "classe d'équivalence stable de la matrice d'enlacement" est un invariant topologique des 3-variétés.

## 2. Formes d'enlacement

**Définition** : Une *forme d'enlacement* est un couple  $(G, \lambda)$  où  $G$  est un groupe abélien fini et  $\lambda$  une forme bilinéaire symétrique non-singulière sur  $G$  à valeurs dans  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ .

Les formes d'enlacement sont entièrement classifiées à isomorphisme près (Wall [10] et Kawauchi-Kojima[2]).

Soit  $B$  une matrice entière symétrique de taille  $n$ . On considère la suite exacte  $0 \longrightarrow \text{Ker} B \xrightarrow{i} \mathbb{Z}^n \xrightarrow{B} \mathbb{Z}^n \xrightarrow{\delta} \text{Coker } B \rightarrow 0$ . On définit  $(\text{Tors}(\text{Coker } B), \lambda)$

forme d'enlacement associée à  $B$  de la manière suivante : soient  $u$  et  $u'$  éléments de  $\text{Tors}(\text{Coker}B)$ . On suppose que  $N'u' = 0$ . Soient  $z$  et  $z'$  éléments de  $\mathbb{Z}^n$  tels que  $u = \delta(z)$ ,  $u' = \delta(z')$ . Alors le système linéaire  $N'z' = By'$  a une solution  $y' \in \mathbb{Z}^n$  et on pose  $\lambda(u, u') = \frac{1}{N'}t'z \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ . Remarquons que si  $B$  est inversible (dans  $\mathbb{Q}$ )  $\lambda(u, u') = {}^t z' B^{-1} z$ .

**Théorème** [Kneser-Puppe [4], Durfee[1], Kyle[5]] *Pour que deux matrices entières symétriques  $B$  et  $B'$  soient stablement équivalentes il faut et il suffit que  $\text{Coker}B \simeq \text{Coker}B'$  et que leurs formes d'enlacement associées soient isomorphes.*

Toute 3-variété  $M$  possède une forme d'enlacement  $(\text{Tors}H_1(M, \mathbb{Z}), \lambda_M)$  définie comme suit. La suite courte exacte  $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$  induit une suite longue en homologie :

$$\cdots \rightarrow H_2(M, \mathbb{Q}) \rightarrow H_2(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta} H_1(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(M, \mathbb{Q}) \rightarrow \cdots$$

Remarquons que  $\text{Im} \beta = \text{Tors}H_1(M, \mathbb{Z})$ . Pour deux éléments  $u$  et  $u'$  de  $\text{Tors}H_1(M, \mathbb{Z})$  on pose  $\lambda_M(u, u') = u \cdot x' \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  où  $x' \in H_2(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  est tel que  $u' = \beta(x')$  et où la notation  $\cdot$  désigne la forme d'intersection.

**Proposition** *Pour tout entrelacs parallélisé  $L$ , la forme d'enlacement de  $S^3(L)$  est la forme d'enlacement associée à la matrice d'enlacement  $B_L$ .*

### 3. Invariants de Murakami-Ohtsuki-Okada

Pour tout entrelacs parallélisé  $L$ , on pose pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$  :

$$Z_N(L) = \left( \frac{G_N(q)}{|G_N(q)|} \right)^{-\sigma(B_L)} |G_N(q)|^{-n} \sum_{y \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n} q^{t_y B_L y}$$

où  $n$  est le nombre de composantes de  $L$ ,  $\sigma(B_L)$  la signature de la matrice  $B_L$  (nombre de valeurs propres positives moins nombre de valeurs propres négatives),  $q = e^{\frac{2i\pi}{N}}$  (respectivement  $q = e^{\frac{i\pi}{N}}$ ) si  $N$  est impair (respectivement pair) et  $G_N(q) = \sum_{k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} q^{k^2}$  (somme de Gauss).

**Proposition**  $Z_N(L)$  ne dépend que de la classe d'équivalence stable de la matrice d'enlacement  $B_L$ .

On obtient ainsi (en se rappelant la proposition 1) un invariant des 3-variétés connexes fermées orientées, noté  $Z_N(M)$ , en posant  $Z_N(S^3(L)) = Z_N(L)$ . Une autre conséquence importante de la proposition 3, associée à la proposition 2 et au théorème 3, est le résultat suivant :

**Proposition**  $Z_N(M)$  est déterminé par le premier nombre de Betti de  $M$  et la classe d'isomorphisme de la forme d'enlacement  $(\text{Tors}H_1(M, \mathbb{Z}), \lambda)$ .

Mon premier travail a été démontrer une réciproque de ce résultat, qui n'est que partielle, et dont l'énoncé est :

**Théorème** *Deux 3-variétés connexes fermées orientées  $M$  et  $M'$  ont même premier nombre de Betti et des formes d'enlacement isomorphes si et seulement si  $Z_N(M) =$*

$Z_N(M')$  pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$  et  $\text{Tors}_2 H_1(M, \mathbb{Z}) \simeq \text{Tors}_2 H_1(M', \mathbb{Z})$ .

*Notation* : Si  $G$  est un groupe abélien fini,  $p$  un nombre premier,  $G_p$  désigne la composante  $p$ -primaire de  $G$ .

Les outils de démonstration sont essentiellement la classification des formes d'enlacement et une formule d'inversion des sommes de Gauss démontrée dans [7]. Dans la perspective de me "débarrasser" de la condition sur la composante 2-primaire de l'homologie, j'étudie actuellement des raffinements (cohomologiques et spinoriels) des invariants de Murakami-Ohtsuki-Okada.

## Bibliographie

- [1] *Durfee A.H.*, Bilinear and quadratic forms on torsion modules. Adv. in Math. 25 (1977), 133-164.
- [2] *Kawauchi K. and Kojima K.*, Algebraic classification of linking pairings on 3-manifolds. Math. Ann. 253 (1980), 29-42.
- [3] *Kirby R.*, A calculus for framed links in  $S^3$ . Invent. Math. 45 (1978), 35-56.
- [4] *Kneser M. and Puppe P.*, Quadratische Formen und Verschlingungsinvarianten von Knoten. Math. Z. 58 (1953), 376-384.
- [5] *Kyte R.H.*, Branched covering spaces and the quadratic forms of links. Ann. of Math. 59 (1954), 539-548.
- [6] *Lickorish W.B.R.*, A representation of orientable combinatorial 3-manifolds. Ann. of Math. 76(1962), 531-540.
- [7] *Mattes J., Polyak M. and Reshetikin N.*, On invariants of 3-manifolds derived from abelian groups. Quantum Topology, ed. Kauffman L. and Baadhio R., World Scientific (1993), 324-338.
- [8] *Murakami H., Ohtsuki T. and Okada M.*, Invariants of three-manifolds derived from linking matrices of framed links. Osaka J. Math. 29 (1992) 545-572.
- [9] *Watt C.T.C.*, Quadratic forms on finite groups, and related topics. Topology 2 (1964), 281-298.

*Catherine Gille*

Département de Mathématiques, Université de Nantes,  
2, rue de la Houssinière, BP 9220S, 44322 Nantes Cedex 3, France.  
gille@math.univ-nantes.fr

## Propriétés spectrales de certains systèmes dynamiques en théorie ergodique. Produits croisés.

Mélanie Guenais

### Présentation générale.

On s'intéresse aux systèmes dynamiques mesurables  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ , où  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  est un espace de probabilité standard (c'est à dire qu'il est isomorphe à  $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]$  muni d'une mesure borélienne normalisée), et où  $T$  est une transformation de  $X$  dans lui-même telle que  $T$  est bijective, bimesurable sur un ensemble de mesure pleine, et  $T$  préserve la mesure  $\mu$  : on a  $T\mu = \mu$ .

On regarde alors comment se comportent les itérées  $T^n$  de  $T$  sur  $X$  quand  $n$  varie, et on s'intéresse aux propriétés invariantes par isomorphisme de systèmes dynamiques (i.e. qui "transportent" les espaces en même temps que les mesures et les transformations). Parmi celles-ci les principales sont :

*L'ergodicité.* Le système est ergodique lorsque pour tout élément  $A \in \mathcal{B}$ ,  $TA = A$   $\mu$ -presque partout entraîne  $\mu(A) = 0$  ou  $1$ . C'est une sorte d'irréductibilité du système. Cette propriété est aussi équivalente au théorème de Von Neumann : si  $A$  et  $B$  sont des éléments de  $\mathcal{B}$  alors  $\frac{1}{n} \sum_0^n \mu(T^k A \cap B)$  converge vers  $\mu(A)\mu(B)$ .

*Le mélange.* C'est une propriété de bonne répartition dans l'espace, plus forte que la précédente : le système est mélangeant si pour tous les ensembles  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{B}$ , la quantité  $\mu(T^n A \cap B)$  converge vers  $\mu(A)\mu(B)$ .

Ces propriétés dépendent en fait seulement du type spectral du système, que nous définissons maintenant.

### Etude spectrale des systèmes dynamiques mesurables.

Considérons un système  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ , on peut lui associer un opérateur  $U_T$  défini sur  $L^2(X)$  par  $U_T f = f \circ T$ . La théorie spectrale en théorie ergodique consiste alors à décrire les caractéristiques spectrales des opérateurs provenant des systèmes dynamiques.

Soit  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  un système dynamique mesurable, et  $U_T$  l'opérateur de  $L^2(X)$  associé.  $L^2(X)$  est un espace de Hilbert muni du produit  $\langle f, g \rangle = \int_X f \bar{g} d\mu$ .

*La mesure spectrale* associée à une fonction  $f$  dans  $L^2(X)$  est l'unique mesure  $\sigma_f$  sur  $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$  définie par sa transformée de Fourier par  $\hat{\sigma}_f(n) = \langle U_T^n f, f \rangle$  pour  $n \in \mathbb{Z}$ . On établit alors un isomorphisme spectral entre l'espace cyclique fermé  $[U_T, f]$  engendré par  $f$  sous  $U_T$ , muni de l'opérateur  $U_T$ , et  $L^2(\sigma_f)$  muni de l'opérateur de multiplication  $V\psi(x) = e^{2i\pi x}\psi(x)$ .

On définit maintenant le *type spectral maximal* de  $U_T$  comme la mesure  $\sigma$  de  $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$ , qui vérifie : il existe une fonction  $f \in L^2(X)$  telle que  $\sigma$  soit la mesure spectrale associée à  $f$ , et telle que pour toute fonction  $g$  dans  $L^2(X)$ , on ait  $\sigma_g \ll \sigma$ . Le type spectral maximal est défini de façon unique, à une équivalence près. Nous n'utiliserons par la suite que le *type spectral* (maximal réduit) de  $U_T$  qui

représente la plus grande des mesures spectrales associées aux fonctions de  $L^2(X)$  d'intégrale nulle, que nous noterons encore  $\sigma$ .

**Remarque.** Les propriétés d'ergodicité et de mélange sont en fait des propriétés du type spectral du système. L'ergodicité signifie que le type spectral du système n'a pas de masse en 0, le mélange est équivalent à  $\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{\sigma}(n) = 0$ .

Enfin, on peut établir une décomposition spectrale de  $L^2(X)$  sous la forme  $L^2(X) = \bigoplus_{n>0} [U_T, f_n]$  où les mesures spectrales associées aux  $f_n, \sigma_n$  vérifient  $\sigma_n \ll \sigma_{n-1}$ , et  $\sigma_1$  est le type spectral maximal de  $U_T$ . Soit  $B_n \in \mathcal{B}$  tel que  $\sigma_n \sim 1_{B_n} \sigma_1$ , alors la fonction de multiplicité du système est définie  $\sigma_1$ -presque partout sur  $[0, 1]$  par  $m = \sum_1^\infty 1_{B_n}$ .

L'opérateur  $U_T$  est alors déterminé par  $\sigma$  et  $m$ . Nous dirons que  $U_T$  admet un spectre simple si  $m = 1$ .

### Les produits croisés.

**Definition.** Soit  $T$  une rotation ergodique sur un groupe compact  $(X, \mathbb{B}, \mu)$  muni de sa mesure de Haar normalisée, et  $(G, \mathcal{G}, m)$  un groupe abélien compact muni aussi de sa mesure de Haar. On considère une application mesurable  $\phi$  de  $X$  à valeurs dans  $G$  (qu'on appelle cocycle); alors la transformation associée à  $\phi$  au dessus de  $T$ , appelée *produit croisé*, est la transformation  $T_\phi$  sur  $X \times G$  définie par

$$T_\phi(x, g) = (Tx, g + \phi(x)).$$

$(X \times G, \mathcal{B} \otimes \mathcal{G}, \mu \otimes m, T_\phi)$  définit alors un nouveau système dynamique mesurable. On étudie maintenant l'opérateur de  $L^2(X \times G)$ ,  $U_{T_\phi}$ , associé à  $T_\phi$ . Comme  $G$  est compact, son groupe dual  $\widehat{G}$  est discret, et on peut décomposer  $L^2(X \times G)$  sous la forme  $L^2(X \times G) = \bigoplus_{\chi \in \widehat{G}} L_\chi$ , avec  $L_\chi = \{f(x)\chi(y), f \in L^2(X)\}$ . Chaque  $L_\chi$  est invariant par  $U_{T_\phi}$ , et la restriction de celui-ci à  $L_\chi$  est unitairement équivalente à l'opérateur sur  $L^2(X)$ ,  $V_\chi$ , défini par  $V_\chi f = \chi \circ \phi \cdot f \circ T$ . L'étude spectrale de  $U_{T_\phi}$  se ramène alors à l'étude de la famille  $(V_\chi)_{\chi \in \widehat{G}}$ .

Plusieurs résultats concernant ces transformations ont été établis. En particulier H. Helson a montré dans [6] que le type spectral de  $V_\chi$  est soit discret, soit continu et purement singulier (i.e. étranger à la mesure de Lebesgue), soit équivalent à la mesure de Lebesgue, et que la fonction de multiplicité est constante. Ceci simplifie significativement l'étude de ces systèmes.

### Etude de la multiplicité spectrale dans le cas $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{T}$ .

Un autre résultat ([11]) prouve la simplicité spectrale générique de ces produits croisés. Au contraire dans le cas où  $T$  est une rotation irrationnelle sur  $X = \mathbb{T}$ , [7] démontre que le type spectral est égal à la mesure de Lebesgue dès que  $\phi$  est une fonction suffisamment régulière, et dont l'intégrale de la dérivée est non nulle. Ceci entraîne la multiplicité infinie de  $U_{T_\phi}$ . En fait, pratiquement aucun résultat sur la multiplicité des opérateurs  $V_\chi$  n'est connu, sauf dans les cas simples (si  $\phi(x) = x$ , la multiplicité vaut  $n$  avec  $\chi(x) = e^{2i\pi nx}$ ).

Un premier travail ([5]) a porté sur l'étude de cette multiplicité spectrale en fonction de la régularité du cocycle : j'ai pu établir les théorèmes suivants

**Théorème 1** *Soit  $\alpha$  un nombre irrationnel de  $[0, 1]$ , et  $\phi$  une fonction à variation bornée de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ , alors la multiplicité spectrale de l'opérateur  $V$  défini sur  $L^2(\mathbb{T})$  par  $Vf(x) = e^{2i\pi\phi(x)}f(x + \alpha)$  est finie, majorée par  $\max(2, \frac{2\pi}{3}\text{Var}(\phi))$ .*

**Théorème 2** *Soit  $\alpha$  un nombre irrationnel de  $[0, 1]$ ,  $\phi$  une fonction absolument continue de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  et  $\beta = \int_0^1 \phi'(t)dt$ . La multiplicité spectrale de l'opérateur  $V$  est finie, strictement inférieure à  $|\beta| + 1$  si  $\beta$  est non nul. Si  $\beta = 0$ , le spectre est simple.*

Nous pouvons remarquer que la seconde majoration est optimale dans les cas connus.

La preuve repose sur un corollaire du lemme de Chacon, qui permet de majorer la multiplicité spectrale en fonction de l'«espace» occupé par une suite de sous-espaces cycliques  $H_n = [V, f_n]$  dans  $L^2(X)$ .

**Corollaire** ([2]) *S'il existe une suite de sous-espaces fermés cycliques  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $0 < c < 1$  tels que pour toute fonction  $f \in L^2(X)$  normée,  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} d^2(f, H_n) \leq 1 - c$ ,*

*alors  $V$  est de multiplicité finie  $m < \frac{1}{c}$ .*

Nous savons construire pour la rotation  $Tx = x + \alpha$  pour  $x \in \mathbb{T}$ , des suites de sous-espaces cycliques qui satisfont le corollaire précédent : soit  $(q_n)$  la suite des dénominateurs de la fraction continue de  $\alpha$ , et  $\alpha_n = \min \{|q_n\alpha - p|, p \in \mathbb{N}\}$ . Alors  $(T^j [0, \alpha_n])_{0 \leq j < q_{n+1}}$  est un ensemble d'intervalles deux à deux disjoints (c'est une tour), dont la mesure totale converge vers  $\lambda > 1/2$  (quitte à prendre une sous-suite). Comme  $\alpha_n$  tend vers 0, toute fonction normée  $f \in L^2$  vérifie  $\|f1_{\cup T^j [0, \alpha_n]} - \pi_n f\|_2 \rightarrow 0$ , où  $\pi_n$  est le projecteur orthogonal sur l'espace engendré par les  $1_{T^j [0, \alpha_n]}$  pour  $0 \leq j < q_{n+1}$ . Soit  $f_n = 1_{[0, \alpha_n]} / \sqrt{\alpha_n}$ ; on a donc l'inégalité  $d^2(f, [U_T, f_n]) \geq \|f\|_2^2 - \|\pi_n f\|_2^2$ . Comme  $\|\pi_n f\|_2 \sim \|f1_{\cup T^j B_n}\|_2$ , il suffit de montrer la convergence de  $\|f1_{\cup T^j B_n}\|_2$  vers  $\lambda \|f\|_2$  : c'est un résultat sur l'indépendance asymptotique des tours de la rotation. La suite d'espaces cycliques  $[U_T, f_n]$  satisfait alors la condition du corollaire avec  $c = \lambda$ , et le corollaire suffit à montrer la simplicité spectrale pour  $T$ .

L'idée suivante consiste à considérer les espaces cycliques  $[V, f_n]$ , pour vérifier la validité du corollaire. Comme pour la rotation on se restreint, à  $n$  fixé, au sous-espace  $H_n$  engendré par les fonctions  $f_n$  pour  $0 \leq j < q_{n+1}$ , et on cherche à minorer la norme de la projection sur  $H_n$  d'une fonction normée. Les expressions obtenues permettent de calculer explicitement cette borne dans le cas d'un cocycle affine  $\phi(x) = \beta x$ . Le cas absolument continu se fait en deux parties : on montre d'abord, en utilisant le théorème ergodique ponctuel, la simplicité spectrale de  $V$  quand  $\int_0^1 \phi' d\mu = 0$  ( $\phi$  est de degré 0). Dans le cas d'un cocycle de degré non nul, on décompose celui-ci en une somme d'un cocycle affine et d'un cocycle de degré 0, ce qui permet d'obtenir la

même majoration que pour le cas affine. Enfin pour un cocycle à variation bornée, le calcul se fait directement, moins finement que dans les cas précédents.

**Etude du type spectral dans le cas  $G = \{0, 1\}$ .**

Ce cas est particulièrement intéressant si on étudie des systèmes à multiplicité 1 : en effet l'étude spectrale de  $U_{T_\phi}$  est réduite à celle de l'opérateur  $U_T$  dont le spectre est simple et discret, et de l'opérateur  $V$  de  $L^2(X)$  défini par  $Vf = e^{i\pi\phi} f \circ T$ . Dès que  $V$  admet un spectre simple et continu,  $U_{T_\phi}$  a pour multiplicité 1, et son type spectral est la somme des types spectraux de  $U_T$  et  $V$ . Dans le cadre d'un problème classique sur l'existence de transformations à spectre de Lebesgue simple, nous nous intéressons à une sous-question portant sur l'existence de systèmes de multiplicité 1, avec un type spectral à composante de Lebesgue. Nous allons utiliser ici une méthode permettant d'exprimer la mesure spectrale de  $V$  associée à 1, à partir d'une construction de  $T$  de façon récurrente : comme nous savons que le type spectral est soit purement singulier, soit égal à la mesure de Lebesgue, une seule mesure spectrale permet de donner la nature du type spectral. Etant donnée une suite d'entiers  $(p_n)_{n \geq 0}$ , et  $h_{n+1} = p_n h_n$  ( $h_0 = 1$ ), nous considérons  $T$  comme la rotation de 1 sur le groupe compact des entiers  $h_n$ -adiques,  $X = \{x = \sum_{n \geq 0} x_n h_n, 0 \leq x_n < p_n\}$ , muni de sa mesure de Haar  $\mu$  (le système est appelé odomètre). Notons  $B_0 = X$  et  $B_n = \{x \in X, x_0 = \dots = x_{n-1} = 0\}$ , nous obtenons ainsi une suite de partitions  $(T^j B_n, 0 \leq j < h_n)$  qui convergent vers la partition ponctuelle, et qui représente l'action de  $T$  sur  $X$  (c'est une suite de tours pour  $T$ ). Nous construisons sur ces tours, des cocycles que nous appelons *cocycles de Morse*, à valeurs dans  $\{0, 1\}$ , et qui sont constants sur chacun des  $T^j B_n$ , pour  $0 \leq j < h_n - 1$ . Les produits gauches obtenus (qu'on appelle extensions de Morse) correspondent aux transformations provenant des suites de Morses généralisées de [8]. J'ai alors établi le résultat suivant ([4])

**Théorème 3** *Il existe un cocycle de Morse avec un spectre de Lebesgue simple, et donc une extension de Morse admettant un spectre simple avec une composante de Lebesgue, si et seulement si il existe une suite de polynômes trigonométriques*

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{p_n-1} \varepsilon_n(j) e^{2i\pi j x} \quad \text{sur } \mathbb{T}$$

où  $p_n \geq 2$  et  $\varepsilon_n(j) = \pm 1$  pour  $0 \leq j < p_n$  et telle que  $\|P_n\|_1 / \sqrt{p_n}$  converge vers 1.

**Corollaire** *Si  $(p_n)$  contient une sous-suite bornée, alors les extensions de Morse associées admettent un type spectral purement singulier.*

La preuve repose sur une expression explicite de la mesure spectrale, obtenue par une méthode utilisée dans [3] pour les transformations de rang 1.

Remarquons d'abord que  $B_n = \cup_0^{p_n-1} T^{jh_n} B_{n+1}$ ; comme  $\phi$  est constant sur les  $T^j B_n$  pour  $0 \leq j < h_n - 1$ , en notant  $f_n = 1_{B_n} / \sqrt{\mu(B_n)}$ , nous obtenons la relation de récurrence  $f_n = \frac{1}{\sqrt{p_n}} \sum_0^{p_n-1} \varepsilon_n(j) V^{-jh_n} (f_{n+1})$ , où les  $\varepsilon_n(j)$  sont des coefficients

à valeurs  $\pm 1$ , définis par les valeurs de  $\phi$  sur la tour d'indice  $n$ . En posant  $P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{p_n}} \sum_0^{p_n-1} \varepsilon_n(j) e^{-2i\pi j h_n x}$  nous obtenons l'égalité  $\sigma_{f_n} = |P_n|^2 \sigma_{f_{n+1}}$ . Par suite nous établissons que la mesure spectrale associée à  $f_0 = 1$  est égale à la limite vague des mesures  $\prod_0^N |P_n|^2 \lambda$  quand  $N$  tend vers l'infini (qu'on appelle produit de Riesz généralisé). La condition du théorème vient d'une condition de singularité pour ces produits de Riesz généralisés donnée par J. Bourgain dans [1], énoncée de façon plus précise dans [9] : une telle mesure est purement singulière si et seulement si nous avons  $\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \prod_0^N P_n \right\|_1 = 0$ .

En utilisant la bonne répartition des fréquences des polynômes  $P_n$ , nous simplifions le critère précédent en le remplaçant par une condition sur la limite des  $\|P_n\|_1$ , ce qui conduit au théorème.

## Bibliographie

- [1] *J. Bourgain*. On the spectral type of Ornstein's class one transformations. *Israel J. of Math.*, 84 :53-63, 1993.
- [2] *R. V. Chacon*. Approximation and spectral multiplicity. In A. Dold, Heidelberg, and B. Eckmann, editors, *Contributions to ergodic theory and probability*, pages 18-27, Berlin, 1970. Springer.
- [3] *J. Choski and M. Nadkarni*. The maximal spectral type of a rank one transformation. *Canad. Math. Bull.*, 37 :29-36, 1994.
- [4] *M. Guenais*. Non singularity condition for Morse extensions. *submitted to Ergodic Th. and Dyn. Syst.*, 1997.
- [5] *M. Guenais*. Une majoration de la multiplicité spectrale d'opérateurs associés à des cocycles réguliers. *Preprint in Isr. J. of Math.*, 1997.
- [6] *H. Helson*. Cocycles on the circle. *J. Operator Th.*, 16 :189-199, 1986.
- [7] *A. Iwanik, M. Lemańczyk, and D. Rudolph*. Absolutely continuous cocycles over irrational rotations. *Isr. J. Math.*, 83 :73-95, 1993.
- [8] *M. Keane*. Generalized Morse sequences. *Z. Wahr. Verw. Geb.*, 10 :335-353, 1968.
- [9] *I. Klemes and K. Reinhold*. Rank one transformations with singular spectral type. *Preprint*, 1994.

- [10] *M. Queffélec*. Substitution dynamical systems- Spectral analysis. In A. Dold and B. Eckmann, editors, *Lecture Notes in Mathematics*, volume 1294. Springer-Verlag, 1987.
- [11] *E.A. Robinson*. Non abelian extensions have nonsimple spectrum. *Compositio. Math*, 65 :155-170, 1988.

*Mélanie Guenais*  
Mathématiques, Université Paris XIII  
Avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse

## Difféomorphismes hyperboliques des surfaces compactes et combinatoire des partitions de Markov

Emmanuelle Jeandenans

Ce travail contribue à l'étude des systèmes dynamiques hyperboliques des surfaces compactes. Plus précisément, on s'intéresse aux difféomorphismes de surfaces compactes qui préservent l'orientation et vérifient l'axiome *A* et la condition de transversalité forte. L'axiome *A* dit que l'ensemble des points *non-errants*  $\Omega(f)$  est *hyperbolique* et égal à l'adhérence de l'ensemble des points périodiques, et pour tout couple  $(x, y)$  d'éléments de  $\Omega(f)$ , la transversalité forte interdit toute tangence entre la variété stable de  $x$  et la variété instable de  $y$  (cf. par exemple [5] et [7]).

Un théorème classique de systèmes dynamiques (Anosov, Moser, Palis et Smale, Robbin, Robinson pour le sens direct ; Mañé pour la réciproque) justifie qu'on s'intéresse à cette classe d'applications : il établit l'équivalence entre les deux propriétés d'axiome *A* et de transversalité forte et la *stabilité  $C^1$ -structurelle* d'un difféomorphisme  $f$  de la surface  $S$  qui les vérifie. Sur la surface  $S$ , l'union de toutes les variétés stables et instables issues des points non-errants dessinent une sorte de "toile" irrégulière (au sens où certains "fils" sont isolés d'un côté), dont Poincaré, en 1899, avait eu l'intuition (mais la complexité de la figure l'avait rapidement effrayé) [6]. Le bord des "trous" de cette "toile" (ou, si l'on préfère, le contour du dessin), *i.e.* l'union des variétés invariantes transversalement isolées (d'un côté au moins) de l'ensemble non-errant  $\Omega(f)$ , joue un rôle important dans l'organisation du tracé. D'après un théorème de Newhouse et Palis [4], cette union est l'union d'un nombre fini de variétés invariantes toutes issues de points périodiques. Nous les appellerons *variétés invariantes bords et points périodiques bords*.

Le premier résultat présenté ici est motivé par un théorème de Thurston [2], qui dit qu'un difféomorphisme d'une surface fermée de genre au moins 2 possède, dans sa classe d'isotopie (homotopie parmi les difféomorphismes), un représentant particulier. Cet élément canonique, s'il n'est pas périodique et s'il ne préserve pas un système fini de courbes simples fermées deux à deux disjointes dans la surface, est *pseudo-Anosov* : il laisse invariants deux feuilletages transverses ayant même ensemble fini de singularités (qui sont des selles à au moins trois branches) et admettant chacun une mesure transverse invariante par holonomie, l'une contractée et l'autre dilatée par la dynamique. On généralise la définition d'homéomorphisme pseudo-Anosov en notion d'homéomorphisme pseudo-Anosov avec points marqués si l'on autorise des singularités à une branche, appelées épines.

On remarque naïvement qu'en dehors des singularités, les feuilletages invariants mesurés transverses d'un homéomorphisme pseudo-Anosov ressemblent fortement à une structure hyperbolique. Pour suivre cette idée, considérons un difféomorphisme  $f$   $C^1$ -structurellement stable en restriction à un "bon" voisinage d'une de ses *pièces*

*basiques* : c'est un ouvert invariant et de topologie finie, appelé *domaine*, dont Bonatti et Langevin ont montré l'existence dans [1]. On montre alors que si le dessin de ses variétés invariantes (bords) ne présente pas de "bigone" (formé d'un segment stable et d'un segment instable) dont seules les extrémités sont des points de  $\Omega(f)$  (nous appellerons ces bigones des *impasses*),  $f$  est le *dérivé* d'un homéomorphisme pseudo-Anosov : on retrouve  $f$  en "ouvrant" certaines des séparatrices issues des singularités de l'homéomorphisme pseudo-Anosov de la classe d'isotopie de  $f$  [1][3].

**Théorème 1** *Soit  $f$  un difféomorphisme  $C^1$ -structurellement stable, préservant l'orientation, d'une surface compacte orientée  $S$ . Soient  $K$  une pièce basique et  $\Delta(K)$  son domaine. Supposons qu'il n'existe aucune impasse associée à  $K$ . Il existe alors une surface compacte  $M$ , un homéomorphisme pseudo-Anosov avec points marqués  $\varphi$  de  $M$  et une application continue surjective  $\pi$  de  $\Delta(K)$  dans  $M$  tels que*

$$\pi \circ f|_{\Delta(K)} = \varphi \circ \pi.$$

*De plus, la semi-conjugaison  $\pi$  est injective sur les orbites périodiques sauf sur celles de type bord (qui sont en nombre fini).*

Le programme de recherche où s'intègre ce travail avait pour but initial de comprendre d'un point de vue topologique les difféomorphismes  $C^1$ -structurellement stables des surfaces compactes afin, entre autre, de les classer à conjugaison topologique près. Bonatti et Langevin ont construit un outil approprié à cette classification. Ce sont les *partitions de Markov géométrisées* : à la définition classique de partition de Markov, on adjoint une donnée géométrique qui est le sens dans lequel l'image d'un rectangle traverse un rectangle de la partition (de bas en haut ou réciproquement). Bonatti et Langevin ont montré comment associer des partitions de Markov géométrisées (dont les côtés des rectangles sont des segments de variétés stables ou instables) à un difféomorphisme  $C^1$ -structurellement stable, et prouvé que si deux tels difféomorphismes admettaient une même partition de Markov géométrisée, ils étaient topologiquement conjugués [1]. Mais *a priori*, autant de difféomorphismes, autant de partitions ! Il faut encore, pour conclure ce travail de classification, définir une famille finie de partitions de Markov géométrisées modèles et donner un algorithme fini permettant de passer d'une partition quelconque décrivant un difféomorphisme donné à une partition de la famille de modèles.

Le problème de la synthèse étudié ici est le suivant : si l'on se donne une partition de Markov géométrisée, à quelle(s) condition(s) correspond-elle à un difféomorphisme  $C^1$ -structurellement stable d'une surface compacte (on dira dans ce cas qu'elle est *réalisable*) ? Une surface compacte est nécessairement de genre fini donc le genre minimal d'une surface contenant une partition réalisable et tous ses itérés doit être fini. Précisons cette condition nécessaire à la réalisabilité. Étant donnée une partition de Markov géométrisée  $T$  à  $n$  rectangles et d'application  $\phi$ , on construit une suite de surfaces compactes à bord en collant, par la dynamique, un nombre

croissant de copies de l'union des rectangles de la partition sur les  $n$  rectangles initiaux :  $\mathcal{R} = \cup R_i \subset \mathcal{R}_1 \subset \dots \subset \mathcal{R}_m \dots$  est égale à  $\coprod_{i=0}^m \mathcal{R} \times \{i\}$  quotienté par  $(x, i) = (\phi^{-1}(x), i + 1)$ . Soit  $g_m$  le genre de la surface  $\mathcal{R}_m$ . Si la partition de Markov géométrisée  $T$  est réalisable, la suite  $(g_m)$  ne doit pas tendre vers  $+\infty$  mais se stabiliser au bout d'un nombre fini de collages (à préciser en fonction de  $n$ ). On appellera la limite (finie ou non) de  $(g_m)$  le *genre de la partition de Markov géométrisée  $T$* .

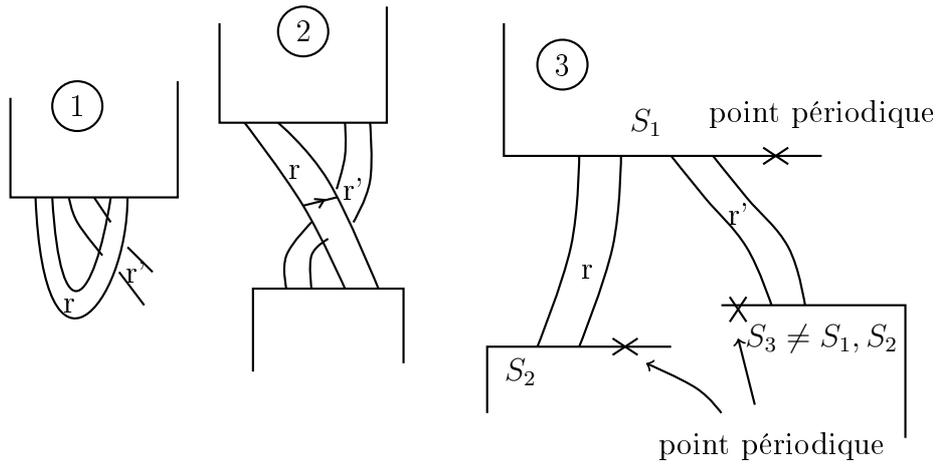


Figure 1: Les trois obstructions.

Une première étape pour répondre à la question donne une caractérisation des partitions de Markov géométrisées de genre fini, grâce à trois dessins topologiques (les *obstructions*, cf. la figure 1) qui ne doivent pas exister dans la surface  $\mathcal{R}_{6n}$  [1] [3].

**Théorème 2** Soit  $T$  une partition de Markov géométrisée à  $n$  rectangles. On a équivalence entre

1.  $T$  est de genre fini, égal au genre de  $\mathcal{R}_{6n}$  ;
2.  $\mathcal{R}_{6n}$  ne présente aucune des trois obstructions.

Une étude plus particulière des partitions à un rectangle donne que leur genre, s'il est fini, est nul, et on peut généraliser cette estimation en majorant strictement le genre d'une partition à  $n$  rectangles, s'il est fini, par  $n(2n - 1)$ .

En résumé, nous avons vu qu'une partition de Markov géométrisée à  $n$  rectangles, si elle est réalisable, est de genre fini, ce qui équivaut à dire que la surface compacte à bord  $\mathcal{R}_{6n}$ , ne présente aucune des trois obstructions. Le résultat suivant apporte un élément de réponse au sens qui manque pour conclure (de genre fini  $\implies$  réalisable) [1] [3]

**Proposition** Il n'y a pas d'obstruction topologique à ce qu'une partition de Markov de genre fini soit réalisable.

Pour montrer ceci, on construit une surface compacte sans bord  $\mathcal{M}$  contenant la partition et tous ses itérés par la dynamique, *i.e.* toutes les surfaces  $\mathcal{R}_m \forall m \in \mathbb{Z}$ , et un homéomorphisme de  $\mathcal{M}$  qui prolonge la dynamique de la partition de Markov et qui possède seulement un nombre fini de points périodiques, tous attracteurs ou répulseurs hyperboliques, en dehors des rectangles initiaux de la partition. L'étude serait complète si cet homéomorphisme était un difféomorphisme ; on peut conjecturer que le résultat persiste dans ce cas, le trou actuel dans la démonstration étant le contrôle de l'hyperbolicité aux points périodiques situés sur le bord des rectangles.

## Bibliographie

- [1] *C. Bonatti, R. Langevin*, avec la collaboration de *E. Jeandenans* Difféomorphismes de Smale des surfaces, prépublication du laboratoire de topologie de Dijon (France), mars 96, soumis à publication à Astérisque
- [2] *A. Fathi, F. Laubenbach, V. Poénaru* Travaux de Thurston sur les surfaces, Astérisque 67 (1979)
- [3] *E. Jeandenans* Difféomorphismes hyperboliques des surfaces et combinatoire des partitions de Markov, thèse de l'université de Bourgogne, septembre 96
- [4] *S. Newhouse, J. Palis* Hyperbolic nonwandering sets on two-dimensional manifolds, Dyn. Systems Peixoto ed. Salvador (1973), 293-301
- [5] *J. Palis, W. de Melo* Geometric theory of dynamical systems, an introduction, Springer-Verlag
- [6] *H. Poincaré* Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Les grands classiques Gauthier-Villars, librairie Blanchard
- [7] *M. Shub* Stabilité globale des systèmes dynamiques, Astérisque 56 (1978)

*Emmanuelle Jeandenans*  
 IRMAR, Université de Rennes I  
 Campus de Beaulieu, 35042 Rennes CEDEX

## Problèmes de descente galoisienne

*Sylvie Monier-Derviaux*

Un problème naturel de théorie de Galois classique est le suivant.

**Problème de l'extension incomplète :** Soit  $E/K$  une extension galoisienne. Si  $L/K$  est une sous-extension galoisienne de  $E/K$ , existe-t-il une sous-extension galoisienne  $M/K$  de  $E/K$  telle que  $L \cap M = K$  et  $E = LM$  ?

On montre aisément que cette question n'est qu'un cas particulier du plus général problème de la descente galoisienne : Soit  $E/K$  une extension galoisienne. Etant donnée une extension algébrique  $K/J$ , existe-t-il un sous-corps  $D \subseteq E$ , galoisien sur  $J$ , tel que  $D \cap K = J$  et  $E = DK$  ?

Dans ce cas, on dira que l'extension  $D/J$  est "descendue" de  $E/K$  (en abrégé  $(D/J) = \text{desc}_J(E/K)$ ) ou que  $E/K$  est "descendable sur  $J$ " ( $(E/K)_{\text{desc}_J}$ ).

On résout positivement le problème de l'extension incomplète pour une sous-extension cyclique de degré  $p^n$  d'une  $p$ -extension homocyclique d'exposant  $p^n$  (c.f. Prop.1). Pour une généralisation, on se heurte au manque de critère d'existence d'un complément facteur direct à un sous-groupe donné. Lorsque l'on impose des conditions arithmétiques sur les degrés des extensions considérées, on dispose d'un théorème de Zassenhaus qui induit l'argument de théorie des groupes de l'objet principal de ce travail (autre cas particulier du problème de la descente galoisienne) :

**Problème de la descente cyclotomique :** Soit  $p$  un nombre premier impair. Soient  $K$  un corps de caractéristique différente de  $p$  contenant le groupe  $\mu_p$  des racines  $p$ -ièmes de l'unité, et  $J \subseteq K$  un sous-corps de  $K$  ne contenant pas  $\mu_p$  :  $J \cap \mu_p = \{1\}$ . Si l'on se donne une  $p$ -extension galoisienne  $E/K$ , est-elle descendable sur  $J$  :  $(E/K)_{\text{desc}_J}$  ?

Dans [1], G. Brattström répond affirmativement pour tout  $p$  premier impair,  $K = J(\mu_p)$  et  $E/K$  une  $p$ -extension galoisienne non abélienne de degré  $p^3$ . On généralise ici ce résultat au cas d'une  $p$ -extension galoisienne quelconque  $E/K$  de la façon suivante. On réduit d'abord la difficulté, en termes d'existence de descendues, en quotientant le groupe de Galois de  $E/K$  par son sous-groupe de Frattini, ce qui permet de se ramener au cas d'une  $p$ -extension homocyclique d'exposant  $p$ . On ajoute ensuite une classe de cohomologie au problème de descente, et l'on résout un problème de plongement non kummérien au moyen de la descente d'une solution du problème translaté fournie par les théorèmes de Massy [6, 7].

Enfin, pour une extension de base  $E/J$  galoisienne finie de degré quelconque, on montre, modulo une hypothèse de descente, que l'obstruction à ce qu'un corps  $N$ , de degré  $p$  sur  $E$ , soit galoisien sur  $J$ , se concentre uniquement sur une  $p$ -sous-extension de  $E/J$ . On reformule ainsi un résultat récent de [4].

Nous nous limitons dans ce texte à des extensions finies.

## Enoncé des résultats

Un critère général d'existence de descendues est le suivant.

**Lemme 1** *Soient  $E/K$  et  $K/J$  deux extensions galoisiennes.*

*Les conditions suivantes sont alors équivalentes :*

- (1) *L'extension  $E/K$  est descendable sur  $J$*
- (2) *L'extension  $E/J$  est galoisienne, et le groupe  $\Gamma := \text{Gal}(E/K)$  admet un complément facteur direct dans  $\text{Gal}(E/K)$ .*

### 1. Problème de l'extension incomplète

**Lemme 2** *Le problème de l'extension incomplète est équivalent à la question de l'existence d'un complément facteur direct de  $\text{Gal}(E/L)$  dans  $\text{Gal}(E/K)$ . Il est aussi équivalent à la question de savoir si  $E/L$  est descendable sur  $K$ .*

Sans les conditions arithmétiques du théorème de Zassenhaus, on connaît peu de critères d'existence de complément facteur direct. Soit  $G$  un  $p$ -groupe homocyclique d'exposant  $p^n$ , c'est à dire produit direct de groupes cycliques du même ordre  $p^n$ . Tout sous-groupe  $H$  de  $G$  tel que le quotient  $G/H$  soit cyclique d'ordre  $p^n$  est facteur direct dans  $G$ .

**Proposition 1** *Soit  $E/K$  une  $p$ -extension galoisienne de groupe de Galois homocyclique d'exposant  $p^n$ . Pour toute sous-extension cyclique, de degré  $p^n$ ,  $L/K$  de  $E/K$ , il existe une sous-extension galoisienne  $M$  de  $E/K$  telle que  $L \cap M = K$  et  $E = LM$ .*

### 2. Problème de la descente cyclotomique

Ici, les degrés  $[E : K]$  et  $[K : J]$  sont premiers entre eux, et l'on dispose, pour les groupes, d'un résultat profond d'existence de complément par le théorème de Zassenhaus (c.f. [4] ; p.126(127),18.1(18.2)). Il fournit directement une condition nécessaire et suffisante d'existence de descendues dans le cas abélien.

**Proposition 2** *Soient  $K/J$  et  $E/K$  deux extensions abéliennes de degrés premiers entre eux. L'extension  $E/K$  admet une descendue parallèlement à  $K/J$  si et seulement si l'extension  $E/J$  est abélienne.*

Dans le cas non nécessairement abélien, on réduit la difficulté en quotientant le groupe donné par son sous-groupe de Frattini  $\Phi()$ . On en déduit le critère suivant.

**Théorème 1** [8] *Soient  $p$  un nombre premier impair et  $K/J$  une extension galoisienne finie telle que  $p$  ne divise pas le degré  $[K : J]$ . Soit  $E/K$  une  $p$ -extension galoisienne de groupe  $\Gamma := \text{Gal}(E/K)$ .*

- (1) *Pour que  $E/K$  admette une descendue  $D/J$ , il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :*

(1.1) *L'extension  $E/J$  est galoisienne*

(1.2) *L'extension  $E^{\Phi(\Gamma)}/K$  admet une descendue  $F/J$ , où  $E^{\Phi(\Gamma)}$  désigne le corps des invariants dans  $E$  du sous-groupe de Frattini de  $\Gamma$ .*

- (2) *Lorsqu' elle existe, la descendue est unique. Précisément, supposons que  $E/K$*

admette une descendue  $D/J$ . Le sous-groupe  $F$  de  $\text{Gal}(E/J)$  admet un unique complément  $V$ . Ce complément  $V$  est facteur direct, et l'on a  $D = E^V$ .

Le problème de l'obtention de formules pour la construction des  $p$ -extensions galoisiennes fut initié par Witt [10] en 1936. Répondant à une question de Serre [9], R. Massy [6, 7] a traité en général du problème de plongement à noyau d'ordre  $p$  des  $p$ -extensions kummériennes. On veut maintenant résoudre le même problème pour une  $p$ -extension  $L/J$ , encore abélienne, mais dont le corps de base ne contient plus cette fois les racines  $p$ -ièmes de l'unité :  $J \cap \mu_p = \{1\}$ . Une méthode consiste à décider si le problème translaté pour  $(L(\mu_p)/J(\mu_p))$  admet ou non des solutions, puis à descendre l'une d'entre elles lorsqu'elle existe. Le théorème 1 s'appliquant à l'extension cyclotomique  $(K = J(\mu_p))/J$ , on se ramène au cas où le groupe  $\text{Gal}(L/J)$  est d'exposant  $p$ . Le théorème suivant construit alors explicitement une solution d'un problème de plongement non kummérien en termes d'une solution du problème translaté.

**Théorème 2** Soit  $E/(K = J(\mu_p))$  une  $p$ -extension homocyclique d'exposant  $p$  de groupe  $\Gamma := \text{Gal}(E/K)$ . Supposons l'extension  $E/J$  abélienne et soit  $(L/J) = \text{desc}_j(E/K)$  (c.f. Prop.2). Notons :

- $F_p$  le corps à  $p$  éléments,
- $\zeta_p$  une racine primitive  $p$ -ième de l'unité :  $\mu_p = \langle \zeta_p \rangle$ ,
- $d := [K : J]$ ,
- $\text{Nor}(K, E) := \left\{ x \in E^\times / \forall \gamma \in \Gamma \frac{\gamma(x)}{x} \in E^{\times p} \right\}$ ,
- $V := \text{Gal}(E/L)$  l'unique complément de  $F$  dans  $\text{Gal}(E/J)$  (c.f. Th.1(2)),
- $i(v)$  l'entier de  $\mathbb{F}_p^x$  tel que  $v(\zeta_p) = \zeta_p^{i(v)}$  ( $v \in V$ ),
- $g_{E/L}$  l'endomorphisme de  $\text{Nor}(K, E)$  défini par  $g_{E/L}(\cdot) = \prod_{v \in V} v^{-1}(\cdot)^{i(v)}$ ,
- $\text{Nor}(J, K, E, L) := \left\{ x \in \text{Nor}(K, E) / g_{E/L}(x) \equiv x^d \pmod{E^{\times p}} \right\}$ .

(1) Un corps  $D$ , de degré  $p$  sur  $L$ , est galoisien sur  $J$  si et seulement s'il existe un élément  $x$  dans  $\text{Nor}(J, K, E, L) - E^{\times p}$  tel que  $D \subseteq N := E(x^{1/p})$ .

(2) Supposons qu'il existe un corps  $D$  vérifiant les conditions du (1). Alors pour tout  $x \in \text{Nor}(J, K, E, L) - E^{\times p}$  tel que  $D \subseteq N := E(x^{1/p})$ , on a

$$(D/L) = \text{desc}_L(N/E), (D/J) = \text{desc}_J(N/K).$$

De plus, pour l'unique complément  $V'$  de  $\text{Gal}(N/K)$  dans  $\text{Gal}(N/J)$ , la trace d'une racine  $p$ -ième quelconque, mais fixée,  $x^{1/p}$  de  $x$  fournit un élément primitif de  $D$  sur  $L$  :

$$D = L \left( \sum_{v' \in V'} v'(x^{1/p}) \right)$$

(3)  $g_{E/L}(\text{Nor}(K, E)) \subseteq \text{Nor}(J, K, E, L)$ .

(4) Un problème de plongement  $(L/J, \varepsilon)$  ( $\varepsilon \in H^2(\Gamma, \mathbf{F}_p)$ ) est résoluble si et seulement si le problème translaté  $(E/K, e)$  est résoluble (cf. [2], [3]).

(5) Tout problème résoluble  $(E/K, E)$  admet une solution  $N/K$  telle que l'extension  $N/J$  soit galoisienne. Précisément, toute solution  $E(x^{1/p})/K$  de  $(E/K, \varepsilon)$  induit la solution  $N := E(X)/K$ ,  $X^p = g_{E/L}(x)^{d-1}$ , pour laquelle  $N/J$  est galoisienne.

(6) Supposons le problème  $(L/J, \varepsilon)$  résoluble. Dans les notations du (5), soit  $(D/J) := \text{desc}_J(N/K)$  (c.f.(2)). Identifions  $\text{Gal}(D/L)$  à  $\text{Gal}(N/E)$  par la restriction à  $D$ , et  $\text{Gal}(N/E)$  à  $\mathbb{F}_p$  par le choix d'un élément  $X$ . Alors la descendue  $D/J$  de  $N/K$  est une solution du problème de plongement  $(L/J, \varepsilon)$ .

*Scholie.* Grâce aux éléments  $x \in \text{Nor}(K, E)$  des formules de [7], on obtient, par le (2) précédent, un élément primitif sur  $L$ , explicite, des solutions des problèmes non kummériens  $(L/J, \varepsilon)$ .

On peut maintenant aborder le problème de théorie de Galois suivant : comment étendre par une extension de degré premier une extension galoisienne finie de degré quelconque, disons  $E/J$ ? On montre, modulo une hypothèse de descente, que tous les corps  $N$ , de degré  $p$  sur  $E$  galoisiens sur  $J$ , admettent un élément primitif s'exprimant en termes d'un endomorphisme de  $E^\times$ , que nous appelons "opérateur galoisien".

**Théorème 3** *La situation est celle du théorème 1. Supposons que l'extension  $E/K$  soit descendable sur  $J$ , de descendue  $\text{desc}_J(E/K) = (L/J)$ , et que le corps  $E$  contienne le groupe  $\mu_p$ . Notons  $V := \text{Gal}(E/L)$  l'unique complément de  $\Gamma$  dans  $\text{Gal}(E/J)$  (c.f.Th.1(2)). Alors, un corps  $N$  de degré  $p$  sur  $E$  est galoisien sur  $J$  si et seulement s'il existe un homomorphisme  $f \in \text{Hom}(V, \mathbb{F}_p^\times)$  et un élément  $x \in \text{Nor}(K, E)$  tels que*

$$N = E \left( \left( g_{E/L}^f(x) \right)^{1/p} \right);$$

où  $g_{E/L}^f$  est l'opérateur galôisien défini par

$$\begin{aligned} g_{E/L}^f : E^\times &\longrightarrow E^\times \\ x &\longmapsto g_{E/L}^f(x) = \prod_{v \in V} v^{-1}(x)^{f(v)}. \end{aligned}$$

De plus,  $f$  est déterminé de manière unique par la condition

$$v(x) \equiv x^{f(v)} \pmod{E^{\times p}} (v \in V).$$

Ce résultat montre que l'obstruction à ce qu'un corps  $N$  soit galoisien sur  $J$  réside uniquement dans la  $p$ -sous-extension  $E/K$  de  $E/J$ . En effet, une fois obtenu un  $x$  dans  $\text{Nor}(K, E)$ , un générateur de  $N$  comme extension galoisienne de  $J$  est fourni mécaniquement par l'opérateur galoisien  $g_{E/L}^f$ .

## Remerciements

Plusieurs résultats énoncés dans cette note ont été obtenus en collaboration avec le Pr. Richard Massy. Qu'il soit remercié de m'avoir permis de les mentionner.

## Bibliographie

- [1] *G. Brattström*, On  $p$ -groups as Galois groups. *Math. Scand.* **65** (1989), 165-174.
- [2] *R. Gillard*, Plongement d'une extension d'ordre  $p$  ou  $p^2$  dans une surextension non abélienne d'ordre  $p^3$ . *J. reine angew. Math.* **268/269** (1974), 418-426.
- [3] *K. Hoechsmann*, Zum Einbettungsproblem. *J. reine angew. Math.* **229** (1968), 81-106.
- [4] *B. Huppert*, Endliche Gruppen I. Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [5] *A. Ledet*, Subgroups of  $\text{Hol}Q_8$  as Galois Groups. *J. of Algebra* **181** (1996), 478-506.
- [6] *R. Massy*, Sur la construction à noyau d'ordre  $p$  des  $p$ -extensions galoisiennes. Thèse d'état, Bordeaux, 1986.
- [7] *R. Massy*, Construction de  $p$ -extensions galoisiennes d'un corps de caractéristique différente de  $p$ . *J. of Algebra* **109** (1987), 508-535.
- [8] *S. Monier*, Descente de  $p$ -extensions galoisiennes kummériennes. *Math. Scand.*, 79 (1996), 5-24.
- [9] *J.-P. Serre*, L'invariant de Witt de la forme  $\text{Tr}(x^2)$ . *Comment. Math. Helv.* **59** (1984), 651-676.
- [10] *E. Witt*, Konstruktion von galoisschen Körpern der Charakteristik  $p$  zu vorgegebener Gruppe der Ordnung  $p^f$ . *J. Crelle* **174** (1936), 237-245.

*Sylvie Monier-Derviaux*

Université de Valenciennes, Département de Mathématiques  
Le Mont Houy B.P. 311, F-59304 Valenciennes, France  
Sylvie.Derviaux@univ-valenciennes.fr



## Singularités normales d'équations $z^k - f(x, y) = 0$

Anne Pichon

Soit  $f : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}, 0$  un germe de fonction analytique à singularité isolée en l'origine de  $\mathbb{C}^n$ . Dans [6], J. Milnor démontre que pour  $\epsilon > 0$  suffisamment petit, le germe d'hypersurface  $f^{-1}(0)$  intersecte la  $2n - 1$ -sphère  $\mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}$  en une sous-variété différentiable close de dimension  $2n - 3$ . Cette sous-variété de  $\mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}$ , notée  $K_f$  s'appelle l'*entrelacs algébrique* associé à  $f$ . On appelle *type topologique* de  $f$  la classe d'isotopie de l'entrelacs  $K_f$  dans  $\mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}$ . D'autre part, on appelle *bord* du germe  $f$  la classe de difféomorphisme de la variété abstraite  $f^{-1}(0) \cap \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}$ .

Si la topologie des germes analytiques de courbes planes (*i.e.*  $f : \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}, 0$ ) a déjà dévoilé ses secrets, en revanche, nombre de questions concernant la topologie des germes analytiques de surfaces complexes (*i.e.*  $f : \mathbb{C}^3, 0 \rightarrow \mathbb{C}, 0$ ) restent ouvertes. Parmi elles, nous nous intéressons à l'étude topologique des singularités normales de surfaces complexes d'équations  $z^k - f(x, y) = 0$ , où  $f : \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}, 0$  désigne un germe réduit et  $k$  un entier  $\geq 2$ . Plus précisément, nous allons comparer la topologie du bord du germe analytique  $z^k - f(x, y)$  et le type topologique de  $f$ .

Le point de départ de nos recherches est l'article [4], dans lequel H. Laufer étudie les singularités  $z^2 - f(x, y)$ . Il démontre notamment un théorème de finitude dont nous donnons ici un énoncé topologique :

**Théorème** ([4], 5.10) *Soit  $M$  une variété différentiable de dimension trois. Il existe à type topologique près un nombre fini (éventuellement nul) de germes analytiques réduits  $f : \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}, 0$  tels que le bord du germe analytique  $z^2 - f(x, y)$  soit homéomorphe à  $M$ . De plus, il existe un algorithme qui permet d'en dresser explicitement la liste.*

Nous obtenons le résultat suivant :

**Théorème 1** *Soit  $M$  une variété différentiable de dimension trois, et soit  $k$  un entier  $\geq 3$ . Il existe à type topologique près un nombre fini (éventuellement nul) de germes analytiques réduits  $f : \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}, 0$  tels que le bord  $L_f^k$  du germe analytique  $z^k - f(x, y)$  soit homéomorphe à  $M$ . De plus, il existe un algorithme qui permet d'en dresser la liste.*

Ce résultat est l'analogie du théorème de finitude de H. Laufer pour les germes  $z^k - f(x, y)$ , où  $k$  est un entier fixé  $\geq 3$ . Cependant, notre démarche est tout à fait différente de la sienne. En effet, l'étude de H. Laufer, qui s'appuie sur le procédé de résolution de Zariski, et son éventuelle généralisation à  $k \geq 3$  par le procédé de résolution d'Hirzebruch-Jung, privilégie des méthodes de géométrie analytique, alors que le problème de finitude est de nature essentiellement topologique. C'est pourquoi nous prenons un point de vue très différent en mettant en évidence la topologie de la situation.

Nous démontrons ce théorème de finitude à partir des résultats d'une étude topologique de la 3-variété  $L_f^k$  dont voici les principales articulations :

Nous montrons qu'il existe un revêtement cyclique à  $k$  feuillets  $R : L_f^k \rightarrow \mathbb{S}^3$  totalement ramifié au dessus de l'entrelacs algébrique  $K_f$ .

Dans [5], les auteurs décrivent la décomposition minimale de Waldhausen de  $\mathbb{S}^3$  dont  $K_f$  est réunion de fibres de Seifert en fonction de l'arbre de résolution minimale de  $f$ . Soit  $T$  sa famille séparatrice de tores.

Cette décomposition de Waldhausen de  $\mathbb{S}^3$  se relève via  $R$  en une décomposition de Waldhausen de  $L_f^k$  de la façon suivante : la famille séparatrice est  $T' = R^{-1}(T)$ , et les fibres de Seifert de  $L_f^k \setminus T'$  sont les images réciproques par  $R$  des fibres de Seifert de  $\mathbb{S}^3 \setminus T$ . Nous décrivons explicitement cette décomposition de Waldhausen de  $L_f^k$  en fonction de  $k$  et de l'arbre de résolution minimale de  $f$ . De plus, nous remarquons qu'il s'agit de la décomposition minimale de  $L_f^k$  dont  $K' = R^{-1}(K_f)$  est réunion disjointe de fibres de Seifert.

Ce qui achève l'étude topologique préliminaire.

Il devient alors naturel d'organiser la démonstration du théorème 1 comme suit : nous nous donnons une variété de Waldhausen  $M$ , et un entier  $k$ , et nous déterminons les éventuels germes  $f : \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}, 0$  tels que  $L_f^k \cong M'$ . L'étape essentielle est de localiser l'entrelacs  $R^{-1}(K_f)$  dans  $M'$ . Apparaît alors la difficulté principale : si la famille de tores  $T'$  est la famille séparatrice minimale de  $L_f^k \setminus K'$ , en revanche il n'en est pas nécessairement de même pour la variété  $L_f^k$  (autrement dit,  $K'$  n'est pas nécessairement réunion de fibres de Seifert de la décomposition minimale de  $M$ ). En effet certaines composantes de  $L_f^k \setminus T'$  pourraient être des tores pleins ou des tores épaissis !

Mais nous assistons à un miracle :

**Miracle :** *En dehors d'une petite liste d'exceptions, qui apparaissent pour  $k = 2$ , la variété de Waldhausen  $L_f^k$  est réduite, et  $T'$  est sa famille séparatrice minimale.*

C'est pourquoi, le théorème 1 ne concerne que les entiers  $k \geq 3$  : dans ce cas,  $K'$  est réunion de fibres de Seifert de la décomposition minimale de  $M'$ .

La technique développée au cours de l'étude topologique préliminaire a d'autres applications que le théorème de finitude. En voici quelques unes :

1) Via la théorie de Plumbing Calculus de W. Neumann (voir [7]), nous donnons une méthode rapide et explicite pour obtenir le graphe de la résolution minimale des singularités  $z^k - f(x, y) = 0$  où  $f$  est un germe réduit et  $k$  un entier  $\geq 2$ .

2) Nous donnons une démonstration topologique très rapide du théorème d'Abhyankar suivant :

**Théorème** ([1]) *Soit  $f : \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}, 0$  un germe réduit de courbe plane. Alors la singularité de surface d'équation  $z^k - f(x, y) = 0$  est quasi-rationnelle pour tout entier  $k \geq 1$  si et seulement si  $f$  est le germe lisse ou le germe quadratique ordinaire.*

De plus, nous améliorons ce résultat en remplaçant la condition “pour tout  $k \geq 1$ ” par “pour tout  $k \geq 1$  sauf un nombre fini arbitrairement grand”.

3) Nous montrons que les torsades de la monodromie associée à un germe de fonction holomorphe en un point  $p$  d'une surface complexe normale  $Z$  sont toutes de signe négatif. Dans le cas d'une fibration de Milnor, ce résultat est dû à P. Du Bois et F. Michel ([2]), et indépendamment à D. Eisenbud et W. Neumann ([3]). Mais à notre connaissance, ce résultat est nouveau pour une fibration de Lê qui n'est pas de Milnor, c'est-à-dire quand le point  $p$  n'est pas un point lisse de  $Z$ .

## Bibliographie

- [1] *S. Abhyankar*, On a question of Mumford, American Journal of Math. 105 (1983) 1455-1479.
- [2] *P. Du Bois et F. Michel*, The integral Seifert form does not determine the topology of plane curve germs, Journal of Algebraic Geometry **3** (1994) 1-38.
- [3] *D. Eisenbud, W. Neumann*, Three dimensional link theory and invariants of plane curves singularities, Annals of Math. Studies, **110** (1985) 172p.
- [4] *H. B. Laufer*, On normal two-dimensional double point singularities, Israel Journal of Math. **31** Nos 3-4 (1978) 315-334.
- [5] *D. T. Lê, F. Michel, C. Weber*, Sur le comportement des courbes polaires associées aux germes de courbes planes, Compositio Mathematica, **72** (1989) 87-113.
- [6] *J. Milnor*, Singular points of complex hypersurfaces, Princeton University Press (1968).
- [7] *W. Neumann*, A calculus for plumbing applied to the topology of complex surface singularities and degenerating complex curves, Trans. Amer. Math. Soc. **268-2** (1981) 299-344.
- [8] *A. Pichon*, Sur les singularités normales d'équations  $z^k - f(x, y) = 0$ . thèse, Université de Genève (1996).

*Anne Pichon*

Université de Genève, Section de Mathématiques  
2-4, rue du Lièvre, Case postale 240, 1211 Genève, Suisse  
pichon@sc2a.unige.ch



## Résolutions universelles pour des problèmes NP-complets.

Natacha Portier

Considérons une structure, c'est-à-dire un ensemble  $M$ , un nombre fini de fonctions  $f_i$  de  $M^{n_i}$  dans  $M$ , où  $n_i$  est un entier, et un nombre fini de relations  $r_j$ , où  $r_j$  est un sous-ensemble de  $M^{m_j}$  et  $m_j$  un entier. On s'intéresse aux ensembles définissables par cette structure.

Par exemple, la structure standard a pour ensemble celui des booléens, i.e.  $\{0; 1\}$ , pour fonctions la conjonction booléenne  $\wedge$  et la négation booléenne  $\neg$ , et pour relation l'égalité  $\{(0; 0); (1; 1)\}$  tous les sous-ensembles de  $\{0; 1\}^n$  sont définissables pour la structure standard. Un autre exemple est la structure des réels : l'ensemble est  $\mathbb{R}$ , les fonctions sont l'addition, la soustraction et la multiplication, et les relations sont la relation d'ordre  $\leq$  et l'égalité. Les ensembles définissables dans cette structure sont les ensembles semi-algébriques qu'étudie la géométrie algébrique réelle.

**Définition :** *Un problème  $X$  sur  $M$  est un ensemble de mots sur  $M$ , c'est-à-dire un ensemble de suites finies d'éléments de  $M$ .*

On étudie la question suivante :

**Question :** Etant donné un mot  $\bar{x}$  et un problème  $X$ , pouvons-nous savoir si  $\bar{x} \in X$  ? Et si oui, combien de temps faut-il pour obtenir la réponse ?

Prenons un exemple : soit  $X_0$  l'ensemble des mots  $(a_0, \dots, a_n)$  sur  $\mathbb{R}$  tels que le polynôme  $a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$  admette une racine réelle. Si  $\bar{a} = (a_0, \dots, a_n)$ , se demander si  $\bar{a} \in X_0$ , c'est se demander si le polynôme  $a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$  admet une racine réelle.

**Définition :** *Un problème  $X$  sur  $M$  est  $P_M$ , i.e. polynomial pour la structure  $M$ , si la question  $\bar{x} \in X$  peut être décidée en temps polynomial.*

Le temps représente le nombre d'opérations (calcul de fonction ou test d'appartenance à une relation) à effectuer pour obtenir la réponse. Il est polynomial s'il est borné par un polynôme de la longueur du mot  $\bar{x}$ . A priori, un algorithme polynomial est plus rapide qu'un algorithme exponentiel. En pratique, ce n'est pas toujours le cas en raison de la taille des constantes.

**Définition :** *Un problème  $X$  sur  $M$  est  $NP_M$  s'il existe un problème  $Y$ , qui est  $P_M$ , et tel que  $\bar{x} \in X$  si et seulement s'il existe un mot  $\bar{y}$  pas trop long et  $\bar{y}\bar{x} \in Y$ . Plus précisément, il existe un polynôme qui borne la taille de  $\bar{y}$  en fonction de celle de  $\bar{x}$ .  $Y$  est appelée résolution associée à  $X$ , et  $\bar{y}$  est une solution pour  $\bar{x}$ .*

Si nous reprenons l'exemple précédent, nous pouvons montrer que  $X_0$  est  $NP_M$ . Soit  $Y_0$  l'ensemble des  $b\bar{a}$  tels que  $b$  soit racine du polynôme  $a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ . Nous avons :  $\bar{a} \in X_0$  si et seulement si  $a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$  a une racine réelle, c'est-à-dire si et seulement s'il existe  $b$  tel que  $b\bar{a} \in Y_0$ . D'autre part, vérifier si  $b\bar{a} \in Y_0$

ne nécessite que le calcul de  $a_0 + a_1b + \dots + a_nb^n$ , c'est-à-dire  $2n - 1$  multiplications et  $n$  additions, donc un temps  $3n - 1$ , qui est bien polynomial en  $n$ . Donc  $X_0$  est  $NP_M$ . Notons que ce problème est aussi  $P_M$  grâce au théorème de Sturm.

Un problème  $X$  qui est  $P_M$  est  $NP_M$ . En effet, il suffit de prendre par exemple  $Y = X$ , et  $y$  est la suite vide. Qu'en est-il de la réciproque : tout problème  $NP_M$  est-il  $P_M$ ? C'est la question  $P_M = NP_M?$ , bien connue dans le cas standard. Nous connaissons des structures pour lesquelles on peut répondre non à la question, mais nous ne connaissons pas de structure, même triviale, pour laquelle nous pourrions répondre oui. C'est pour nous intéresser à cette question que nous allons définir les problèmes  $NP_M$ -complets. En effet, il faut et il suffit qu'un seul problème  $NP_M$ -complet soit  $P_M$  pour avoir l'égalité  $P_M = NP_M$ .

**Définition :** Un problème  $X$  sur  $M$  est  $NP_M$ -complet s'il est  $NP_M$ , et si pour tout problème  $X'$  qui est  $NP_M$ , et pour tout mot  $\bar{x}'$  nous pouvons trouver rapidement un mot  $\bar{x}$  tel que  $\bar{x}' \in X'$  si et seulement si  $\bar{x} \in X$ . Rapidement signifie en un temps borné polynomialement par la taille de  $\bar{x}$ . Nous pouvons aussi écrire que  $X$  est  $NP_M$ -complet si tous les autres problèmes  $NP_M$  peuvent être réduits à  $X$ . Le problème  $X$  est alors plus compliqué que tous les autres problèmes  $NP_M$ .

Connaître un problème  $NP_M$ -complet et savoir le résoudre nous permet de répondre à la question  $\bar{x} \in X$  pour tout problème  $X$  qui est  $NP_M$  et pour tout mot  $\bar{x}$ , mais cela ne nous permet pas de trouver les solutions  $\bar{y}$  de  $\bar{x}$ . D'autre part, la méthode généralement utilisée pour montrer qu'un problème  $X$  est  $NP_M$ -complet est soit de réduire un problème  $X'$  déjà connu et  $NP_M$ -complet à  $X$ , soit de réduire tout problème  $X'NP_M$  à  $X$ . Mais cela ne nous éclaire en rien sur la structure de  $X$ . Pour ces deux raisons, la notion d'universalité va nous être utile.

**Définition :** Soit  $X$  un problème  $NP_M$ , et soit  $Y$  une résolution associée à  $X$ . Nous dirons que  $Y$  est universelle si pour tout problème  $X'$  qui est  $NP_M$ , il existe une résolution  $Y'$  associée à  $X'$  qui se réduit à  $Y$  : pour tout mot  $\bar{x}'$  on peut trouver rapidement un mot  $\bar{x}$  tel que  $\bar{x}' \in X'$  si et seulement si  $\bar{x} \in X$ , et tel que les solutions  $\bar{y}'$  de  $\bar{x}'$  se déduisent des solutions  $\bar{y}$  de  $\bar{x}$  par projection.

Bien sûr, si la résolution  $Y$  est universelle, alors  $X$  est  $NP_M$ -complet. Nous avons un théorème structurel qui nous permet de montrer qu'une résolution est universelle, et donc qu'un problème est  $NP_M$ -complet :

**Théorème :** La résolution  $Y$  est universelle si et seulement si :

- (1.1) Pour chaque élément  $a$  de  $M$ , existe un mot  $\text{bloc}_a$  dont les solutions donnent, par projection,  $\{a\}$ .
- (1.2) Pour chaque fonction  $f$ , il existe un mot  $\text{bloc}_f$  dont les solutions donnent, par projection,  $\{x_1x_2 \dots x_p y \text{ tels que } y = f(x_1x_2 \dots x_p)\}$ .
- (1.3) Pour chaque relation  $r$ , il existe deux mots  $\text{btoc}_r$  et  $\text{btoc}_{-r}$  dont les solutions donnent, par projection, respectivement :

$\{x_1x_2\dots x_p y \text{ tels que } x_1x_2\dots x_p \in r \text{ et } y \in M\} \cup M^{ar}.0$  et

$\{x_1x_2\dots x_p y \text{ tels que } x_1x_2\dots x_p \notin r \text{ et } y \in M\} \cup M^{ar}.1$ .

(1.4) Il existe un mot bloc dont les solutions donnent, par projection  $\{0, 1\}^3 - \{(0; 0; 0)\}$

(2) Il existe une fonction *join* calculable en temps polynomial qui à plusieurs mots  $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}$  associe un mot dont les solutions sont les concaténés des solutions des  $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}$ .

(3) il existe une fonction *cpl*, calculable en temps polynomial qui, à un mot  $\overline{x}$  et à deux suites d'indices  $i_1, \dots, i_n$ , et  $j_1, \dots, j_n$  associe un mot dont les solutions sont celles de  $\overline{x}$  pour lesquelles les éléments d'indice  $i_k$  et d'indice  $j_k$  sont égaux.

Appliquons immédiatement ce théorème à un exemple, qui nous permettra de retrouver le résultat principal de [3], qui a inspiré notre travail. Nous nous plaçons dans la structure des réels  $\mathbb{R}$  décrite plus haut.  $X$  est le problème 4-FEAS, c'est-à-dire l'ensemble des polynômes réels, à un nombre quelconque de variables, et de degré total au plus quatre, qui ont une racine réelle. Nous lui associons la résolution  $Y : \overline{y}P$  appartient à  $Y$  si et seulement si  $P$  a  $n$  variables et  $\overline{y} = y_1 \dots y_n$  est une racine de  $P$ . Montrons que  $Y$  est universelle.

(1.1) Pour chaque élément  $a$  de  $M$ ,  $\text{bloc}_a$  est " $x - a$ "

(1.2) Pour l'addition,  $\text{bloc}_+$  est " $x_1 + x_2 - y$ "

Pour la soustraction,  $\text{bloc}_-$  est " $x_1 - x_2 - y$ "

Pour la multiplication,  $\text{bloc}_\times$  est " $x_1 \times x_2 - y$ "

(1.3) Pour l'égalité,  $\text{bloc}_=$  est " $x_1 - x_2$ " et  $\text{bloc}_\neg$  est " $tx_1 - tx_2 - 1$ ". Dans ce dernier cas, nous ne gardons que les variables  $x_1$  et  $x_2$ , et pas la variable  $t$ .

Pour la relation d'ordre,  $\text{bloc}_\leq$  est " $x_2 - x_1 - t^2$ " et  $\text{bloc}_{<}$  est " $t^2x_1 - t^2x_2 - 1$ "

Dans les deux cas, nous ne gardons que les variables  $x_1$  et  $x_2$ .

(1.4)  $\text{bloc}$  est " $[x_1(x_1 - 1)]^2 + [x_2(x_2 - 1)]^2 + [x_3(x_3 - 1)]^2 + [t - (x_1 - 1)(x_2 - 1)]^2 + [t(x_3 - 1)]^2$ ".

(2) Pour la fonction *join*, il faut renommer les variables des polynômes de manière à ce qu'elles soient toutes différentes. Puis, nous ajoutons des variables pour n'avoir plus que des équations de degré deux. Nous sommes alors leurs carrés. Nous obtenons bien une équation polynomiale de degré au plus quatre.

(3) Pour la fonction *cpl*, nous mettons le polynôme sous la forme d'une somme de carrés de polynômes de degré au plus deux, puis nous ajoutons à l'équation la somme des  $(x_{i_k} - x_{j_k})^2$ .

Il n'y a pas beaucoup de structures  $M$  pour lesquelles nous connaissons un problème  $NP_M$ -complet. Dans certains cas, nous connaissons des problèmes  $NP_M$ -complets qui n'ont pas de résolution universelle.

## Bibliographie

- [1] *M. Agrawal, S. Biswas*, Universal Relations. To appear in Information and Computation in its journal form (1992)
- [2] *B. Poizat*, Les petits cailloux. ALEAS éditeur (1995)
- [3] *L. Blum, M. Shub, S. Smale*, On a theory of computation and complexity over the real numbers : NP-completeness, recursive functions and universal machines. Bulletin of the American Mathematical Society **21-1** (1989), 1-46.
- [4] *M.R. Garey, D.S. Johnson*, Computers and Intractability : A Guide to the theory of NP-Completeness. W.H. Freeman and Company (1979)
- [5] *N. Portier*, Résolutions universelles pour des problèmes NP-complets. à paraître dans TCS

*Natacha Portier*  
Institut Girard Desargues  
Bâtiment du doyen Jean Braconnier (101)  
43, boulevard du 11 novembre 1918  
69622 Villeurbanne Cedex, France  
portier@desargues.univ-lyon1.fr

# Invariants d'algèbres à involution

Anne Quéguiner

Étant donnée une algèbre  $A$ , on peut lui associer une forme quadratique de façon naturelle, en considérant l'application  $x \in A \mapsto \text{Tr}(x^2)$ . Cette forme est un invariant de l'algèbre, c'est-à-dire que deux algèbres isomorphes ont des formes traces isométriques. En tant que telle, elle a beaucoup été étudiée, en particulier quand l'algèbre  $A$  est un corps de nombres, i.e. une extension finie du corps des nombres rationnels  $\mathbb{Q}$  (cf. par exemple [1]).

On s'intéresse ici à la situation suivante :  $K$  est un corps de caractéristique différente de 2,  $A$  est une algèbre centrale simple sur  $K$ , et  $\sigma$  est une involution de  $A$ . On considère alors la forme quadratique  $T_\sigma : x \in A \mapsto \text{Trd}_A(\sigma(x)x)$ . On va montrer comment son étude permet de définir des invariants de l'algèbre à involution (cf. [6]).

## 1 Notations et rappels

### 1.1 Algèbres centrales simples

Grâce au théorème de Wedderburn, une algèbre centrale simple  $A$  sur le corps  $K$  est simplement une algèbre de matrices  $A = M_r(D)$ , à coefficients dans un corps gauche (i.e. non nécessairement commutatif)  $D$  dont le centre est le corps  $K$  (cf. par exemple [7]). Deux algèbres centrales simples  $A$  et  $A'$  sont dites similaires si les corps gauches  $D$  et  $D'$  qui leurs sont associés par le théorème précédent sont isomorphes. L'ensemble  $\text{Br}(K)$  des classes d'équivalences d'algèbres centrales simples pour cette relation s'appelle le groupe de Brauer de  $K$  ; il est muni naturellement d'une structure de groupe, qui sera notée ici additivement, la loi étant induite par le produit tensoriel des algèbres.

On appelle corps de décomposition de  $A$  une extension  $F$  du corps  $K$  telle qu'il existe un isomorphisme  $\phi$  de  $A \otimes_K F$  dans une algèbre de matrices  $M_n(F)$ . En particulier, une clôture séparable  $K_s$  de  $K$  est un corps de décomposition pour toute algèbre centrale simple sur  $K$ . La dimension de  $A$  sur son centre,  $\dim_K(A) = \dim_F(A \otimes_K F)$ , est donc toujours le carré d'un entier  $n$  qu'on appelle degré de l'algèbre  $A$ . Pour tout  $a \in A$ , on définit la trace réduite et la norme réduite de  $a$  par  $\text{Trd}_A(a) = \text{Tr}(\phi(a \otimes 1))$  et  $\text{Nrd}_A(a) = \det(\phi(a \otimes 1))$ . Ces deux quantités sont indépendantes du choix du corps de décomposition  $F$  et de l'isomorphisme  $\phi$ .

### 1.2 Involutions

Une involution  $\sigma$  de l'algèbre  $A$  est par définition un anti-automorphisme d'ordre 2 de l'anneau  $A$ . On notera  $k$  le sous-corps de  $K$  fixé par  $\sigma$ . Deux situations sont possibles : si  $K = k$ , l'involution est en fait  $K$ -linéaire ; on dit alors qu'elle est de première espèce ; dans le cas contraire,  $K$  est une extension quadratique de  $k$ ,  $K = k(\sqrt{\alpha})$ , et l'involution est dite de deuxième espèce.

### 1.3 Cas décomposé

L'algèbre  $A$  est dite décomposée quand elle est isomorphe à une algèbre de matrices  $A \simeq M_n(K)$ . On connaît alors les involutions de  $A$ . Elles correspondent aux formes bilinéaires, symétriques ou anti-symétriques, et aux formes hermitiennes de dimension  $n$  sur  $K$ .

De manière plus précise, si  $\sigma$  est une involution de première espèce de  $M_n(K)$ , il existe une matrice  $B$ , symétrique ou anti-symétrique, telle que  $\sigma$  est l'involution adjointe à la forme définie par  $B$ , i.e.  $\forall M \in M_n(K)$ ,  $\sigma(M) = B^{-1}M^tB$ , où  $M^t$  désigne la transposée de  $M$ . Cette matrice  $B$  est déterminée par la donnée de  $\sigma$ , à multiplication par un scalaire près.

Si maintenant  $\sigma$  est une involution de deuxième espèce de  $M_n(K)$ , il existe une matrice hermitienne  $H$ , telle que  $\sigma$  est l'involution adjointe à la forme définie par  $H$ , i.e.  $\forall M \in M_n(K)$ ,  $\sigma(M) = H^{-1}\overline{M}^tH$ , où  $\bar{\phantom{x}}$  désigne l'unique  $k$ -automorphisme non-trivial de  $K$ . Cette matrice  $H$  est déterminée par la donnée de  $\sigma$ , à multiplication par un scalaire près.

### 1.4 Formes traces

On considère l'application

$$\begin{aligned} T_\sigma : A &\rightarrow k \\ x &\mapsto \text{Trd}_A(\sigma(x)x) \end{aligned}$$

C'est une forme quadratique sur le corps  $k$  de dimension  $n^2$  si l'involution est de première espèce, et  $2n^2$  si elle est de deuxième espèce. On considère également la restriction  $T_\sigma^+$  de  $T_\sigma$  au sous-espace  $A^+ = \{a \in A, \sigma(a) = a\}$ . On cherche à étudier les invariants de ces deux formes quadratiques, en tant qu'invariants de l'algèbre à involution.

### 1.5 Invariants de formes quadratiques

Soit  $q$  une forme quadratique de dimension  $l$  sur le corps  $k$ , et considérons une diagonalisation quelconque  $\langle a_1, \dots, a_l \rangle$  de  $q$ . Les invariants de  $q$  que l'on va utiliser par la suite sont définis comme suit (cf. par exemple [7]).

Si le corps  $k$  est formellement réel, i.e. peut être muni d'une relation d'ordre, la signature de  $q$  est la différence entre le nombre de  $a_i$  qui sont positifs et le nombre de  $a_i$  qui sont négatifs. C'est un entier, compris entre  $-l$  et  $l$ , et de même parité que  $l$ . On peut également définir, de manière analogue, la signature d'une forme hermitienne à valeurs dans une extension quadratique du corps  $k$ .

Le déterminant de  $q$  est  $\det(q) = a_1 \dots a_l \in k^*/k^{*2}$ .

Enfin, l'invariant de Hasse de  $q$  est  $\sum_{1 \leq i < j \leq l} (a_i, a_j) \in \text{Br}_2(k)$ , où  $\text{Br}_2(k)$  désigne la 2-partie du groupe de Brauer de  $k$ , et  $(a_i, a_j)$  la classe dans  $\text{Br}(k)$  de l'algèbre de quaternions  $(a_i, a_j)$ .

## 2 Invariants de $(A, \sigma)$

### 2.1 Signature d'une involution

L'étude des formes traces permet tout d'abord, quand le corps  $k$  est formellement réel, i.e. peut être muni d'une relation d'ordre, de définir la notion de signature d'une involution. Précisément, on donne la définition suivante [3, 4, 6] :

**Definition 1** La *signature* de  $\sigma$  est

$$\text{sign}(\sigma) = \begin{cases} \sqrt{\text{sign}(T_\sigma)} & \text{si } \sigma \text{ est de première espèce;} \\ \sqrt{\frac{1}{2} \text{sign}(T_\sigma)} & \text{si } \sigma \text{ est de deuxième espèce} \end{cases}$$

Dans le cas des involutions de première espèce, cette définition est due à Lewis et Tignol [3], tout comme la proposition qui suit. On définit bien ainsi une signature, au sens habituel du terme. En particulier, on montre le résultat suivant :

**Proposition 1** La *signature* de l'involution  $\sigma$  est un entier, compris entre 0 et  $\text{deg}(A)$ , et de même parité que le degré de  $A$ .

De plus, dans le cas décomposé, on a les résultats suivants :

**Proposition 2** [Lewis et Tignol] [3] Si  $\sigma$  est l'involution de  $M_n(K)$  adjointe à la forme bilinéaire symétrique  $B$ , alors la signature de  $\text{sign}(\sigma) = |\text{sign}(B)|$ .

**Proposition 3** [4][6] Si  $\sigma$  est l'involution de  $M_n(\overline{K})$  adjointe à la forme hermitienne  $H$ , alors la signature de  $\text{sign}(\sigma) = |\text{sign}(H)|$ .

**Remarque :** La forme bilinéaire symétrique (resp. hermitienne) n'étant définie qu'à un scalaire près, la signature de  $B$  (resp. de  $H$ ) n'est pas un invariant de  $\sigma$ . On ne peut se passer de la valeur absolue qui apparaît dans les deux propositions précédentes.

### 2.2 Déterminant d'une involution de première espèce

On suppose dorénavant que le degré de  $A$  est pair,  $n = 2m$ . Dans cette partie, on suppose de plus que  $\sigma$  est une involution de première espèce.

La notion de déterminant d'une involution de première espèce remonte à des travaux de Tits et Jacobson ; plus récemment, Knus, Parimala et Sridharan en ont proposé une définition explicite [2]. L'étude des formes traces permet de donner une nouvelle définition de cet invariant [5][6] :

**Définition 2** Le *déterminant* de l'involution  $\sigma$  est  $d(\sigma) = 2^m \det(T_\sigma^+) \in k^*/k^{*2}$ .

Dans le cas décomposé, on a le résultat suivant :

**Proposition 4** Si  $A$  est l'algèbre décomposée  $A = M_n(K)$ , et si  $\sigma$  est l'involution adjointe à la forme bilinéaire  $B$ , le déterminant de  $\sigma$  est 1 si  $B$  est anti-symétrique, et  $\det(B)$  si  $B$  est symétrique.

**Remarque :** A nouveau, la forme  $B$  n'est définie qu'à multiplication par un scalaire près ; cependant, le degré de  $A$  étant pair, son déterminant  $\det(B) \in k^*/k^{*2}$  est bien un invariant de  $\sigma$ .

### 2.3 Classe déterminante d'une involution de deuxième espèce

Quand l'involution  $\sigma$  est de première espèce, on peut montrer, par des méthodes de cohomologie galoisienne, que les invariants de Hasse des formes traces ne dépendent que du degré de l'algèbre, de sa classe dans le groupe de Brauer, et du déterminant de l'involution. Ils ne permettent donc pas de définir un nouvel invariant de l'algèbre à involution. Dans le cas des involutions de deuxième espèce, en revanche, c'est l'invariant de Hasse, et non le déterminant, qui permet de définir un invariant non-trivial de l'algèbre à involution. Précisément, on donne la définition suivante [5] [6] :

**Définition 3** La classe déterminante modulo 2 de  $(A, \sigma)$  est

$D(A, \sigma) = \frac{m(m-1)}{2}(-1, -1) + m(\alpha, 2) + w_2(T_\sigma^+)$ , où  $\sqrt{\alpha}$  désigne comme précédemment un générateur de l'extension quadratique  $K/k$ .

Le fait que c'est un invariant non-trivial découle de la proposition suivante :

**Proposition 5** Si  $A = M_n(K)$ , et si  $\sigma$  est l'involution adjointe à la forme hermitienne  $H$ , alors la classe déterminante modulo 2 de  $(A, \sigma)$  est  $D(M_n(K), \sigma) = (\alpha, \det(H))$ .

L'étude des formes traces permet donc d'associer à  $(A, \sigma)$  différents invariants. Ces invariants peuvent être utiles, par exemple, pour étudier la décomposabilité de  $(A, \sigma)$ . De tels résultats sont décrits dans [5] et [6].

### Bibliographie

- [1] *P.E. Conner et R. Perlis*, A survey of Trace Forms of Algebraic Number Fields, World. Scient. Publ. , Singapore, 1984.
- [2] *M.-A. Knus, R. Parimala, R. Sridharan*, On the discriminant of an involution, Bull. Soc. Math. Belgique, série A 43 (1991) 89-98.
- [3] *D. Lewis, J.-P. Tignol*, On the signature of an involution, Arch. Math. 60 (1993) 128-135.
- [4] *A. Quéguiner*, Signature des involutions de deuxième espèce, Arch. Math. 65 (1995) 408-412.
- [5] *A. Quéguiner*, Cohomological invariants of algebras with involutions, J. Algebra, H 194 (1997) 299-330 .
- [6] *A. Quéguiner*, Invariants d'algèbres à involution, Thèse de doctorat (1996).
- [7] *W. Scharlau*, Quadratic and hermitian forms, Grundlehren Math. Wiss. 270, Springer-Verlag, Berlin (1985).

*Anne Quéguiner*

Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications, UMR 7539 du CNRS  
Institut Galilée, Université Paris 13, 93430 Villetaneuse  
queguine@math.univ-paris13.fr

## Conditions d'existence de solutions pour l'équation du pendule simple.

*Sandrine Tagni*

Nous nous intéressons à l'équation du pendule simple et forcé. Ce système s'écrit

$$u''(t) + a^2 \sin u(t) = f(t) \text{ sur } [0, T], u(T) - u(0) = u'(T) - u'(0) = 0 \quad (1)$$

où  $a$  est une constante,  $T$  est la période de l'oscillation et  $f$  est la force appliquée sur le pendule. Nous renvoyons à [3] pour plus de détails sur la construction du système. Nous étudions les conditions suffisantes d'existence de solutions périodiques non triviales pour le système (1). J. Mawhin et M. Willem [4, 5], ont étudié ce problème pour  $f$  de moyenne nulle. Nous appellerons moyenne de la fonction  $f$  sur  $[0, T]$ , le nombre :

$$M(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(s) ds.$$

Les solutions au système (1) correspondent aux points critiques de la fonctionnelle

$$J_f(u) := \frac{1}{2} \int_0^T |u'(t)|^2 dt - a^2 \int_0^T (1 - \cos u(t)) dt + \int_0^T f(t)u(t) dt.$$

définie sur  $H_T^1$ , l'espace de Hilbert des fonctions  $T$ -périodiques de  $H^1$ . Ils montrent que  $J_f$  a un minimum local strict  $u_1$ . Ils démontrent aussi que  $J_f$  satisfait les conditions du Théorème du col [1]. Il existe alors une deuxième valeur critique  $c_2$  différente de  $J_f(u_1)$ .

Notons que si  $f$  est non identiquement nulle et de moyenne nulle alors les deux solutions ainsi obtenues, ne sont pas constantes.

Lorsque  $f$  n'est pas de moyenne nulle, la fonctionnelle  $J_f$  ne vérifie pas la condition de Palais-Smale classique : il faut en trouver une version adaptée à la situation. Nous considérons l'équation (1), où  $f$  est une fonction constante. On pose

$$u''(t) + a^2 \sin u(t) = \lambda \text{ sur } [0, T], u(T) - u(0) = u'(T) - u'(0) = 0 \quad (2)$$

avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

### 1. Quelques conditions nécessaires d'existence de solutions non constantes

En intégrant la première équation du système (2) sur  $[0, T]$ , on constate que si  $\lambda \in \{-a^2, a^2\}$  alors les seules solutions du système (2) sont  $u \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ . Ce cas ne nous intéresse pas. De plus si  $u$  est solution de (2),  $-u$  est solution de

$$\begin{cases} u''(t) + a^2 \sin u(t) = -\lambda & \text{sur } [0, T], \\ u(T) - u(0) = u'(T) - u'(0) = 0. \end{cases}$$

Et il nous suffit d'étudier le système (2) avec  $0 \leq \lambda < a^2$ . On appelle  $H_T^1$ , l'espace de Hilbert de fonctions  $T$ -périodiques de  $H^1$ .

**Lemme** *Si  $s$  est une constante quelconque et  $a$  est une constante telle que*

$$0 < a^2 \leq \frac{4\pi^2}{T^2},$$

*l'équation :*

$$u''(t) + a^2 \left\{ \sin(u(t) + s) - \frac{1}{T} \int_0^T \sin(u(\theta) + s) d\theta \right\} = 0 \text{ sur } [0, T],$$

$$u(T) - u(0) = u'(T) - u'(0) = 0. (*)$$

*n'a pas de solution différente de la solution nulle dans l'espace  $\tilde{H}_T^1$ , des fonctions de moyenne nulle de  $H_T^1$ .*

Il suffit de voir que la fonctionnelle associée à (\*) est strictement convexe et atteint son minimum en  $u = 0$  dans  $\tilde{H}_T^1$ .

**Théorème 1** *Si  $0 < a^2 \leq \frac{4\pi^2}{T^2}$  et  $|\lambda| < a^2$ , alors l'équation (2) n'a aucune solution non triviale dans  $H_T^1$ . Démonstration :* L'équation (2) est équivalente au système suivant

$$\tilde{u} := u - M(u)$$

$$\tilde{u}'' + a^2 \left\{ \sin[\tilde{u} + M(u)] - \frac{1}{T} \int_0^T \sin[\tilde{u}(\theta) + M(u)] d\theta \right\} = 0 \text{ sur } [0, T],$$

$$\frac{a^2}{T} \int_0^T \sin[\tilde{u}(\theta) + M(u)] d\theta = \lambda,$$

$$\tilde{u}(0) - \tilde{u}(T) = \tilde{u}'(0) - \tilde{u}'(T) = 0 \tag{3}$$

D'après le Lemme, pour chaque  $s$  fixé, l'équation

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}''(t) + a^2 \left\{ \sin(\tilde{u}(t) + s) - \frac{1}{T} \int_0^T \sin(\tilde{u}(t) + s) dt \right\} = 0 \quad \text{sur } [0, T] \\ \tilde{u}(0) - \tilde{u}(T) = \tilde{u}'(0) - \tilde{u}'(T) = 0 \end{array} \right.$$

a pour unique solution  $\tilde{u} = 0$ . Dans l'équation (3), on a

$$s = M(u).$$

De plus, les seules solutions de (2) sont les constantes  $s$  telles que  $a^2 \sin s = \lambda$ .

## 2. Analyse dans le plan des phases et méthode de variationnelle

Par une méthode du plan des phases, on cherchera des conditions suffisantes à l'existence d'une solution non constante, de l'équation (2). On vérifiera ensuite ces conditions suffisantes par une méthode variationnelle. L'intérêt de cette deuxième méthode réside dans le fait qu'elle peut s'appliquer au cas du pendule double (voir multiple).

**Théorème 2** Si on a

$$|\lambda| < a^2, \quad \frac{4\pi^2}{T^2} < \sqrt{a^4 - \lambda^2} \quad (4)$$

alors l'équation (2) admet une solution périodique non constante.

*Démonstration du Théorème :* On a vu plus haut, que l'on pouvait encore écrire  $\lambda$  de la façon suivante

$$\lambda := a^2 \sin \omega$$

avec  $\omega \in [0, \frac{\pi}{2}[$ . La condition (4) devient

$$\frac{4\pi^2}{T^2} < a^2 \cos \omega.$$

Par une méthode de plan des phases, on démontre que si  $v$  est solution non constante de (2), alors il existe une deuxième solution  $u$  de (2) dépendant de  $v$  telles que

$$u_0 := u(0) \in ]\omega, \pi - \omega[, \text{ et } u'(0) = 0 \quad (5)$$

Ensuite, on va démontrer que si  $u$  est une solution non constante de (2) avec les conditions (5) alors il existe une fonction continue  $H : ]\omega, \pi - \omega[ \rightarrow R$  telles que

$$H(u_0) = \frac{|a|T}{\sqrt{2}}, \quad \lim_{u_0 \rightarrow \pi - \omega} H(u_0) = +\infty, \text{ et } \lim_{u_0 \rightarrow \omega} H(u_0) = \frac{\pi \sqrt{2}}{\sqrt{\cos \omega}}.$$

- On en déduit que

$$\left] \frac{\pi \sqrt{2}}{\sqrt{\cos \omega}}, +\infty \right[ \subset H(] \omega, \pi - \omega[).$$

Par conséquent, si  $\frac{4\pi^2}{T^2} < a^2 \cos \omega$  alors il existe  $u_0 \in ]\omega, \pi - \omega[$  tel que

$$\frac{T}{\sqrt{2}} = H(u_0)$$

et la solution de (2) avec  $u(0) = u_0, u'(0) = 0$  est périodique de période  $T$ .

Étudions le problème par la méthode variationnelle. Soit  $J_\omega : H_T^1 \rightarrow R$ , la fonctionnelle associée au système (2) définie par

$$J_\omega(u) = \frac{1}{2} \int_0^T |u'(t)|^2 dt - a^2 \int_0^T (1 - \cos u(t)) dt + a^2 T M(u) \sin \omega.$$

Autrement dit, les solutions de (2) correspondent aux points critiques de  $J_\omega$ . On commence par démontrer que  $\omega$  et  $\pi - \omega \bmod 2\pi$  sont les points critiques non constants de  $J_\omega$ . Ensuite on démontre que  $J_\omega$  vérifie une version modifiée de la condition de PaJais-Smale classique, [1], et  $J_\omega$  satisfait les hypothèses du théorème du col [1]. Par conséquent, il existe une valeur critique  $c_* := J_\omega(u_*)$  définie par

$$c_* := \inf_{A \in \mathcal{B}} \max_{u \in A} J_\omega(u)$$

où

$$\mathcal{B} = \{ \gamma \in C([0, 1]; H_T^1) ; \gamma(0) = \pi - \omega \text{ et } \gamma(1) = -\pi - \omega \}$$

- Supposons que  $u_*$  est un point critique constant non isolé, alors il existe un autre point critique non constant.

- Supposons que  $u_*$  est un point critique isolé. On démontre que  $u_*$  est de type  $mp$ , [2], et que  $\pi - \omega \bmod 2\pi$  n'est pas de type  $mp$ . Par conséquent,  $u_*$  est différent de  $\pi - \omega \bmod 2\pi$ . Ensuite, nous utilisons un résultat sur les indices de Morse des points critiques, de Hofer [2], pour démontrer que  $u_*$  a un indice de Morse strictement inférieur à deux. Or si  $\frac{4\pi^2}{T^2} < a^2 \cos \omega$ , l'indice de Morse de  $\omega$  est supérieur ou égale à trois. Par conséquent,  $u_*$  est différent de  $\omega \bmod 2\pi$ .

Finalement, si  $4\pi^2 T^{-2} < a^2 \cos \omega$  alors il existe une solution non constante à l'équation (2) pour  $\lambda := a^2 \sin \omega$

## Bibliographie

- [1] *A. Ambrosetti, P. Rabinowitz.* Dual variational methods in critical point theory and applications. *J. Functional Analysis*, (14) :349-381, 1973.
- [2] *H. Hofer.* The topological degree point of mountain-pass type. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 45, Part 1 :501-509, 1986.
- [3] *L.D. Landau, E. M. Lifshitz.* *Mechanics.* Pergamon Press, Addison-wesley publishing company edition, 1960. Volume 1 of *Course of theoretical physics.*
- [4] *J. Mawhin.* The forced pendulum : A paradigm for nonlinear analysis and dynamical systems. *Expositiones Mathematicae*, (6) :271-287, 1988. Collection mathématiques appliquées pour la maîtrise.
- [5] *J. Mawhin and M. Willem.* Multiple solutions of the periodic boundary value problem for some forced pendulum-type equations. *Journal of differential equations*, (52) :264-287, 1984

*Sandrine Tagni*  
41, Rue du Dr Roux - 54500 Vandoeuvre-lès-Nancy  
Sandrine.Tagni@loria.fr



## Groupes de Grothendieck associés à des sous-quotients d'un groupe fini

*Djouher Zobiri*

Ce travail se situe dans le cadre de la description de la structure galoisienne des objets arithmétiques associés à une extension galoisienne  $K/k$  de groupe de Galois  $\Gamma$  connaissant celle de sous-extensions  $K_i/k_i$  avec  $k \subset k_i \subset K_i \subset K$  bien choisies. Pour avancer dans cette direction on introduit plusieurs notions de groupe de Grothendieck associé à des sous-quotients de  $\Gamma$ .

Soient  $\Gamma$  un groupe fini,  $\mathcal{F}$  une famille de sous-quotients. On définit une  $\mathcal{F}$ -catégorie dépendant essentiellement des sous-quotients. Cette catégorie nous permet d'introduire 3 types de suites exactes. Ainsi on obtient 3 nouveaux types de groupes de Grothendieck qu'on note par :

$G_f(A[\Gamma], \mathcal{F})$  : le  $\mathcal{F}$ -groupe de Grothendieck faible.

$G_0(A[\Gamma], \mathcal{F})$  : le  $\mathcal{F}$ -groupe de Grothendieck exact.

$G_{\oplus}(A[\Gamma], \mathcal{F})$  : le  $\mathcal{F}$ -groupe de Grothendieck.

La question principale qui nous préoccupe est la démonstration de la conjecture suivante :

**Conjecture** : Pour toute famille  $\mathcal{F}$  il existe des familles  $\mathcal{F}_f, \mathcal{F}_0$  et  $\mathcal{F}_{\oplus}$  telles que les applications suivantes :

$$\begin{aligned}
 T_f & : G_f(\mathbb{C}[\Gamma], \mathcal{F}) \longrightarrow \text{Hom} \left( R_{\mathcal{F}_f}^{\perp\perp}(\Gamma), \mathbb{Z} \right) \\
 [V]_f & \longmapsto T_f([V]_f) : \chi \quad \longmapsto \langle \chi_V, \chi \rangle \\
 T_0 & : G_0(\mathbb{C}[\Gamma], \mathcal{F}) \longrightarrow \text{Hom} \left( R_{\mathcal{F}_0}^{\perp\perp}(\Gamma), \mathbb{Z} \right) \\
 [V]_0 & \longmapsto T_0([V]_0) : \chi \quad \longmapsto \langle \chi_V, \chi \rangle \\
 T_{\oplus} & : G_{\oplus}(\mathbb{C}[\Gamma], \mathcal{F}) \longrightarrow \text{Hom} \left( R_{\mathcal{F}_{\oplus}}^{\perp\perp}(\Gamma), \mathbb{Z} \right) \\
 [V]_{\oplus} & \longmapsto T_{\oplus}([V]_{\oplus}) : \chi \quad \longmapsto \langle \chi_V, \chi \rangle
 \end{aligned}$$

sont des isomorphismes.

**Définition 1** Soit  $\Gamma$  un groupe fini. Un *sous-quotient* de  $\Gamma$  est un couple  $(\Delta, \Sigma)$  de sous-groupes de  $\Gamma$ , tel que  $\Sigma$  soit distingué dans  $\Delta$ .

Dans tout ce qui va suivre  $SQ(\Gamma)$  désigne l'ensemble de tous les sous-quotients de  $\Gamma$  et  $\mathcal{F} \subset SQ(\Gamma)$ .

**Définition 2** Soit  $\mathcal{F}$  une famille de sous-quotients. Le groupe,  $R_{\mathcal{F}}(\Gamma)$ , des *caractères associés aux sous-quotients* est le sous-groupe de  $R(\Gamma)$  engendré par la famille :  $\{ \text{Inf}_{\Delta}^{\Gamma} \text{Inf}_{\Sigma}^{\Delta} \varphi / (\Delta, \Sigma) \in \mathcal{F}, \varphi \in R(\Delta/\Sigma) \}$ .

### $\mathcal{F}$ -catégorie

**Définition 3** Soient  $\Gamma$  un groupe fini,  $F \subset SQ(\Gamma)$ ,  $A$  un anneau, et soient  $V$  et  $V'$  deux  $A[\Gamma]$ -modules. On appelle  $\mathcal{F}$ -homomorphisme de  $V$  dans  $V'$  un  $A$ -homomorphisme  $f$  défini sur  $V$  à valeurs dans  $V'$  et vérifiant pour tout sous-quotient  $(\Delta, \Sigma)$  dans  $\mathcal{F}$ , la restriction  $f/\Sigma$  de  $f$  à  $V^\Sigma$  est un  $A[\Delta/\Sigma]$ -homomorphisme de  $V^\Sigma$  dans  $V'^\Sigma$ .

**Définition 4** On définit la catégorie  $C(A[\Gamma], \mathcal{F})$  comme étant la catégorie dont les objets sont des  $A[\Gamma]$ -modules de type fini et les morphismes sont des  $\mathcal{F}$ -homomorphismes. Elle sera appelée  $\mathcal{F}$ -catégorie.

### Suites exactes

**Définition 5** Soient  $V, V'$  et  $V''$  des  $A[\Gamma]$ -modules tels que pour tout sous-quotient  $\delta = (\Delta, \Sigma)$  dans  $\mathcal{F}$ , il existe  $f_\delta, g_\delta$  des  $A[\Delta/\Sigma]$ -homomorphismes pour lesquels :

$$0 \longrightarrow V'^\Sigma \xrightarrow{f_\delta} V^\Sigma \xrightarrow{g_\delta} V''^\Sigma \longrightarrow 0$$

est une suite exacte en tant que  $A[\Delta/\Sigma]$ -modules. Une telle suite est appelée  $\mathcal{F}$ -suite faiblement exacte et est notée par  $0 \longrightarrow V' \xrightarrow{(f_\delta)_{\delta \in \mathcal{F}}} V \xrightarrow{(g_\delta)_{\delta \in \mathcal{F}}} V'' \longrightarrow 0$ .

**Définition 6** Soient  $V, V'$  et  $V''$  des  $A[\Gamma]$ -modules. Soient  $f$  et  $g$  deux  $A$ -homomorphismes et  $0 \longrightarrow V' \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} V'' \longrightarrow 0$  une suite exacte en tant que  $A$ -modules.

Si pour tout  $\delta = (\Delta, \Sigma)$  dans  $\mathcal{F}$  les suites  $0 \longrightarrow V'^\Sigma \xrightarrow{f/\Sigma} V^\Sigma \xrightarrow{g/\Sigma} V''^\Sigma \longrightarrow 0$  où  $f/\Sigma$  et  $g/\Sigma$  désignent respectivement les restrictions de  $f$  et  $g$ , sont exactes en tant que  $A[\Delta/\Sigma]$ -modules, on dira que la suite  $0 \longrightarrow V' \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} V'' \longrightarrow 0$  est une  $\mathcal{F}$ -suite exacte.

**Définition 7** Soit  $0 \longrightarrow V' \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} V'' \longrightarrow 0$  une  $\mathcal{F}$ -suite exacte. Si  $g$  admet une section  $s$  qui est un  $\mathcal{F}$ -homomorphisme, on dira que cette suite est une  $\mathcal{F}$ -suite exacte scindée.

### $\mathcal{F}$ -groupes de Grothendieck

Pour chaque type de suite exacte précédente, on définit respectivement un groupe de Grothendieck (voir [Zo]).

#### Etude du $\mathcal{F}$ -groupe de Grothendieck faible $G_f(K[\Gamma], \mathcal{F})$

**Lemme** Soient  $\Gamma$  un groupe fini,  $F \subset SQ(\Gamma)$ ,  $K$  un corps de caractéristique zéro,  $V$  et  $V'$  deux  $K[\Gamma]$ -modules. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i)  $[V]_f = [V']_f$  dans  $G_f(K[\Gamma], \mathcal{F})$ .
- ii) il existe  $U'$  un  $K[\Gamma]$ -module tel que les deux  $K[\Gamma]$ -modules  $V \oplus U'$  et  $V' \oplus U'$  sont  $\mathcal{F}$ -faiblement isomorphes.
- iii)  $V^\Sigma \simeq V'^\Sigma$  en tant que  $K[\Delta/\Sigma]$ -module pour tout  $(\Delta, \Sigma)$  dans  $\mathcal{F}$ .
- iv) Les deux  $K[\Gamma]$ -modules  $V$  et  $V'$  sont  $\mathcal{F}$ -faiblement isomorphes.

**Théorème 1** Soient  $\Gamma$  un groupe fini d'ordre  $n$ ,  $K$  un corps de caractéristique zéro contenant les racines  $n^{\text{ièmes}}$  de l'unité, l'application :

$$\begin{aligned} T_f : G_f(K[\Gamma], \mathcal{F}) &\longrightarrow \text{Hom}(R_{\mathcal{F}}(\Gamma)^{\perp\perp}, \mathbb{Z}) \\ [V]_f &\longmapsto T_f([V]_f) : \chi \longmapsto \langle \chi_\gamma, \chi \rangle \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

**Etude du  $\mathcal{F}$ -groupe de Grothendieck scindé  $G_{\oplus}(K[\Gamma], \mathcal{F})$**

**Famille complète et complété d'une famille**

**Définition 8** Soient  $(\Delta, \Sigma)$  et  $(\Delta', \Sigma')$  deux sous-quotients. On dira qu'ils vérifient la propriété  $\varphi$ , si et seulement si, le sous-groupe  $\Delta$  est inclus dans le normalisateur de  $\Sigma'$  dans  $\Gamma$  et le sous-groupe  $\Delta'$  est inclus dans le normalisateur de  $\Sigma$  dans  $\Gamma$  i.e.

$$(\Delta, \Sigma) \text{ et } (\Delta', \Sigma') \text{ vérifient la propriété } \varphi \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \subset N_{\Gamma}(\Sigma') \\ \text{et} \\ \Delta' \subset N_{\Gamma}(\Sigma) \end{cases}$$

Soit  $\mathcal{F}$  une famille de sous-quotients. On dira que c'est une famille vérifiant la propriété  $\varphi$  si et seulement si tous ses éléments vérifient, deux à deux, la propriété  $\varphi$

**Définition 9** Une famille  $\mathcal{F}$  vérifiant la propriété  $\varphi$  est dite complète, si et seulement si, pour tous sous-quotients  $(\Delta, \Sigma)$  et  $(\Delta', \Sigma')$  dans  $\mathcal{F}$  le sous-quotient  $(\overline{\Delta \cup \Delta'}, \overline{\Sigma \cup \Sigma'})$  est dans  $\mathcal{F}$ .

**Définition 10** Soit  $\mathcal{F}$  une famille vérifiant la propriété  $\varphi$ . On appellera complété de la famille  $\mathcal{F}$ , la plus petite famille complète contenant  $\mathcal{F}$  et on la note  $\mathcal{F}_c$ .

**Théorème 2** Soient  $\Gamma$  un groupe fini d'ordre  $n$ ,  $K$  un corps de caractéristique zéro contenant les racines  $n^{\text{ièmes}}$  de l'unité et  $\mathcal{F}$  une famille vérifiant la propriété  $\varphi$ . L'application :

$$\begin{aligned} T_{\oplus} : G_{\oplus}(K[\Gamma], \mathcal{F}) &\longrightarrow \text{Hom}(R_{\mathcal{F}_c}(\Gamma)^{\perp\perp}, \mathbb{Z}) \\ [V]_{\oplus} &\longmapsto T_{\oplus}([V]_{\oplus}) : \chi \longmapsto \langle \chi_V, \chi \rangle \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

**Etude du  $\mathcal{F}$ -groupe de Grothendieck exact  $G_0(K[\Gamma], \mathcal{F})$**

**Théorème 3** Soit  $\mathcal{F} = \{(\Delta, \Sigma), (\Delta', \Sigma'), (1, 1)\}$  une famille vérifiant la propriété  $\varphi$  et telle que  $\Sigma' \not\subset \Delta$  et  $\Sigma \not\subset \Delta'$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i)  $[V]_f = [V']_f$ .
- ii) Il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n[V]_{\oplus} = n[V']_{\oplus}$ .
- iii)  $[V]_{\oplus} = [V']_{\oplus}$ .
- iv)  $[V]_0 = [V']_0$ .

**Théorème 4** *Sous les mêmes hypothèses que le théorème 3.3. L'application*

$$\begin{aligned} T_0 : G_0(K[\Gamma], \mathcal{F}) &\longrightarrow \text{Hom}(R_{\mathcal{F}}(\Gamma)^{\perp\perp}, \mathbb{Z}) \\ [V]_0 &\longmapsto T_0([V]_0) : \chi \longmapsto \langle \chi_V, \chi \rangle \end{aligned}$$

*est un isomorphisme.*

**Théorème 5** *Soient  $\Gamma$  un groupe fini,  $V, V'$  deux  $K[\Gamma]$ -modules et soit*

$$\mathcal{F} = \{(\Delta, \Sigma), (\Delta', \Sigma'), (1, 1)\}$$

*une famille vérifiant la propriété  $\wp$  et l'une des inclusions  $\Sigma' \subset \Delta$ , ou bien,  $\Sigma \subset \Delta'$ . Alors si on pose*

$$\mathcal{F}_0 = \{(\Delta, \Sigma), (\Delta', \Sigma'), (\overline{\Delta \cup \Delta'}, \overline{\Sigma \cup \Sigma'}), (1, 1)\}.$$

*Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *i)  $[V]_0 = [V']_0$  dans  $G_0(K[\Gamma], \mathcal{F})$  .*
- *ii)  $[V]_0 = [V']_0$  dans  $G_0(K[\Gamma], \mathcal{F}_0)$  .*
- *iii)  $[V]_f = [V']_f$  dans  $G_f(K[\Gamma], \mathcal{F}_0)$  .*

**Théorème 6** *Sous les mêmes hypothèses que le théorème 3.5 et si on suppose de plus que le corps  $K$  contient les racines  $n^{\text{ièmes}}$  de l'unité, alors l'application :*

$$\begin{aligned} T_0 : G_0(K[\Gamma], \mathcal{F}) &\longrightarrow \text{Hom}(R_{\mathcal{F}_0}(\Gamma)^{\perp\perp}, \mathbb{Z}) \\ [V]_0 &\longmapsto T_0([V]_0) : \chi \longmapsto \langle \chi_V, \chi \rangle \end{aligned}$$

*est un isomorphisme.*

### Cas cyclique

Soit  $\Gamma = C_n$  le groupe cyclique d'ordre  $n$ . Pour tout  $k$  divisant  $n$ , on désigne par  $C_k$  le sous-groupe de  $C_n$  d'ordre  $k$ . Posons

$$\mathcal{F}_0 = \{(C_{\text{ppcm}(m, m')} C_{l'}) \forall (C_m, C_l), (C_{m'}, C_{l'}) \text{ dans } \mathcal{F}, C_l \subset C_{l'} \subset C_m\}.$$

**Théorème 7** *Soit  $K$  un corps contenant les racines  $n^{\text{ièmes}}$  de l'unité. L'application :*

$$\begin{aligned} T_0 : G_0(K[C_n], \mathcal{F}) &\longrightarrow \text{Hom}(R_{\mathcal{F}_0}(C_n), \mathbb{Z}) \\ [V]_0 &\longmapsto T_0([V]_0) : \chi \longmapsto \langle \chi_V, \chi \rangle \end{aligned}$$

*est un isomorphisme.*

## Bibliographie

- [1] *F. W. Anderson, K. R. Fuller*, Rings and categories of modules, Graduate text in mathematics 13, Springer Verlag, 2nd edit. 1992.
- [2] *C. W. Curtis et I. Reiner*, Representations theory of finite groups and associative algebras, edited by : R. Courant, L. Bers, J.J. Stokers, 1962.
- [3] *C. W. Curtis, I. Reiner*, Methods of representation theory with applications to finite groups and orders, Vol 1, Wiley classics library, 1990.
- [4] *P. Deligne*, Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L, Modular functions of one variable II, Lecture Notes in Math. 349 (1972) p.501-597.
- [5] *A. W. M. Dress*, Contribution to the theory of induced representations, Algebraic K-theory II, Lecture Notes in Math. 342, (1973), p.183 - 240
- [6] *A. Heller, Reiner*, Grothendieck groups of orders in semi-simple algebras , Trans. Amer. Soc. 112, vol 2, (1964), p.344-355.
- [7] *J-P Serre*, Représentations linéaires des groupes finis, Hermann, Paris, 1971.
- [8] [Zo] *Dj, Zobiri* Groupes de Grothendieck associés à des sous-quotients d'un groupe fini, thèse, (1996).

Djouher Zobiri  
U.F.R Mathématiques et Informatique  
Université Bordeaux I  
351, cours de la Libération  
33405 Talence Cedex, FRANCE



## Rapport sur l'enquête Forum des Jeunes mathématiciennes, 1997.

Parmi la trentaine de jeunes mathématiciennes présentes au forum, 18 ont répondu au questionnaire distribué sur place .

### *1. Les réponses quantitatives au questionnaire.*

Dans les 18 équipes de recherche dont font partie ces jeunes mathématiciennes, on peut comptabiliser une cinquantaine de doctorantes et une centaine de doctorants (hommes) ; parmi leurs patrons de thèse, se trouve un tiers de femmes.

Une bonne moitié d'entre elles ont déjà participé à des congrès et y ont constaté une proportion de femmes inférieure à 20% ; treize jeunes mathématiciennes se sentent minoritaires dans la communauté mathématique et sept pensent que ceci a des effets négatifs dans leur développement de mathématicienne, une pense au contraire que les effets sont positifs.

### *2. Les réponses qualitatives au questionnaire.*

Elles ont apprécié la bonne humeur et la gentillesse générale, l'ambiance simple, très sympathique et chaleureuse et la bonne organisation du forum.

Elles ont aimé non seulement se retrouver entre jeunes et pouvoir nouer des contacts mais encore voir des mathématiciennes ayant réussi et parler (pas seulement sur le plan purement "professionnel") avec des mathématiciennes de tous âges et de personnalités diverses.

Elles ont apprécié la variété des sujets exposés, mathématiques et culturels, la pluridisciplinarité dans les mathématiques, la qualité et l'intérêt des exposés.

Enfin elles ont été enthousiasmées par les exposés sur les oeuvres des mathématiciennes pionnières.

Voici d'autre part quelques critiques (dont nous essayerons de tenir compte en 1998) : les exposés des jeunes mathématiciennes étaient trop courts, trop chargés et souvent difficiles à comprendre ; il y avait trop d'exposés en parallèle . Le temps consacré au débat (en particulier aux statistiques dans le second degré et à l'université) était trop court.

Enfin, elles auraient aimé des pauses plus conséquentes, un déjeuner en commun pour éviter la dispersion dès le premier jour, moins de sessions en parallèle et plus de temps pour chaque exposé ; elles suggèrent que l'on organise des exposés plus généraux en sessions parallèles, que l'on demande une présentation plus ample du domaine de recherche et de l'intérêt de l'étude faite afin d'avoir une idée plus précise des domaines de travail des jeunes mathématiciennes.





## Deuxième Forum des Jeunes Mathématiciennes (1997)

• <b>Editorial</b>	<b>1</b>
• <b>Textes des participantes</b>	
Branches continues de solutions pour un système elliptique et algébrique.	
	<i>Cristelle Barillon</i> <b>3</b>
Contractions d'algèbre de Lie et torsion de Nijenhuis.	<i>Naïma Bedjaoui</i> <b>7</b>
Polynômes de Bernstein génériques et relatifs associés à une application analytique.	
	<i>Hélène Biosca</i> <b>11</b>
Calcul fonctionnel harmonique dans une $\star$ -a.l.m.c complète et dans une $\star$ -a.b.m.c complète.	<i>Lamiâa Bourass</i> <b>15</b>
Sur un problème mathématique en mécanique des fluides.	<i>Renata Bunoïu</i> <b>19</b>
Linéarisation de certaines structures de Poisson.	<i>Véronique Chloup-Arnould</i> <b>23</b>
Milieux poreux fissurés avec double périodicité.	<i>Ioana-Andreea Ene</i> <b>29</b>
Décomposition spectrale de 1-formes différentielles sur une surface de Riemann et séries d'Eisenstein.	<i>Thérèse Falliero</i> <b>35</b>
Un théorème de Paley-Wiener pour les groupes de Lie complètement résolubles.	
	<i>Gayatri Garimella</i> <b>39</b>
Formes d'enlacement et invariants des 3-variétés.	<i>Catherine Gille</i> <b>43</b>
Propriétés spectrales de certains systèmes dynamiques en théorie ergodique. Produits croisés.	<i>Mélanie Guenais</i> <b>47</b>
Difféomorphismes hyperboliques des surfaces compactes et combinatoire des partitions de Markov.	<i>Emmanuelle Jeandenans</i> <b>53</b>
Problèmes de descente galoisienne.	<i>Sylvie Monier-Derviaux</i> <b>57</b>
Singularités normales d'équations $z^k - f(x, y) = 0$ .	<i>Anne Pichon</i> <b>63</b>
Résolutions universelles pour des problèmes NP-complets.	<i>Natacha Portier</i> <b>67</b>
Invariants d'algèbres à involution.	<i>Anne Quéguiner</i> <b>71</b>
Conditions d'existence de solutions pour l'équation du pendule simple.	
	<i>Sandrine Tagni</i> <b>75</b>
Groupes de Grothendieck associés à des quotients d'un groupe fini.	
	<i>Djouher Zobiri</i> <b>81</b>
• <b>Enquête</b>	<b>87</b>

Coordination du supplément au numéro 3 :

Marie-Françoise Roy

Directrice de Publication : *Julianne Unterberger*

Imprimerie de l'Université de Rennes I

Numéro ISSN : 1271-3546

Dépôt légal : février 1999

Prix au numéro : 40 FF