

Forum des mathématiciennes : Les mathématiciennes au regard de l'excellence

le 17^e octobre 2014

à l'Institut Henri Poincaré, Paris.

Merci de confirmer votre présence à l'adresse forum14@femmes-et-maths.fr
www.femmes-et-maths.fr

Avec des conférencières du Congrès International des Mathématiciens ICM2014 :

Zoe Chatzidakis

Théorie des modèles des corps aux différences, et applications aux systèmes dynamiques algébriques

Sandrine Péché

Grandes matrices aléatoires : les modèles déformés

Michela Varagnolo

Actions catégoriques et bases canoniques

Cette manifestation est organisée par l'association *femmes et mathématiques* en partenariat avec la Mission pour la Place des Femmes du CNRS, la Société Française de Statistique, la Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles, la Société Mathématique de France ainsi qu'avec le soutien de l'Institut Henri Poincaré et de l'Institut des Sciences Mathématiques et de leurs Interactions du CNRS.

*femmes
&
mathématiques*

Cette rencontre est organisée par l'association Femmes et Mathématiques en partenariat avec la Mission pour la Place des Femmes du CNRS, les sociétés savantes de mathématiques (la Société Française de Statistique, la Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles, la Société Mathématique de France) ainsi qu'avec le soutien de l'Institut des Sciences mathématiques et de leurs interactions du CNRS et de l'Institut Henri Poincaré.

Elle est jumelée avec les activités organisées à l'IHP l'après-midi du 17 octobre autour de son 20ème anniversaire. Elle sera suivie le lendemain d'une journée destinée aux jeunes mathématiciennes, dans la tradition des forums des jeunes mathématiciennes.

Quelques rappels

En France, les mathématiques attendent plus de femmes. En 20 ans, la situation s'est dégradée pour devenir aujourd'hui critique quant à la présence des femmes en mathématiques dans l'enseignement supérieur et la recherche. Les statistiques actuelles en section 25 au niveau rang A (7% de femmes) amènent en particulier à se poser la question suivante : est-ce qu'il y aura des femmes en mathématiques pures dans 5 ans ?

Pourtant les bachelières qui ont fait d'excellentes études ne manquent pas ! Nous les attendons. Car au niveau recherche, on assiste à une explosion de femmes excellentes en mathématiques. Les récents prix que nos mathématiciennes ont reçus en sont la preuve. Autre illustration : sur la liste des conférenciers invités au Congrès International de Mathématiciens d'août 2014 à Séoul (Corée), on trouve 6 femmes en poste dans les institutions françaises, c'est-à-dire plus que de représentants de beaucoup de pays. Tous pays confondus, on parle d'une femme lauréate pour la médaille Fields.

Ce forum est l'occasion de donner aux mathématiques françaises au féminin le coup de projecteur qu'elles méritent et de montrer aux lycéennes et étudiantes que les femmes ont pleinement leur place en mathématiques, et dans les sciences en général.

14ème Forum des jeunes mathématicien-ne-s : les mathématiciennes au regard de l'excellence.

IHP–Amphithéâtre Darboux–17-18 octobre 2014

Vendredi 17 octobre

- **9h** Ouverture et présentation du Forum
- **9h15-10h15**

Zoé Chatzidakis

Théorie des modèles des corps aux différences, et applications aux systèmes dynamiques algébriques

Dép. de Mathématiques et Applications, Ecole Normale Supérieure, CNRS

- **10h15** Pause-café
- **10h45-11h45**

Sandrine Péché

Grandes matrices aléatoires : les modèles déformés

Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires, Université Paris VII

- **11h45-12h45**

Michela Varagnolo

Algèbres de Hecke et actions catégoriques

Laboratoire Analyse, Géométrie et Modélisation, Université de Cergy Pontoise

- **12h45-14h** Déjeuner libre
- **14h-16h** Atelier pour les jeunes mathématicien-ne-s sur l'insertion professionnelle et les rapports sociaux de sexe
- **16h-18h** Témoignages dans le cadre de l'anniversaire de l'IHP

Samedi 18 octobre-Sessions jeunes mathématicien-ne-s

- **Session Algèbre**
 - **9h-9h30** Frobenius et ramification logarithmique, Stéphanie Reglade, Institut de Mathématiques de Bordeaux, Doctorante.
 - **9h30-10h** Nœuds et intersections triples équivariantes de surfaces, Delphine Moussard, Univ. Pise, Post-Doc.
 - **10h-10h30** Pause-café
 - **10h30-11h00** Le problème de Yamabe sur les espaces stratifiés, Ilaria Mondello, Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, Univ. Nantes, Doctorante.
 - **11h-11h30** De l'ergodicité sur deux espaces de mesure infinie, Alba Marina Málaga Sabogal, Département de Mathématiques d'Orsay, Doctorante.
 - **11h30-12h00** Pseudo real closed fields and NTP2, Samaria Montenegro, IMJ, Université Paris Diderot, Doctorante.
- **Session Analyse**
 - **9h-9h30** Propagation d'états cohérents, Lysianne Hari, Université de Pise, Post-Doc.
 - **9h30-10h** Formal solutions of singularly-perturbed linear differential systems, Suzy S. Maddah, Université de Limoges, XLIM, Doctorante.
 - **10h-10h30** Pause-café
 - **10h30-11h00** Inégalités de concentration pour les statistiques d'ordre, Maud Thomas, LPMA, Université Paris Diderot, Doctorante.
 - **11h-11h30** Inégalités de concentration pour un modèle d'occupation avec nombre infini d'urnes, Anna Ben-Hamou, LPMA, Université Paris Diderot, Doctorante.
 - **11h30-12h00** Poster. Calcul exact des coefficients de la décomposition HDMR pour une fonction multi-linéaire, Manon Bondouy, Université de Toulouse, Doctorante.
- **12h-13h** Comment candidater aux postes académiques
- **13h** Déjeuner sur place

FROBENIUS ET RAMIFICATION LOGARITHMIQUE

Stéphanie Reglade

Institut de mathématiques de Bordeaux
351 cours de la Libération F 33405 Talence Cedex
sstephreg@gmail.com

Résumé - L/K étant une ℓ -extension de corps de nombres, \mathfrak{p} une place de K est dite logarithmiquement non ramifiée dans L selon la définition posée par Jaulent dans [2], si : $L_{\mathfrak{p}} \subseteq K_{\mathfrak{p}}^c$ où $K_{\mathfrak{p}}^c$ désigne la \mathbb{Z}_{ℓ} -extension cyclotomique de $K_{\mathfrak{p}}$. Par suite le sous-groupe de décomposition de \mathfrak{p} est cyclique. Se pose alors naturellement la question : pouvons nous, dans le contexte de la non-ramification logarithmique, mettre en évidence un générateur particulier de ce sous-groupe de décomposition, qui jouerait le rôle du Frobenius classique ? Pour ce faire, nous étudions le ℓ -adifié du groupe multiplicatif d'un corps local muni de la valuation logarithmique introduite par Jaulent, dont nous rappelons la construction. Le but est de montrer que le contexte logarithmique peut aussi être compris grâce à la théorie abstraite de Neukirch. Ainsi nous obtenons pour une ℓ -extension locale un symbole local logarithmique qui ne diffère du symbole local ℓ -adique [5] que pour les places \mathfrak{p} au dessus de ℓ . L'intérêt réside dans le fait que nous sommes alors en mesure de définir un Frobenius logarithmique associé au contexte de la ramification logarithmique : ce dernier coïncide avec le Frobenius classique sauf pour les places au dessus de ℓ : cela permet donc d'étendre la théorie à des places \mathfrak{p} au dessus de ℓ ramifiées au sens classique mais non ramifiées au sens logarithmique.

Mots clés - théorie ℓ -adique du corps des classes, ramification logarithmique

1 Introduction

La théorie ℓ -adique du corps des classes de Jaulent [3] établit, dans le cas local, l'existence d'un isomorphisme entre le groupe de Galois de toute ℓ -extension abélienne finie d'un corps local $K_{\mathfrak{p}}$ et un quotient du ℓ -adifié du groupe multiplicatif de ce corps local, $R_{K_{\mathfrak{p}}}$. D'après [5], la théorie ℓ -adique peut se déduire de la théorie abstraite, développée par Neukirch dans [1]. Le contexte de Neukirch est celui d'une théorie de Galois abstraite avec pour point de départ un groupe G abstrait profini. Cette théorie abstraite repose sur l'existence de deux morphismes fondamentaux : le degré et la valuation et sur l'axiome du corps des classes : condition cohomologique sur le G -module A que nous étudions.

Par rapport à [5], nous considérons le même objet local, à savoir, le ℓ -adifié du groupe multiplicatif d'un corps local que précédemment. Cette fois-ci nous le munissons de la valuation logarithmique introduite par Jaulent, dont nous rappelons la construction. Et nous modifions également l'application degré. De façon générale, pour un corps local $K_{\mathfrak{p}}$, nous remplaçons aussi sa \mathbb{Z}_{ℓ} -extension non ramifiée par sa \mathbb{Z}_{ℓ} -extension cyclotomique, et la valuation usuelle de

$\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}$ par la valuation logarithmique : les différences par rapport au contexte local précédent vont donc apparaître pour les places au dessus de ℓ .

Le but est de montrer que le contexte logarithmique peut aussi être compris grâce à la théorie abstraite de Neukirch. Ainsi nous obtenons pour une ℓ -extension locale un symbole local logarithmique qui ne diffère du symbole local ℓ -adique que pour les places \mathfrak{p} au dessus de ℓ . L'intérêt réside dans le fait que nous sommes alors en mesure de définir un Frobenius logarithmique associé au contexte de la ramification logarithmique : ce dernier coïncide avec le Frobenius classique sauf pour les places au dessus de ℓ : cela permet donc d'étendre la théorie à des places \mathfrak{p} au dessus de ℓ ramifiées au sens classique mais non ramifiées au sens logarithmique.

Dans tout ce qui suit ℓ désigne un nombre premier fixé.

1.1 Le contexte logarithmique

Nous introduisons le ℓ -adifié du groupe multiplicatif du corps local considéré : $\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{p}}}$ défini comme la limite projective des $L_{\mathfrak{p}}^{\times} / L_{\mathfrak{p}}^{\times \ell^k}$ [3, définition-proposition 1.2].

Definition 1 Degré ℓ -adique et valuation logarithmique [2]

i) Le degré ℓ -adique d'un nombre premier p est : $\text{deg}_{\ell}(p) = \begin{cases} \text{Log}_{I_w}(p) & \text{si } p \neq \ell \\ \text{Log}_{I_w}(1 + \ell) & \text{si } p = \ell \end{cases}$

ii) Le degré d'une place \mathfrak{p} du corps de nombres K est : $\text{deg}_{\ell}(\mathfrak{p}) = [\hat{\mathbb{Q}}_{\mathfrak{p}}^c \cap K_{\mathfrak{p}} : \mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}] \cdot \text{deg}_{\ell}(p)$ où $\hat{\mathbb{Q}}_{\mathfrak{p}}^c$ désigne la $\hat{\mathbb{Z}}$ -extension cyclotomique de \mathbb{Q}_p .

iii) La ℓ -valuation logarithmique associée à \mathfrak{p} est définie sur $\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}$ par :

$$\tilde{v}_{\mathfrak{p}}(x) = \text{Log}_{I_w}(N_{K_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_p}(x)) / \text{deg}_{\ell}(\mathfrak{p})$$

où Log_{I_w} désigne le logarithme d'Iwasawa. Cette valuation est à valeurs dans \mathbb{Z}_{ℓ} ,

Proposition 1 Valuations logarithmique et usuelle [2]

Soit $K_{\mathfrak{p}}$ une extension finie de \mathbb{Q}_p , alors pour $\mathfrak{p} \nmid \ell$, la ℓ -valuation logarithmique est proportionnelle à la valuation classique sur $\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}$.

Proposition 2 Uniformisantes pour la valuation logarithmique :

Dans le même contexte, si \mathfrak{p} est une place au dessus de ℓ , alors $\tilde{\pi}_{\mathfrak{p}}|1 + \ell$ est une uniformisante pour la valuation logarithmique, et si \mathfrak{p} ne divise pas ℓ , l'uniformisante classique $\pi_{\mathfrak{p}}$ est aussi une uniformisante pour la valuation logarithmique.

Definition 2 L'application degré

La $\hat{\mathbb{Z}}$ -extension cyclotomique de \mathbb{Q}_p nous donne un isomorphisme du $\text{Gal}(\hat{\mathbb{Q}}_p^c / \mathbb{Q}_p)$ sur $(\prod_{p \neq 2} U_p^1) U_2^2$, que l'on transporte par le logarithme sur $\hat{\mathbb{Z}}$. Pour extension finie $K_{\mathfrak{p}}$ de \mathbb{Q}_p , nous obtenons sa $\hat{\mathbb{Z}}$ -extension cyclotomique comme le compositum de $K_{\mathfrak{p}}$ et de la $\hat{\mathbb{Z}}$ -extension de \mathbb{Q}_p . En considérant les pro- ℓ -parties, nous obtenons respectivement la \mathbb{Z}_{ℓ} -extension cyclotomique de \mathbb{Q}_p et la \mathbb{Z}_{ℓ} -extension cyclotomique de $K_{\mathfrak{p}}$, notée $K_{\mathfrak{p}}^c$.

Nous définissons l'application degré par :

$$\begin{aligned} \text{deg} : G = \text{Gal}(K_{\mathfrak{p}}^{ab} / K_{\mathfrak{p}}) &\rightarrow \mathbb{Z}_{\ell} \\ \phi &\mapsto \phi|_{K_{\mathfrak{p}}^c} \end{aligned}$$

Frobenius et ramification logarithmique

où K_p^{ab} désigne la pro- ℓ -extension abélienne maximale de K_p . C'est un homomorphisme continu et surjectif, dont le noyau est le groupe de Galois $\text{Gal}(K_p^{ab}/K_p^c)$. Nous suivons alors la construction abstraite de Neukirch. Pour $L_{\mathfrak{p}}$ une ℓ -extension finie de K_p , l'indice de ramification logarithmique et le degré d'inertie logarithmique apparaissent alors naturellement, définis par :

$$\tilde{f}_{L_{\mathfrak{p}}/K_p} = [L_{\mathfrak{p}} \cap K_p^c : K_p] \quad \tilde{e}_{L_{\mathfrak{p}}/K_p} = [L_{\mathfrak{p}} : L_{\mathfrak{p}} \cap K_p^c]$$

Ces définitions coïncident alors avec celles données par Jaulent [2] .

Proposition 3 La valuation logarithmique \tilde{v}_p satisfait les deux propriétés :

(i) $\tilde{v}_p(\mathcal{R}_{K_p}) = Z$ tel que $\mathbb{Z} \subset Z$ et $Z/n.Z \simeq \mathbb{Z}/n.\mathbb{Z}$ pour tout n

(ii) $\tilde{v}_p(N_{L_{\mathfrak{p}}/K_p} \mathcal{R}_{L_{\mathfrak{p}}}) = \tilde{f}_{L_{\mathfrak{p}}/K_p} . Z$ pour toute extension finie $L_{\mathfrak{p}}$ of K_p .

Ainsi la valuation logarithmique est hensélienne par rapport deg selon la définition de Neukirch.

1.2 Le symbole local logarithmique et le Frobenius logarithmique

Théorème 1 Le degré et la valuation logarithmique constituent une paire de corps des classes et \mathcal{R}_{K_p} satisfait l'axiome du corps des classes [4, théorème 2.5.1]. Ainsi pour toute ℓ -extension abélienne finie $L_{\mathfrak{p}}$ de K_p extension finie de \mathbb{Q}_p , nous avons l'isomorphisme :

$$\text{Gal}(L_{\mathfrak{p}}/K_p) \simeq \mathcal{R}_{K_p}/N_{L_{\mathfrak{p}}/K_p} \mathcal{R}_{L_{\mathfrak{p}}}$$

Définition 3 Cela permet de définir l'homomorphisme surjectif suivant appelé le symbole local logarithmique :

$$(\cdot, L_{\mathfrak{p}}/K_p) : \mathcal{R}_{K_p} \longrightarrow \text{Gal}(L_{\mathfrak{p}}/K_p)$$

Proposition 4 [2, i), p. 4]

Pour une place non archimédienne p de \mathbb{Q} , nous avons

$$\mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p} \simeq \mu_p . p^{\mathbb{Z}_\ell} \quad \text{pour } p \neq \ell \quad \text{et } \mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p} \simeq (1 + \ell)^{\mathbb{Z}_\ell} . \ell^{\mathbb{Z}_\ell} \quad \text{pour } p = \ell$$

Ainsi nous avons une décomposition de la forme : $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p} \simeq \tilde{\mathcal{U}}_{\mathbb{Q}_p} . \tilde{\pi}_p^{\mathbb{Z}_\ell}$.

Proposition 5 Nous avons une expression explicite pour le symbole local logarithmique dans le contexte suivant : soit ζ une racine de l'unité d'ordre une puissance de ℓ , et $a \in \mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p}$, alors

$$(a, (\mathbb{Q}_p(\zeta)/\mathbb{Q}_p))_\ell = \zeta^{n_p}$$

avec

$$n_p = p^{v_p(a)} \quad \text{pour } p \neq \ell \quad \text{et } p \neq \infty$$

$$n_p = (1 + \ell)^{-\tilde{v}_\ell(a)} \quad \text{pour } p = \ell$$

$$n_p = \text{sgn}(a) \quad \text{pour } p = \infty$$

où $(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})_\ell$ dénote la projection sur le ℓ - sous-groupe de Sylow de $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$.

Definition 4 *Le Frobenius logarithmique*

Soit L/K une ℓ -extension abélienne finie. Le Frobenius logarithmique associé à une place \mathfrak{p} de K logarithmiquement non ramifiée dans L est défini par :

$$\left(\frac{\widetilde{L/K}}{\mathfrak{p}}\right) = (\tilde{\pi}_{\mathfrak{p}}, L_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}})$$

avec $\tilde{\pi}_{\mathfrak{p}}$ l'uniformisante logarithmique, définie préalablement.

Théorème 2 *Cas quadratique*

Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ étant une extension quadratique,

.si d est congru à 1 modulo 8, 2 est à la fois complètement décomposée au sens classique et au sens logarithmique : Frobenius classique et logarithmique sont tous deux triviaux

.si d est congru à 2 modulo 16, 2 est ramifiée au sens classique mais logarithmiquement inerte : seul le Frobenius en 2 au sens logarithmique existe et peut être explicité : $\left(\frac{K/\mathbb{Q}}{2}\right)(\zeta_8) = \zeta_8^{\pm 3}$.

Théorème 3 *Cas général d'une ℓ -extension*

Considérons K/\mathbb{Q} une ℓ -extension abélienne finie et \mathfrak{p} une place de K .

-Si \mathfrak{p} n'est pas au dessus de ℓ , ramification classique et logarithmique coïncident. Si \mathfrak{p} est une place non ramifiée dans un sens ou dans l'autre, Frobenius classique et logarithmique coïncident également.

-Si \mathfrak{p} est au dessus de ℓ , les seuls cas possibles sont les suivants :

.soit \mathfrak{p} est totalement décomposée au sens logarithmique et au sens classique. Le sous-groupe de décomposition est trivial, et Frobenius classique et logarithmique sont tous deux égaux et triviaux.

.soit \mathfrak{p} est logarithmiquement non ramifiée mais ramifiée au sens classique. Alors seul le Frobenius logarithmique existe.

1.3 L'application d'Artin logarithmique

Grâce à la valuation p -adique, nous disposons d'une partition de \mathbb{Z}_p :

$$\mathbb{Z}_\ell \setminus \{0\} = \bigcup_{k \geq 0} \ell^k \mathbb{Z}_\ell^\times.$$

Or sur $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}_\ell}$, nous connaissons le groupe des unités logarithmiques : $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathbb{Q}_\ell} \simeq \ell^{\mathbb{Z}_\ell}$. Ceci nous amène donc à considérer les définitions suivantes :

Definition 5 $L_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}}$ étant une ℓ -extension abélienne finie, nous posons :

si $p|\ell$, $\tilde{\mathcal{U}}_{K_{\mathfrak{p}}}^n = \{x \in \mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}/N_{K_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_\ell}(x) \in (\ell)^{\ell^n \mathbb{Z}_\ell}\}$

si $p \nmid \ell$, nous savons que $\tilde{\mathcal{U}}_{K_{\mathfrak{p}}} \simeq \mu_{\mathfrak{p}}$ et la filtration naturelle est $0 \subset \mu_{\mathfrak{p}}$.

Definition 6 i) Si $L_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}}$ est une ℓ -extension abélienne finie, et si n est le plus petit entier tel que $\tilde{\mathcal{U}}_{K_{\mathfrak{p}}}^n \subseteq N_{L_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}}}(\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{p}}})$ alors l'idéal :

$$\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}^n$$

est appelé conducteur logarithmique local associé à l'extension.

ii) Si L/K est une ℓ -extension abélienne finie, le conducteur logarithmique global est défini par :

$$\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K} = \prod_{\mathfrak{p}} \tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}}$$

Proposition 6 Le \mathfrak{p} -conducteur $\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}}$ est trivial si et seulement si l'extension L/K est logarithmiquement non ramifiée en \mathfrak{p} . $\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}$ contient donc tous les premiers de K qui sont logarithmiquement ramifiés dans L et seuls cela. En outre, si M est intermédiaire entre K et L alors $\tilde{\mathfrak{f}}_{M/K} | \tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}$.

Definition 7 [2, définition 2.1]

Soit K un corps de nombres, le ℓ -groupe des diviseurs logarithmiques de K est

$$D\ell_K = \mathcal{J}_K / \tilde{\mathcal{U}}_K \simeq \bigoplus_{\mathfrak{p}} \mathbb{Z}_{\ell} \mathfrak{p}$$

par la valuation logarithmique $\tilde{v}_{\mathfrak{p}}$ il s'identifie au \mathbb{Z}_{ℓ} -module libre construit sur les places de K .

Definition 8 Soit L/K une ℓ -extension abélienne finie. Soit \mathfrak{p} une place de K logarithmiquement non ramifiée dans L . Soit $D\ell_K$ le groupe des diviseurs logarithmiques de K . Soit $\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}$ le conducteur logarithmique global de L/K , et $D\ell_K^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}$ les diviseurs logarithmiques premiers à $\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}$.

Nous définissons l'application suivante pour une place \mathfrak{p} :

$$\begin{aligned} \widetilde{(L/K)} : D\ell_K^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}} &\rightarrow \text{Gal}(L/K) \\ \mathfrak{p} &\mapsto \left(\frac{\widetilde{(L/K)}}{\mathfrak{p}} \right) \end{aligned}$$

Nous étendons cette application, par multiplicativité à $D\ell_K^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}$. Cette application est alors appelée application d'Artin logarithmique.

Remarque : Lorsque $\mathfrak{p} \nmid \ell$, les valuations classique et logarithmique sont proportionnelles : en effet $\tilde{\pi}_{\mathfrak{p}} = \pi_{\mathfrak{p}}$ la \mathbb{Z}_{ℓ} -extension non ramifiée et la \mathbb{Z}_{ℓ} -cyclotomique coïncident alors. Ainsi symbole d'Artin classique et symbole d'Artin logarithmique correspondent sur les idéaux.

Proposition 7 Propriétés de l'application d'Artin logarithmique

L'application d'Artin logarithmique satisfait les propriétés suivantes pour L/K une ℓ -extension abélienne finie, $\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}$ le conducteur global de l'extension L/K :

i) Si M est intermédiaire entre L et K , alors la restriction de $(\frac{L/K}{\mathfrak{a}})$ à M est $(\frac{M/K}{\mathfrak{a}})$, pour tout $\mathfrak{a} \in D\ell_K^{\tilde{L}/K}$

ii) Si L et L' sont des ℓ -extensions abéliennes, et si nous considérons $\text{Gal}(LL'/K)$ comme sous-groupe de $\text{Gal}(L/K) \times \text{Gal}(L'/K)$, via l'application $\sigma \in \text{Gal}(LL'/K) \rightarrow (\sigma|_L, \sigma|_{L'}) \in \text{Gal}(L/K) \times \text{Gal}(L'/K)$, alors $(\frac{LL'/K}{\mathfrak{a}})$ est $((\frac{L/K}{\mathfrak{a}}, (\frac{L'/K}{\mathfrak{a}})))$ pour tout $\mathfrak{a} \in D\ell_{LL'}^{\tilde{L}L'/K}$

iii) Si K' est une sous-extension quelconque de K et si nous considérons $\text{Gal}(LK'/K')$ comme isomorphe par restriction à K , à un sous-groupe du $\text{Gal}(L/K)$, alors la restriction de $(\frac{LK'/K'}{\mathfrak{a}'})$ à K est $(\frac{K}{N_{K'/K}\mathfrak{a}'})$ pour tout $\mathfrak{a}' \in D\ell_{K'}^{\tilde{L}/K'}$

iv) En particulier si M est un sous-corps entre L et K , alors $(\frac{L/M}{\mathfrak{u}}) = (\frac{L/K}{N_{M\mathfrak{u}}})$, pour tout $\mathfrak{u} \in D\ell_M^{\tilde{L}/K}$.

Théorème 4 Le noyau de l'application d'Artin logarithmique L/K étant une ℓ -extension abélienne finie, nous avons :

$$A\ell_{L/K} := P\ell_K^{(\tilde{L}/K)} \cdot N_{L/K}(D\ell_L^{\tilde{L}/K})$$

où $P\ell_K^{(\tilde{L}/K)}$ est le sous-module des diviseurs logarithmiques principaux associés aux éléments de $\mathcal{R}_K^{(\tilde{L}/K)} = \mathcal{R}_K \cap \mathcal{J}_K^{(\tilde{L}/K)}$ avec $\mathcal{J}_K^{(\tilde{L}/K)} = \prod_{\mathfrak{p}|\tilde{L}/K} \mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}} \prod_{\mathfrak{p}|\tilde{L}/K} \tilde{\mathcal{U}}_{K_{\mathfrak{p}}}^{v_{\mathfrak{p}}(\tilde{L}/K)}$.

Remarque : Il faut noter l'analogie de l'expression du sous-module d'Artin logarithmique avec celle du groupe de Takagi classique.

Références

- [1] J. NEUKIRCH, *Class Field Theory*, Springer-Verlag, GTM 280, (1986)
- [2] J.-F JAULENT, *Classes logarithmiques d'un corps de nombres*, J. Théor. Nombres Bordeaux, **6**, (1994), 301–325.
- [3] J.-F. JAULENT, *Théorie ℓ -adique du corps des classes*, J. Théor. Nombres Bordeaux, **10**, fasc.2 (1998), 355–397.
- [4] F.DIAZ Y DIAZ, J.F JAULENT, S.PAULI, M.POHST, F ;SORIANO-GAFIUK, *A new algorithm for the computation of logarithmic ℓ -class groups of number fields*, Experimentz Math., **14**, (2005), 67–76.
- [5] S.REGLADE, *A formal approach "à la Neukirch" of ℓ -adic class field theory*, submitted
- [6] S.REGLADE, *Frobenius et ramification logarithmique*, preprint
- [7] C.BRIGHI, *Capitulation des classes logarithmiques et étude de certaines tours de corps de nombres*, thèse, Publ. Math. Fac. Sci. Metz, Théor. Nombres (2007), 1–67

NŒUDS ET INTERSECTIONS TRIPLES ÉQUIVARIANTES DE SURFACES

Delphine Moussard

Dipartimento di matematica, Università di Pisa

Largo Bruno Pontecorvo 5, 56021 Pisa, Italie

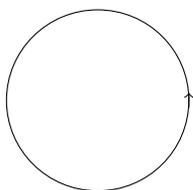
moussard@mail.dm.unipi.it

Résumé - Un nœud est un plongement du cercle dans \mathbb{R}^3 , à isotopie près. On peut le voir comme une ficelle fermée (ou un serpent qui se mord la queue) dans l'espace ambiant. Pour être en mesure de différencier deux nœuds, c'est-à-dire de déterminer quand deux ficelles sont nouées de manière différente, on définit des invariants de nœuds. Dans cet article, on définit un invariant classique, le module d'Alexander. On construit ensuite un invariant de nœuds, à partir d'intersections triples de surfaces dans le revêtement infini cyclique du complémentaire du nœud, sous la forme d'une application trilinéaire sur le module d'Alexander.

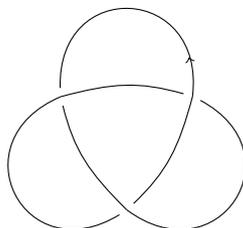
Mots clés - nœud, polynôme d'Alexander, module d'Alexander, intersections triples équivariantes

1 Nœuds orientés

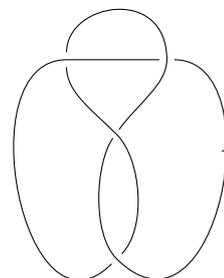
Un *nœud géométrique* est un plongement \mathcal{C}^1 du cercle S^1 dans la sphère S^3 de dimension 3. Étant donnés deux nœuds géométriques $\alpha : S^1 \rightarrow S^3$ et $\beta : S^1 \rightarrow S^3$, une isotopie de α vers β est une application $h : [0, 1] \times S^1 \rightarrow S^3$ telle que $h(0, \cdot) = \alpha$, $h(1, \cdot) = \beta$, et pour tout $t \in [0, 1]$, $h(t, \cdot)$ est un plongement \mathcal{C}^1 . La dernière condition empêche que le nœud géométrique se croise lui-même lors de l'isotopie. On définit un *nœud* comme une classe d'isotopie de nœuds géométriques. Dans la suite, on identifiera un nœud avec l'image d'un de ses représentants. Dans cet article, tous les nœuds seront orientés.



Nœud trivial



Nœud de trèfle



Nœud de huit

Figure 1: Exemples de nœuds orientés

On peut définir les nœuds à partir de plongements dans \mathbb{R}^3 . En voyant S^3 comme \mathbb{R}^3 avec un point à l'infini, on vérifie que tout nœud de S^3 , et toute isotopie entre deux nœuds de S^3 , peut éviter le point à l'infini. L'ensemble des nœuds est donc le même dans les deux cas.

Il peut être facile de montrer que deux nœuds géométriques représentent le même nœud. Il suffit d'exhiber des mouvements géométriques qui permettent de passer de l'un à l'autre. Il est plus difficile de se convaincre que deux nœuds géométriques représentent des nœuds différents. Qu'en est-il par exemple des nœuds de la figure 1 ? On définit pour cela des invariants de nœuds.

2 Module d'Alexander

Soit K un nœud dans S^3 . Une *surface de Seifert* de K est une surface Σ plongée dans S^3 , compacte, connexe, orientée, dont le bord orienté est le nœud K . L'orientation du bord est définie par la convention de la première normale sortante (voir Figure 2). On montre que tout

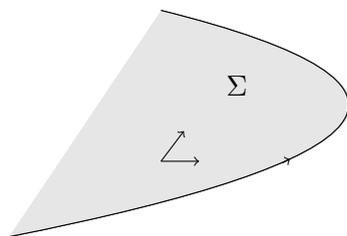


Figure 2: Orientation du bord d'une surface

nœud de S^3 admet une surface de Seifert (on peut par exemple utiliser l'algorithme de Seifert décrit dans [2]). On va utiliser ces surfaces pour construire explicitement le revêtement infini cyclique de l'extérieur du nœud.

Soit $T(K)$ un voisinage tubulaire de K , c'est-à-dire un tore plein plongé dans S^3 dont l'âme est le nœud K . On note $X = S^3 \setminus \text{Int}(T(K))$ l'extérieur de K . On considère l'application suivante définie sur le groupe fondamental de X .

$$\begin{aligned} \pi : \pi_1(X) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ \gamma &\mapsto lk(\gamma, K) \end{aligned}$$

Cette application associe à une courbe γ (plus précisément à sa classe d'isotopie) le nombre d'enlacement de γ avec K , défini comme le nombre d'intersection algébrique d'une surface de Seifert de K avec γ , qui peut être vu comme le nombre de tour qu'effectue la courbe γ autour de K . Au noyau de π est associé un revêtement $p : \tilde{X} \rightarrow X$ de groupe \mathbb{Z} , appelé le *revêtement infini cyclique de X* . Étant donnée une surface de Seifert Σ de K , on peut construire le revêtement \tilde{X} de la manière suivante. On définit une variété $M = S^3 \setminus \Sigma$ en coupant S^3 le long de la surface Σ . La variété M a un bord composé de deux copies Σ^+ et Σ^- de Σ et d'un anneau reliant leurs bords. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on note M_k une copie de M , et Σ_k^+ et Σ_k^- les copies de Σ^+ et Σ^- dans M_k . On construit \tilde{X} à partir des M_k en collant les surfaces Σ_k^+ et Σ_{k-1}^- pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Le groupe des automorphismes du revêtement, c'est-à-dire des homéomorphismes ξ de \tilde{X} tels que $p \circ \xi = p$, est isomorphe à \mathbb{Z} et engendré par un automorphisme τ qui consiste à passer d'une copie M_k de M à la copie M_{k+1} .

On considère maintenant le premier groupe d'homologie singulière de \tilde{X} , noté $H_1(\tilde{X}; \mathbb{Z})$. On a un isomorphisme canonique $H_1(\tilde{X}; \mathbb{Z}) \cong \pi_1(\tilde{X})^{ab}$ qui identifie la classe d'homologie dans $H_1(\tilde{X}; \mathbb{Q})$ d'une courbe fermée simple de \tilde{X} à l'image de la classe d'isotopie de cette courbe dans l'abélianisé du groupe fondamental de \tilde{X} . On définit une structure de $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module sur $H_1(\tilde{X}; \mathbb{Z})$ en définissant l'action de t comme l'action induite sur les classes d'homologie par l'automorphisme τ . Le *module d'Alexander* du nœud K est le $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module $\mathcal{A}(K) = H_1(\tilde{X}; \mathbb{Z})$. On montre que c'est un module de type fini et de torsion sur $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$. On en déduit un invariant classique appelé le *polynôme d'Alexander* et noté Δ_K , introduit par Alexander dans [1], défini comme l'ordre du module d'Alexander. Cet ordre peut se calculer de la manière suivante. On regarde le $\mathbb{Q}[t, t^{-1}]$ -module $\mathcal{A}_{\mathbb{Q}}(K) = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{A}(K)$. Comme $\mathbb{Q}[t, t^{-1}]$ est un anneau principal, ce module s'écrit sous la forme $\bigoplus_{1 \leq i \leq n} \frac{\mathbb{Q}[t, t^{-1}]}{(P_i)}$ pour un entier n et des polynômes P_i qui peuvent être choisis dans $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$. L'ordre du module est le produit $\Delta_K = \prod_{1 \leq i \leq n} P_i$. Le polynôme Δ_K est défini modulo un inversible de $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$. On montre qu'il peut être normalisé sous la forme d'un polynôme symétrique ($\Delta_K(t^{-1}) = \Delta_K(t)$) tel que $\Delta_K(1) = 1$. On vérifie que le module d'Alexander (à isomorphisme près) et le polynôme d'Alexander (normalisé) ne dépendent pas du représentant du nœud utilisé pour les définir. Ce sont donc bien des invariants du nœud.

Exemple

Pour les nœuds de la figure 1, le polynôme d'Alexander prend les valeurs suivantes :

- Nœud trivial : $\Delta(t) = 1$,
- Nœud de trèfle : $\Delta(t) = t - 1 + t^{-1}$,
- Nœud de huit : $\Delta(t) = -t + 3 - t^{-1}$.

Ces trois nœuds sont donc distincts. Il existe cependant des nœuds distincts qui ont le même polynôme d'Alexander. À ce jour, il n'existe aucun invariant (ou ensemble d'invariants) de nœuds dont on ait montré qu'il est complet, c'est-à-dire qu'il différencie tous les nœuds.

3 Intersections triples équivariantes

Fixons un nœud $K \subset S^3$, et notons X son extérieur, \tilde{X} le revêtement infini cyclique associé, et τ un générateur du groupe des automorphismes du revêtement (le choix d'un générateur parmi les deux possibles n'a pas d'incidence). On définit dans cette partie, à partir d'intersections triples équivariantes de surfaces dans \tilde{X} , une forme trilinéaire sur le \mathbb{Z} -module :

$$\mathcal{A}_e(K) = \frac{\mathcal{A}(K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{A}(K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{A}(K)}{(\beta_1 \otimes \beta_2 \otimes \beta_3 = t\beta_1 \otimes t\beta_2 \otimes t\beta_3)}.$$

Soient S_1, S_2, S_3 des surfaces compactes connexes orientées plongées dans \tilde{X} . On suppose que les S_i sont τ -*transverses* dans \tilde{X} , c'est-à-dire que $\tau^{k_1} S_1, \tau^{k_2} S_2$, et $\tau^{k_3} S_3$ sont transverses pour tous entiers k_1, k_2, k_3 . On définit le *nombre d'intersection triple équivariant* $\langle S_1, S_2, S_3 \rangle_e$ par :

$$\langle S_1, S_2, S_3 \rangle_e = \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} \sum_{k_3 \in \mathbb{Z}} \langle S_1, \tau^{-k_2} S_2, \tau^{-k_3} S_3 \rangle t_2^{k_2} t_3^{k_3} \in \frac{\mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}, t_3^{\pm 1}]}{(t_1 t_2 t_3 - 1)}.$$

On vérifie facilement les formules suivantes.

Lemme 1 *Le nombre d'intersection triple équivariant vérifie :*

- pour toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_3$, de signature $\varepsilon(\sigma)$, $\langle S_{\sigma(1)}, S_{\sigma(2)}, S_{\sigma(3)} \rangle_e(t_1, t_2, t_3) = \varepsilon(\sigma) \langle S_1, S_2, S_3 \rangle_e(t_{\sigma^{-1}(1)}, t_{\sigma^{-1}(2)}, t_{\sigma^{-1}(3)})$,
- $\langle P_1(\tau)(S_1), P_2(\tau)(S_2), P_3(\tau)(S_3) \rangle_e = P_1(t_1)P_2(t_2)P_3(t_3) \langle S_1, S_2, S_3 \rangle_e$, pour tous $P_j \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$.

Soit $\delta_K \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ l'annulateur du module d'Alexander $\mathcal{A}(K)$. Comme Δ_K , il peut être normalisé sous la forme d'un polynôme symétrique tel que $\delta_K(1) = 1$. On l'écrit $\delta_K(t) = \sum_{i=-n}^n a_i t^i$, avec $a_i \in \mathbb{Z}$ et $a_{-i} = a_i$.

Soit γ une courbe fermée simple dans \tilde{X} , telle que les $\tau^k(\gamma)$ pour $k \in \mathbb{Z}$ sont deux à deux disjointes. La classe d'homologie de $\delta(\tau)(\gamma)$ dans $\mathcal{A}(K)$ est nulle, ce qui peut s'interpréter de la manière suivante. Soit $T(\gamma)$ un voisinage tubulaire de γ tel que les $\tau^k(T(\gamma))$ pour $k \in \mathbb{Z}$ sont deux à deux disjointes. Il existe une surface $\Sigma \subset \tilde{X}$, compacte, connexe et orientée, dont le bord est la réunion disjointe de courbes $\mu_i \subset \tau^i(\partial T(\gamma))$ pour $-n \leq i \leq n$, où μ_i est isotope dans $\tau^i(T(\gamma))$ à a_i fois la courbe $\tau^i(\gamma)$. Par extension, on appellera une telle surface une *surface de Seifert* de γ .

On peut maintenant définir une application \mathbb{Z} -linéaire

$$\phi_K : \mathcal{A}_e(K) \rightarrow \mathcal{R}_K = \frac{\mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}, t_3^{\pm 1}]}{(t_1 t_2 t_3 - 1, \delta_K(t_1), \delta_K(t_2), \delta_K(t_3))}$$

de la façon suivante. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathcal{A}(K)$. Pour $i = 1, 2, 3$, soient γ_i une courbe fermée simple représentant la classe d'homologie α_i , et Σ_i une surface de Seifert de γ_i . On choisit les Σ_i τ -transverses. On pose alors :

$$\phi_K(\alpha_1 \otimes \alpha_2 \otimes \alpha_3) = \langle \Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3 \rangle_e.$$

Théorème 1 ([3]) *L'application ϕ_K est bien définie, \mathcal{R}_K -linéaire, et vérifie :*

$$\phi_K(\alpha_{\sigma(1)} \otimes \alpha_{\sigma(2)} \otimes \alpha_{\sigma(3)}) = \varepsilon(\sigma) \phi_K(\alpha_1 \otimes \alpha_2 \otimes \alpha_3)(t_{\sigma^{-1}(1)}, t_{\sigma^{-1}(2)}, t_{\sigma^{-1}(3)}),$$

pour toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_3$ de signature $\varepsilon(\sigma)$ et tout $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathcal{A}(K)^3$. La classe d'isomorphisme de $(\mathcal{A}(K), \phi_K)$ est un invariant du nœud K .

Le point à démontrer dans ce résultat est le fait que l'application ϕ_K est bien définie. La \mathcal{R}_K -linéarité et le comportement par permutation des membres d'un tenseur découlent alors du lemme 1. Il s'agit donc de démontrer que $\phi_K(\alpha_1 \otimes \alpha_2 \otimes \alpha_3)$ ne dépend ni du choix des représentants γ_i des α_i , ni du choix des surfaces de Seifert Σ_i .

Compléments La construction de l'invariant ϕ_K est effectuée dans [3] dans le cadre plus général des nœuds homologiquement triviaux dans les sphères d'homologie rationnelle. On travaille alors avec des coefficients rationnels en homologie et dans les anneaux de polynômes. Dans cet article, on décrit les variations de l'application ϕ_K sous l'effet d'une transformation géométrique appelée chirurgie borroméenne. Lorsque le nœud est muni d'une paramétrisation de son module d'Alexander, on montre que l'invariant ϕ_K est un invariant de type fini de

degré 1 par rapport aux chirurgies borroméennes dites nulles, et on décrit l'ensemble de toutes les applications ϕ_K que l'on obtient à partir d'un nœud homologiquement trivial K dans une sphère d'homologie rationnelle. On en déduit en particulier que l'invariant ϕ_K raffine le module d'Alexander, au sens où il existe des nœuds qui ont le même module d'Alexander mais des formes ϕ_K différentes.

Références

- [1] J.W. Alexander (1928), Topological invariants of knots and links, *Transactions of the American Mathematical Society*, **vol. 30 (2)** p. 275-306.
- [2] W.B.R. Lickorish (1997), *An introduction to knot theory*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag.
- [3] D. Moussard (2014), Equivariant triple intersections, *Prépublication*, arXiv : 1403.0446.

LE PROBLÈME DE YAMABE SUR LES ESPACES STRATIFIÉS

Ilaria Mondello

Laboratoire de Mathématiques Jean Leray
2 rue de la Houssinière - BP 92208 F-44322, Nantes, France
ilaria.mondello@univ-nantes.fr

Résumé - Nous donnons une brève introduction au problème de Yamabe sur un espace stratifié compact X . Un espace stratifié est un espace métrique singulier contenant un sous-ensemble dense, muni d'une métrique Riemannienne g . Etant donné (X^n, g) un espace stratifié compact, nous cherchons une métrique conforme à g avec courbure scalaire constante. Nous rappelons les résultats obtenus dans [1] sur l'existence d'une telle métrique. Comme dans le cas lisse, celle-ci dépend fortement d'un invariant conforme : la constante de Yamabe locale $Y_\ell(X)$ dont, en général, on ne connaît pas la valeur.

Un espace stratifié peut être décomposé en un nombre fini de strates et chaque point dans une strate a un voisinage tubulaire qui est l'espace total d'un fibré en cônes. Cela signifie que la fibre est un cône sur un espace stratifié de dimension inférieure, qui est appelé le link de la strate. La constante de Yamabe locale $Y_\ell(X)$ dépend de la géométrie des links. Nous démontrons que si les links de X sont des espaces stratifiés d'Einstein, il est possible de calculer explicitement $Y_\ell(X)$. Pour cela il faut séparer deux cas. Dans le premier cas, nous démontrons une inégalité de Sobolev sur X inspirée par un résultat de D. Bakry [4]. Pour l'obtenir, nous étendons au cas des espaces stratifiés un théorème de Lichnerowicz sur la première valeur propre du Laplacien. L'estimation obtenue sur la constante optimale dans l'inégalité de Sobolev permet de calculer $Y_\ell(X)$. Dans le deuxième cas, la valeur de la constante de Yamabe locale découle de l'existence d'une inégalité isopérimétrique euclidienne, que nous prouvons à l'aide de la conjecture de Cartan-Hadamard, valide en deux dimensions [11], et d'un résultat d'Antonio Ros [9].

Mots clés - Courbure scalaire constante, Constante de Yamabe, Espaces Stratifiés

1 Introduction

Le problème de Yamabe a été posé pendant les années soixante par Hidehiko Yamabe, donnant origine à une branche des mathématiques appelée analyse géométrique, qui se propose de résoudre des problèmes de géométrie différentielle avec des outils analytiques. Étant donnée une variété Riemannienne compacte (M^n, g) de dimension $n \geq 3$, la question est de savoir s'il est possible de modifier la métrique de départ avec un changement conforme et obtenir une métrique à courbure scalaire constante. Un changement conforme consiste à multiplier g par une fonction lisse et positive : la classe conforme de g sera définie comme l'ensemble $[g] = \{\tilde{g} : \exists u \in C^\infty(M), u > 0, \tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}}g\}$. La loi de transformation pour la courbure scalaire sous changement conforme implique que \tilde{g} est à courbure scalaire constante $S_{\tilde{g}}$ si u

satisfait l'équation suivante :

$$\Delta_g u + a_n S_g u = a_n S_g u^{\frac{n+2}{n-2}}, \quad a_n = \frac{n-2}{4(n-1)} \quad (1)$$

Le problème se réduit donc à démontrer l'existence d'une solution non nulle pour une telle équation. A travers les outils classiques du calcul des variations, il est facile de voir que (1) est l'équation d'Euler-Lagrange associée à une fonctionnelle. De plus, si une fonction u réalise l'infimum d'une telle fonctionnelle, alors elle est une solution non triviale de (1). Nous définissons alors la constante de Yamabe de $(M^n, [g])$:

$$Y(M, [g]) = \inf \left\{ \int_M (|du|^2 + a_n S_g u^2) dv_g, \quad u \in W^{1,2}(M) : \|u\|_{\frac{2n}{n-2}} = 1 \right\}$$

A cause de l'exposant critique $\frac{n+2}{n-2}$, l'équation (1) ne peut pas être résolue à l'aide des seuls outils analytiques. Mais grâce à l'invariant conforme $Y(M, [g])$ et aux informations géométriques qu'il contient, il est possible de donner une réponse au problème original. Thierry Aubin, [3], a montré que pour toute variété Riemannienne, la constante de Yamabe $Y(M, [g])$ est inférieure ou égale à celle de la sphère canonique de dimension n . De plus, si cette inégalité est stricte, il existe une solution non triviale à l'équation de Yamabe. Il est possible de démontrer que pour toute variété de dimension $n > 6$ qui n'est pas conformément plate, $Y(M^n, [g]) < Y_n$ et par conséquent le problème est résolu dans ce cas. Pour une variété conformément plate ou de dimension 3, 4, 5, le théorème de masse positive prouvé par R. Schoen et S.T. Yau [10] assure qu'ou bien l'inégalité stricte est vérifiée, ou bien dans le cas d'égalité il existe un difféomorphisme conforme entre la variété et la sphère, ce qui donne une réponse complète à la question originale.

1.1 Le cas des espaces stratifiés

Si à la place d'une variété compacte lisse nous considérons une variété ouverte ou avec singularités, il est toujours possible de chercher un changement conforme qui rende la courbure scalaire constante, mais l'existence d'un tel changement n'est pas prouvée en général. Dans [1], les auteurs considèrent des espaces métriques presque lisses (X^n, d, g) , c'est-à-dire des espaces qui contiennent une variété ouverte lisse Ω de dimension n , dense dans X , munie d'une métrique Riemannienne g . Ils définissent la constante de Yamabe locale de la façon suivante :

$$Y_\ell(X) = \inf_{p \in X} \lim_{r \rightarrow 0} Y(B(p, r)).$$

Pour tout (X, d, g) l'inégalité $Y(X, [g]) \leq Y_\ell(X)$ est vérifiée. De plus, si la courbure scalaire satisfait une certaine condition d'intégrabilité ($S_g \in L^q, q > n/2$) et si l'inégalité est stricte, alors il est possible de démontrer l'existence d'une solution $u \in W^{1,2}(X)$, bornée, à l'équation de Yamabe.

Ce résultat s'applique en particulier au cas des espaces stratifiés. Un espace stratifié X^n est un espace métrique presque lisse compact, qui admet une décomposition en un nombre fini de strates X_j :

$$X \supseteq X_{n-2} \supseteq X_{n-3} \supseteq \dots \supseteq X_j$$

telles que pour tout j , $X_j \setminus X_{j-1}$ est une variété ouverte de dimension j , et $\Omega = X \setminus X_{n-2}$ est dense dans X . On suppose qu'il n'existe pas de strate de codimension 1. On appelle lieu

singulier l'ensemble $\Sigma = X \setminus \Omega$. Si un point $x \in X$ appartient à une strate X_j , il admet un voisinage tubulaire \mathcal{U}_j qui est l'espace total d'un fibré en cônes ; la fibre de ce fibré est un cône $C(Z_j)$, où Z_j est un espace stratifié appelé le link de la strate X_j . Les espaces stratifiés les plus simples sont les variétés à singularités coniques, ou les variétés avec "simple edges". Cela signifie que tous les links sont des variétés compactes lisses Z^d et chaque point des strates a un voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}^{n-d-1} \times C(Z^d)$.

Il est possible de munir un espace stratifié d'une métrique qui, proche d'une strate, se comporte comme le produit de la métrique euclidienne et d'une métrique conique : $g = dy^2 + dr^2 + r^2 h_j$, où h_j est une métrique donnée sur le link. La constante de Yamabe locale sera alors :

$$Y_\ell(X) = \inf_j \{Y(\mathbb{R}^j \times C(Z_j), [dy^2 + dx^2 + x^2 h_j])\} \quad (2)$$

Même dans le cas des variétés à singularités coniques, on ne connaît pas la valeur explicite de $Y_\ell(X)$. Mes travaux montrent qu'il est possible de calculer $Y_\ell(X)$ si on suppose que chaque link (Z^d, h) est un espace stratifié d'Einstein avec tenseur de Ricci qui satisfait $Ric_h = (d-1)h$. Cette hypothèse n'est pas restrictive. En effet, si (Z, h) est une variété compacte lisse, il est montré dans [1] que pour avoir la condition d'intégrabilité sur la courbure scalaire S_g nécessaire à l'existence de la solution, S_h doit être égal à $d(d-1)$. Or, ceci est le cas pour une variété d'Einstein avec $Ric_h = (d-1)h$.

2 Calcul de la constante de Yamabe locale

D'après l'expression (2) pour la constante de Yamabe locale, nous nous intéressons aux espaces de la forme $(\mathbb{R}^{n-d-1} \times C(Z^d), dy^2 + dr^2 + r^2 h)$, où (Z^d, h) est un espace stratifié compact d'Einstein, avec $Ric_h = (d-1)h$. Il n'est pas difficile de montrer que de tels espaces sont conformément équivalents à $X = C(\hat{Z})$, où \hat{Z} est un espace stratifié de dimension $n-1$ et X est muni d'une métrique d'Einstein g . Nous pourrions donc étudier la constante de Yamabe (globale) des espaces stratifiés d'Einstein pour donner des résultats sur la constante locale (2).

Si Z est un cercle, deux situations différentes se présentent si son rayon est plus petit que 1 ou plus grand que 1 ; nous allons distinguer deux cas. Dans le premier, nous définissons la classe des espaces stratifiés admissibles : (X, g) est admissible si ses strates de codimension 2, quand elles existent, ont diamètre inférieur à π . Dans le second, nous traitons $X = \mathbb{R}^{n-2} \times C(\mathbb{S}_a^1)$, où \mathbb{S}_a^1 est le cercle de rayon $a > 1$.

Considérons d'abord les espaces stratifiés admissibles. Nous allons exploiter le fait que la constante de Yamabe est strictement liée à la constante optimale γ dans l'inégalité de Sobolev :

$$V^{\frac{2}{n}} \|f\|_{\frac{2n}{n-2}}^2 \leq \|f\|_2^2 + \gamma \|df\|_2^2, \quad f \in W^{1,2}(X)$$

où $V = \text{Vol}_g(X)$. Il est possible de démontrer que cette inégalité est valide dans le cadre des espaces stratifiés admissibles munis d'une métrique qui satisfait $Ric_g \geq (n-1)g$. Nous pouvons aussi donner une estimation pour γ qui ne dépend que de la dimension de X ; celle-ci nous permettra de déduire la valeur de $Y(X, [g])$ dans le cas Einstein.

Nous nous sommes inspirés d'un résultat de D. Bakry [4] pour une variété lisse (M^n, g) telle que $Ric_g \geq (n-1)g$ et nous avons démontré :

Théorème 1 (Inégalité de Sobolev [7]) Soit (X^n, g) un espace stratifié admissible tel que $Ric_g \geq (n-1)g$. Alors pour tout $1 < p \leq \frac{2n}{n-2}$ et pour toute $f \in W^{1,p}(X)$ l'inégalité de Sobolev suivante est vérifiée :

$$V^{1-\frac{2}{p}} \|f\|_p^2 \leq \|f\|_2^2 + \frac{p-2}{n} \|df\|_2^2. \quad (3)$$

où $V = \text{Vol}_g(X)$.

Cela a comme conséquence directe :

Corollaire 1 (Constante de Yamabe [7]) Sous les hypothèses du théorème précédent, la constante de Yamabe de X vérifie :

$$Y(X, [g]) \geq \frac{n(n-2)}{4} \text{Vol}_g(X)^{\frac{2}{n}}$$

avec égalité si (X, g) est d'Einstein.

En particulier, si X est un espace stratifié avec une seule strate de link (Z^d, h) , $Ric_h = (d-1)h$, sa constante de Yamabe locale est égale à :

$$Y_\ell(X) = \left(\frac{\text{Vol}(Z)}{\text{Vol}(\mathbb{S}^d)} \right)^{\frac{2}{n}} Y_n.$$

L'idée de la preuve du Théorème 1 dans le cas lisse est d'étudier une fonction u qui réalise la constante optimale γ dans l'inégalité de Sobolev (3) pour $p < 2n/(n-2)$, et qui donc résout l'équation :

$$\gamma \Delta_g u + u = u^{p-1}$$

En maniant cette équation grâce à la formule de Bochner-Lichnerowicz et l'intégration par partie, qui font apparaître des termes dépendant du gradient de u , il est possible d'obtenir que γ doit être supérieure ou égale à $(p-2)/n$. Si X est un espace stratifié, ces outils restent valides sur le lieu régulier Ω , mais pour pouvoir étendre le résultat à tout X il est nécessaire d'estimer le comportement du gradient de u proche du lieu singulier.

Un résultat contenu dans [2], montre que la régularité d'une solution de l'équation de Schrödinger $\Delta_g u = Vu$ est déterminée par la géométrie des links (Z^d, h) , et plus précisément par la première valeur propre du Laplacien Δ_h . Nous avons étendu un résultat de Lichnerowicz pour le bas du spectre au cas des espaces stratifiés :

Théorème 2 (Lichnerowicz Singulier [7]) Si (Z, h) est un espace stratifié qui satisfait les mêmes hypothèses que le théorème précédent, alors $\lambda_1(\Delta_h) \geq d$.

Ceci nous permet en particulier de donner une estimation sur le comportement du gradient de u en fonction de la distance au lieu singulier Σ , et donc d'adapter la preuve de Bakry. Remarquons que ce résultat est démontré par récurrence sur la dimension du link : pour la dimension 1, $Z = \mathbb{S}_a^1$, et le théorème de Lichnerowicz classique ne s'applique pas si $a > 1$. Considérons donc $X = \mathbb{R}^{n-2} \times C(\mathbb{S}_a^1)$ pour $a > 1$. Nous avons démontré qu'une inégalité isopérimétrique euclidienne est vérifiée sur (X, g) , c'est à dire :

Proposition 1 ([7]) Soit $X = \mathbb{R}^{n-2} \times C(\mathbb{S}_a^1)$ pour $a > 1$ avec la métrique $g = dy^2 + x^{2(a-1)}(dx^2 + dy^2)$. Alors pour tout domaine $D \subset X$:

$$\frac{\text{Vol}_g(\partial D)}{\text{Vol}_g(D)^{1-\frac{1}{n}}} \geq \frac{\text{Vol}(\partial \mathbb{B}^n)}{\text{Vol}(\mathbb{B}^n)}$$

où \mathbb{B}^n est une boule unitaire dans \mathbb{R}^n .

Pour obtenir l'inégalité isopérimétrique, nous avons approché le cône $C(\mathbb{S}_a^1)$ par des variétés de Cartan-Hadamard de dimension 2. D'après [11] le profil isopérimétrique de ces variétés est minoré par celui de \mathbb{R}^2 . Un théorème d'Antonio Ros contenu dans [9] nous donne ensuite la minoration désirée pour le produit $\mathbb{R}^{n-2} \times C(\mathbb{S}_a^1)$.

Cela permet de donner la valeur de la constante de Sobolev optimale : elle est en effet la même que celle de \mathbb{R}^n . Nous avons par conséquent :

Corollaire 2 ([7]) *La constante de Yamabe de $\mathbb{R}^{n-2} \times C(\mathbb{S}_a^1)$ pour $a > 1$ coïncide avec la constante de Yamabe de la sphère canonique de dimension n :*

$$Y(\mathbb{R}^{n-2} \times C(\mathbb{S}_a^1), [g]) = Y_n.$$

Ces résultats nous permettent de donner la valeur explicite de la constante de Yamabe locale pour les espaces stratifiés avec links d'Einstein.

Références

- [1] K. Akutagawa, G. Carron, R.Mazzeo (2012), The Yamabe problem on stratified spaces, (preprint), arXiv : 1210.8054.
- [2] K. Akutagawa, G. Carron, R.Mazzeo (2014), Hölder regularity of solutions for Schrödinger operators on stratified spaces, (preprint), arXiv : 1409.0154.
- [3] T. Aubin (1976), Équations différentielles non-linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire, *J. Math. Pures Appl.*, **vol. 55**, p. 269-296.
- [4] D. Bakry (1994), L'hypercontractivité et son utilisation en théorie des semigroupes, in *Lectures on probability theory (Saint-Flour, 1992)*, Berlin, Springer, p. 1–114.
- [5] A. Besse (1987), *Einstein manifolds*, Berlin, Springer-Verlag.
- [6] J.M. Lee, T. Parker (1987), The Yamabe problem, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 17, no. 1, p. 37–91.
- [7] I. Mondello, Le problème de Yamabe sur les espaces stratifiés, *thèse en préparation*.
- [8] M. Ritoré (2005), Optimal isoperimetric inequalities for three-dimensional Cartan-Hadamard manifolds, *Global theory of minimal surfaces*, Providence, Amer. Math. Soc., p.395-404.
- [9] A. Ros (2005), The isoperimetric problem, *Global theory of minimal surfaces*, Providence, Amer. Math. Soc., p. 175-209.
- [10] R. Schoen, S.-T. Yau (1979), On the proof of the positive mass theorem in general relativity, *Comm. Math. Phys.* **vol. 4**, p. 45-76.
- [11] A. Weil (1926), Sur les surfaces à courbure négative, C.R. Acad. Sci. Paris **182**, p. 1069-1071.

DE L'ERGODICITÉ SUR DEUX ESPACES DE MESURE INFINIE

Alba Marina Málaga Sabogal

Département de Mathématiques

Bâtiment 425 Faculté des Sciences d'Orsay, F-91405 Orsay Cedex , France

alba.malaga@math.u-psud.fr

Résumé - *Dans le cadre de ma thèse, j'ai démontré qu'une famille de transformations du cylindre discret est typiquement minimale et ergodique. Dans cet exposé j'expliquerai comment appliquer mes résultats pour avoir plein d'exemples de flux directionnel ergodique et minimal sur des surfaces de translation de genre infini appelées « échelle de Jacob ».*

Mots clés - **Surface de translation, théorie ergodique en mesure infinie**

1 Introduction

Je commencerai par donner dans la section 2 la définition de la famille de transformations de $F_{\underline{\alpha}}$ sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{T}$. Leur espace de phase $\mathbb{Z} \times \mathbb{T}$ est considéré avec la mesure et la topologie produit.

Chaque transformation $F_{\underline{\alpha}}$ préservera la mesure (infinie) de l'espace de phases, mais ne sera pas un homéomorphisme de cette espace. Cependant, si on prive l'espace de phase d'un ensemble discret, appelé ensemble des singularités de $F_{\underline{\alpha}}$, alors $F_{\underline{\alpha}}$ y sera un homéomorphisme sur son image.

L'espace des paramètres sera un espace compacte de probabilité. Nous pouvons donc nous poser la question des comportements typiques des transformations dans la famille. Qu'est-ce qui arrive pour presque-tout paramètre $\underline{\alpha}$? Quelles propriétés possède $F_{\underline{\alpha}}$ pour un ensemble G_δ -dense de paramètres $\underline{\alpha}$? Dans ma thèse j'ai obtenu quelques réponses à ces questions, je les rapporte dans la section 3.

Enfin, dans la section 4, j'explique comment appliquer ces résultats à la construction d'exemples de flot directionnel minimal et ergodique sur des surfaces de translation de genre infini.

2 Définitions

Soit $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ le cercle unité. Considérons le produit cartésien du cercle avec les entiers relatifs $Z = \mathbb{Z} \times \mathbb{T}$. On peut voir Z comme une superposition de cercles en une sorte de cylindre discret. Pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, on dira que le cercle $\{n\} \times \mathbb{T}$ est le **niveau** n du cylindre.

Sur Z , considérons la transformation bijective qui consiste à tourner chaque cercle puis à couper tous les cercles en deux et à déplacer une moitié du cercle d'un niveau vers le haut et l'autre d'un niveau vers le bas. Autrement dit, on est en train de regarder une famille de transformations du cylindre discret où le paramètre est une suite bi-infinie $\underline{\alpha} = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de rotations dans $\mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$.

Nous pouvons voir \mathbb{T} comme le recollement de deux intervalles fermés de même mesure (par exemple $[-\frac{1}{2}, 0]$ et $[0, \frac{1}{2}]$, mais leur forme exacte importe peu). Considérons I^- et I^+ les intervalles ouverts qui sont les intérieurs de ces deux intervalles.

Pour chaque $\underline{\alpha}$, on définit

$$F_{\underline{\alpha}} : Z \dashrightarrow Z$$

$$(t, n) \mapsto \left(t + \alpha_n, n + \begin{cases} 1 & \text{si } t + \alpha_n \in I^+ \\ -1 & \text{si } t + \alpha_n \in I^- \end{cases} \right) \quad (1)$$

On adopte ici la notation avec une flèche en pointillé car, par convention, $F_{\underline{\alpha}}$ n'est pas définie sur les points qui donneraient une ambiguïté lors de l'application de la définition. On appelle ces points des **singularités** de $F_{\underline{\alpha}}$.

Les singularités de $F_{\underline{\alpha}}^{-1}$ sont

$$\text{sing}(F_{\underline{\alpha}}^{-1}) = \partial I^{\pm} \times \mathbb{Z} \quad (2)$$

et les singularités de $F_{\underline{\alpha}}$ sont

$$\text{sing}(F_{\underline{\alpha}}) = \bigcup_n (\partial I^{\pm} - \alpha_n) \times \{n\} \quad (3)$$

3 Comportements typiques de $F_{\underline{\alpha}}$

Les résultats obtenus dans ma thèse parlent d'abord des comportements dynamiques "typiques" de la famille $F_{\underline{\alpha}}$, où le mot "typique" peut se comprendre au sens de la mesure ou au sens de la topologie. La mesure et la topologie considérées sur l'espace de paramètres $\mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$ sont la mesure produit et la topologie produit.

Au sens de la mesure, on dira qu'une propriété est **presque sûre** dans la famille $\{F_{\underline{\alpha}}\}_{\underline{\alpha}}$ si pour presque tout $\underline{\alpha} \in \mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$, la transformation $F_{\underline{\alpha}}$ satisfait cette propriété.

Au sens de la topologie, on dira qu'une propriété est **générique** dans la famille $\{F_{\underline{\alpha}}\}_{\underline{\alpha}}$ s'il existe un sous-ensemble de paramètres $G \subset \mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$ qui est une intersection dénombrable d'ouverts denses tel que, pour tout $\underline{\alpha} \in G$, la transformation $F_{\underline{\alpha}}$ satisfait cette propriété.

Nous nous sommes intéressés aux propriétés dynamiques de conservativité, minimalité et ergodicité.

Étant donnée une transformation qui préserve la mesure, on dit qu'elle est **conservative** si aucun ensemble de mesure positive n'est disjoint de tous ses itérés.

Proposition 1 *Une condition suffisante pour avoir la conservativité est que la suite de rotations s'accumule sur la rotation du demi-tour en $+\infty$ et $-\infty$.*

On remarquera que cette condition est satisfaite presque partout et génériquement. La conservativité est donc une propriété aussi bien générique que presque sûre dans la famille $\{F_{\underline{\alpha}}\}_{\underline{\alpha}}$. Étant donnée une transformation sur un espace topologique, on dit qu'elle est **minimale** si toutes ses orbites sont denses.

Théorème 1 *La minimalité est générique dans la famille $\{F_{\underline{\alpha}}\}_{\underline{\alpha}}$.*

Étant donnée une transformation mesurable sur un espace de mesure, on dit qu'elle est **ergodique** si et seulement si tout ensemble invariant soit est de mesure nulle, soit admet un complémentaire de mesure nulle.

De l'ergodicité sur deux espaces de mesure infinie

Théorème 2 *L'ergodicité est générique dans la famille $\{F_{\underline{\alpha}}\}_{\underline{\alpha}}$.*

Remarque 1 *Si la suite $\underline{\alpha}$ est une suite constante, alors la transformation $F_{\underline{\alpha}}$ est conjuguée à un cocycle sur une rotation. Si cette rotation est irrationnelle, alors $F_{\underline{\alpha}}$ est conservative (c'est une application directe d'un résultat classique de Klaus Schmidt [1]) et ergodique (prouvé par Jean-Pierre Conze et Michael Keane dans [2]).*

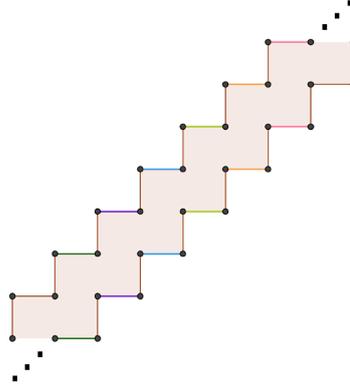
4 Ergodicité du flot directionnel sur l'échelle de Jacob

Je vais maintenant exposer comment l'ergodicité de $F_{\underline{\alpha}}$ se traduit dans l'ergodicité du flot directionnel sur une surface de translation de genre infini.

Definition 1 *Une surface S est dite **de translation** s'il existe un sous-ensemble discret $\Sigma \subset S$ tel que $S \setminus \Sigma$ possède un atlas \mathcal{T} où les changements de cartes sont des translations.*

Remarque 2 *Si S est compact, l'ensemble Σ dans la définition 1 est forcément fini.*

Considérons la surface de translation de genre infini appelée l'échelle de Jacob. Topologiquement, elle est obtenue par identification des côtés opposés dans le polygone infini suivant :



Dans ce dessin on a mis toutes les marches de l'escalier de même hauteur. Mais que se passe-t-il lorsque les hauteurs des marches varient? Plus précisément, Pour chaque $H > 0$, on considère le rectangle $R(H) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [0, H]$.

Étant donnée une suite bi-infinie $\underline{H} = \{H_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, on considère la suite $\{R_n\}$ où $R_n = R(H_n)$. Ensuite on recolle les R_n pour obtenir l'échelle de Jacob $S(\underline{H})$: on quotiente l'union disjointe des R_n par la relation d'équivalence engendrée par :

$$\forall i \in \mathbb{Z} \forall (x, y) \in R_n \forall (u, v) \in R_{n+1} : (x, y) \sim (u, v) \Leftrightarrow x = u + \frac{1}{2}, \text{ et } y = H_n, v = 0, \text{ ou } y = 0, v = H_{n+1} \quad (4)$$

et par

$$\forall i : \forall (x, y) \in R_n : |x| = \frac{1}{2} \Rightarrow (x, y) \sim (-x, y) \quad (5)$$

Dorénavant, on identifie chaque rectangle R_n avec son image dans le quotient $S(\underline{H})$. Dans chaque rectangle R_n , on fixe $C_n = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times \{\frac{1}{2}\}$. On voit C_n dans $S(\underline{H})$, comme R_n , donc C_n est en fait un cercle $\mathbb{T} \times \{\frac{1}{2}\}$.

L'ensemble $C = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} C_n$ étant une union disjointe d'une collection dénombrable de cercles, il est homéomorphe à $\mathbb{Z} \times \mathbb{T}$. Pour chaque angle θ , considérons l'homéomorphisme $f_\theta : \mathbb{Z} \times \mathbb{T} \rightarrow C$ défini comme suit :

$$f_\theta(n, x) = \left(x - \frac{1}{2} + \frac{H_n}{2} \cot(\theta) \right) \times \left\{ \frac{1}{2} \right\} \text{ dans } R_n. \quad (6)$$

Proposition 2 *L'homéomorphisme f_θ conjugue l'application de premier retour sur C du flot directionnel dans la direction θ avec la transformation $F_{\underline{\alpha}}$ où $\underline{\alpha} = \{-\frac{1}{2} + H_n \cot(\theta)\}$.*

On observe que pour toute direction θ fixée (ni verticale, ni horizontale), la formule

$$\alpha_n = -\frac{1}{2} + H_n \cot(\theta)$$

définit un homéomorphisme entre $(\tan(\theta)\mathbb{T})^{\mathbb{Z}}$ et l'espace de paramètres de la famille $\{F_{\underline{\alpha}}\}$, $\mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$.

On obtient donc, à partir des résultats énoncés dans la section 3, des exemples de surfaces de translation :

- qui sont des échelles de Jacob,
- sur lesquelles le flot directionnel dans une direction fixée est ergodique et minimal.

Par contre, pour une suite fixée de hauteurs $\{H_n\}$, la correspondance $\theta \mapsto \{\alpha_n = -\frac{1}{2} + H_n \cot(\theta)\}$ n'est pas surjective. Même plus, le complément de son image contient un G_δ -dense dans l'espace des paramètres de $\{F_{\underline{\alpha}}\}$.

Remarque 3 *Dans le cas où la suite $\underline{\alpha}$ est une suite constante, alors la correspondance entre $F_{\underline{\alpha}}$ et son échelle de Jacob a été explicitée par Pat Hooper, Pascal Hubert et Barak Weiss dans [3].*

Références

- [1] K. Schmidt (1977), *Cocycles on ergodic transformation groups*, Delhi, Macmillan Company of India.
- [2] J.-P. Conze & M. Keane (1976), Ergodicité d'un flot cylindrique, *Séminaire de Probabilités (Univ. Rennes)*, **I**, Exp. No. 5
- [3] Pat Hooper & Pascal Hubert & Barak Weiss (1976), Dynamics on the infinite staircase, *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series A*, **vol.33**, **No9**, 4341-4347

PSEUDO REAL CLOSED FIELDS AND NTP_2

Samaria Montenegro

Université Paris Diderot

UFR de Mathématiques, bâtiment Sophie Germain, Paris, France

samaria@math.univ-paris-diderot.fr

Résumé - *In the talk we define the class of stable, NIP, simples and NTP_2 theories and we give a positive answer to the conjecture by A. Chernikov, I. Kaplan and P. Simon that says: A pseudo real closed field is NTP_2 if and only if it is bounded.*

Mots clés - **model theory, logic, field theory.**

1 Introduction

One of the objects of study of model theory are the complete first-order theories and their classification. Shelah classified complete first-order theories by their ability to encode certain combinatorial configurations. For example the theories that are not able to encode linear orders are the stable theories. Shelah and others produced results and techniques for analyzing types and models in stable theories. In algebraic structures as groups or fields, these model-theoretic properties are related with algebraic properties of the structure.

Unfortunately, most structures studied in mathematics are not stable. Recently many of the tools used in stability theory could be generalized to larger classes of theories. This line of research is called “neo-stability theory”.

In the first part of this talk we define the class of stable, *NIP*, simples and NTP_2 theories and give some examples. In the second part we define the class of pseudo algebraically closed fields and pseudo real closed fields and we give a positive answer to the conjecture by A. Chernikov, I. Kaplan and P. Simon that says: A pseudo real closed field is NTP_2 if and only if it is bounded. All fields considered will have characteristic zero.

2 Shelah’s classification theory and generalizations of stability

Definition 1 *Let T be a complete first-order theory. The theory T is called stable if there is no formula $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ and $(a_j)_{j \in \omega}$ (in some model) such that $\phi(a_j, a_l)$ if and only if $j < l$.*

Some examples of stable theories are: algebraically closed fields, modules, differentially closed fields, free groups (Z.Sela), separably closed fields (C.Wood). It is clear from the definition of stable theory that any theory with a definable linear order is not stable.

Definition 2 *Let $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ be a formula. We say that $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ has the independence property (IP) if there is for any $m \in \mathbb{N}$ a family of tuples $\{b_l : l < m\}$ such that for each $A \in \mathcal{P}(m)$ there is a tuple a_A , such that $\phi(a_A, b_l)$ if and only if $l \in A$.*

A theory is called NIP (no independence property) if no formula has IP.

Some examples of NIP theories are: stable theories, linear order, ordered abelian groups (Gurevich-Schmitt), any o-minimal theory (in particular the real closed fields), algebraically closed valued fields, \mathbb{Q}_p .

Definition 3 Let T be a complete first-order theory. The theory T is called simple if it is not possible to encode a tree in a definable way.

Some examples of simple theories are: stable theories, the theory of the random Rado graph, pseudo-finite fields, the theory of algebraically closed fields expanded by a generic automorphism.

Definition 4 Let $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ be a formula. We say that $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ has TP_2 if there are $(a_{lj})_{l,j < \omega}$ and $k \in \omega$ such that:

1. $\{\phi(\bar{x}, a_{lj})_{j \in \omega}\}$ is k -inconsistent for all $l < \omega$.
2. For all $f : \omega \rightarrow \omega$, $\{\phi(\bar{x}, a_{lf(l)}) : l \in \omega\}$ is consistent.

A formula $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ is NTP_2 if it does not have the TP_2 . A theory is called NTP_2 if no formula has TP_2 .

Some examples of NTP_2 theories are: NIP theories, simple theories, ultraproducts of p-adics.

3 Pseudo algebraically closed fields

Definition 5 A pseudo algebraically closed field (PAC field) is a field M such that every absolutely irreducible affine variety defined over M has a M -rational point. The concept of a PAC field was introduced by J.Ax in [1] and has been extensively studied. The definition of PAC field has an equivalent model-theoretic version: M is existentially closed (in the language of rings) into each regular field extension of M . The class of PAC fields is axiomatizable in $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}$ the language of rings.

Theorem 1 [8, Corollary 6.5] If M is a PAC field which is not an algebraically closed field, then $Th_{\mathcal{L}_{\mathcal{R}}}(M)$ has the independence property.

Bounded fields: A field M is called bounded if for any integer n , M has only finitely many extensions of degree n .

Theorem 2 [4][5] Let M be a PAC field. Then $Th_{\mathcal{L}_{\mathcal{R}}}(M)$ is simple if and only if M is bounded.

4 Pseudo real closed fields

This notion of PAC field has been generalized by Basarab in [3] and then by Prestel in [7] for ordered fields. The class of pseudo real closed fields (PRC -fields) was extensively studied by L. van den Dries [9], A. Prestel [7], M. Jarden [2] and [6] and others.

Definition 6 *A field M is called PRC if for every absolutely irreducible variety V defined over M , if V has a simple \overline{M}^T -rational point for every real closure \overline{M}^T of M , then V has an M -rational point. The definition of PRC field has an equivalent model-theoretic version: M is existentially closed (in the language of rings) into each regular field extension N to which all orderings of M extend. By [7, Theorem 4.1] we can axiomatize the class of PRC fields in $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}$ the language of rings.*

Theorem 3 *Let M be a PRC field which is not a real closed field. Then $Th_{\mathcal{L}_{\mathcal{R}}}(M)$ has the independence property.*

Theorem 4 *Let M be a PRC field. Then $Th_{\mathcal{L}_{\mathcal{R}}}(M)$ is NTP_2 if and only if M is bounded.*

The strategies used in the proof of Theorem 4 can be generalize to another class of fields, the class of pseudo p -adically closed fields (PpC fields). The PpC fields are the analogous of PRC fields for p -adic valuations, more specifically: A field M is called PpC if for every absolutely irreducible variety V defined over M , if V has a simple \overline{M}^p -rational point for every p -adic closure \overline{M}^p of M , then V has an M -rational point. Then we obtain the same theorem for the PpC fields: Let M be a PpC field. Then $Th_{\mathcal{L}_{\mathcal{R}}}(M)$ is NTP_2 if and only if M is bounded.

References

- [1] J. Ax (1968), The elementary theory of finite fields. *Annals of Mathematics, ser 2*, **vol. 88**, 239-271
- [2] M. Jarden (1983), On the model companion of the theory of e -fold ordered fields, *Acta mathematica*, **vol. 150**, 243-253
- [3] Serban A. Basarab (1984), Definite functions on algebraic varieties over ordered fields, *evue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées*, **vol. 29**, 527-535
- [4] Z.Chatzidakis (1999), Simplicity and Independence for Pseudo-algebraically closed fields, *Models and Computability, S.B. Cooper, J.K. Truss Ed., London Math. Soc. Lect. Notes Series, Cambridge University Press, Cambridge*, **vol. 259**, 41-61
- [5] Z. Chatzidakis and A. Pillay (1998), Generic structures and simple theories, *Annals of Pure and Applied Logic*, **vol. 95**, 71-92
- [6] M. Jarden (1988), The algebraic nature of the elementary theory of PRC fields, *manuscripta mathematicae*, **vol. 60**, 463-475
- [7] A.Prestel (1892) Pseudo real closed fields, , Set Theory and Model Theory *Lecture Notes, Springer*, **vol. 872**

- [8] J-L. Duret (1980), Les corps faiblement algébriquement clos non séparablement clos ont la propriété d'indépendance, *Model theory of Algebra and Arithmetic, Pacholski et al. ed, Springer Lecture Notes*, vol. **834**, **135 -157**
- [9] L. van den Dries (1978), Model theory of fields. Thesis.

PROPAGATION D'ETATS COHERENTS.

HARI Lysianne

Postdoc à l'Université de Pise

Largo Bruno Pontecorvo 5 - 56127 Pisa - Italia.

lysianne.hari@gmail.com

Résumé - *Les questions et idées de réponses à celles-ci que je compte présenter concernent des équations à dérivées partielles vues dans un régime semi-classique. Ces problèmes apparaissent dans de nombreux domaines en physique ou chimie quantique et je me cantonnerai au cas des systèmes d'équations de Schrödinger couplées, et avec un petit paramètre noté ε . L'analyse s'effectue dans la limite semi-classique $\varepsilon \rightarrow 0$ et des notions de stabilité dans cette limite sont abordées pour certaines données localisées dans l'espace des phases : les états cohérents ou paquets d'onde. On s'intéressera en particulier à la notion d'adiabaticité et de validité de celle-ci.*

1. MOTIVATION PHYSIQUE ET PRÉSENTATION DU PROBLÈME : UN RAPIDE SURVOL

Nombre de phénomènes physiques sont décrits par des équations à dérivées partielles difficiles à résoudre à cause de la complexité des données physiques et du nombre des variables en jeu. Une simplification de ces études (par exemple, suite à un adimensionnement, ou à des approximations du système) fait entrer en jeu un petit paramètre - paramètre semi-classique, noté ε - qui dépend des données physiques des équations initiales. Mathématiquement, on étudie le problème dans la limite semi-classique $\varepsilon \rightarrow 0$.

Je présenterai le problème uniquement pour l'équation de Schrödinger matricielle

- linéaire, dont la solution (fonction d'onde) donne la description moléculaire dans l'approximation de Born-Oppenheimer (voir [3], [8], [7], [15], [19], ainsi que [16], [18] et leurs références pour plus de détails sur la justification de cette approximation),
- non-linéaire qui entre en jeu dans la description des condensats de Bose-Einstein (voir par exemple [10], [11], [12], ou plus récemment [1], [2], [6] et divers travaux numériques de Bao et al.). Ici, il y a une difficulté supplémentaire car le terme non-linéaire "mélange" les composantes de la fonction d'onde, induisant un couplage.
- avec un potentiel $V(x)$ matriciel, dont les valeurs propres/espaces propres auront un rôle capital (soient elles sont "bien séparées" pour tout x , soit elles sont très proches pour certains x , sans jamais se croiser). En effet, elles peuvent induire un "couplage" entre les composantes de la fonction d'onde.
- le tout pour un certain type de données : les états cohérents (états localisés autour d'un point donné dans l'espace des phases). On regardera en particulier des états cohérents qui sont dans un espace propre (niveau d'énergie) donné du potentiel

Les deux questions porteront sur :

- (1) la stabilité de la "structure" de la solution : restera-t-elle localisée dans l'espace des phases ? Autour de quoi ?
- (2) l'adiabaticité : l'énergie des particules quantiques ne peut pas prendre n'importe quelle valeur, il y a des "paliers", des niveaux d'énergie, liés aux valeurs propres du potentiels.
On se pose donc la question suivante : si on "part" de particules qui vivent dans un niveau

d'énergie donné, celles-ci vont-elles y rester (*adiabaticité*) ou accéder à un autre niveau (transition)?

Autrement dit, si la donnée initiale est choisie dans un niveau d'énergie donné, la solution restera-t-elle dans le même espace propre ? Peut-elle atteindre un autre espace propre/niveau d'énergie ?

La réponse à ces questions dépend évidemment des situations (potentiels considérés...).

2. PRÉSENTATION DÉTAILLÉE DES RÉSULTATS MATHÉMATIQUES

Cette section est dédiée à une description plus détaillée des résultats sur lesquels s'appuiera la présentation.

Mes travaux de recherche s'articulent autour de l'étude de la propagation d'états cohérents, ou paquets d'onde. Les questions soulevées dans ma thèse se placent dans un cadre non-linéaire, combinant des problèmes appréhendés d'un point de vue plutôt linéaire jusque là, et des outils utilisés dans l'analyse des équations dispersives non-linéaires.

Les modèles que j'ai regardés sont issus de la chimie quantique et permettent de décrire la dynamique de molécules dans le cadre de l'approximation de Born-Oppenheimer. La notion d'*approximation adiabatique* apparaît alors, et avec elle, la question de sa validité selon les caractéristiques du modèles étudié.

On analyse des systèmes d'équations de Schrödinger avec un petit paramètre (paramètre semi-classique), qui peuvent être couplées par un potentiel si celui-ci présente des croisements de valeurs propres, ce qui peut engendrer des transitions non-adiabatiques entre les niveaux d'énergie des particules. Les modèles non-linéaires pour lesquels un couplage supplémentaire est induit par la présence d'une non-linéarité, sont utilisés pour décrire par exemple, les condensats de Bose-Einstein.

Dans ma thèse, j'ai étudié l'équation semi-classique suivante pour des données de type états cohérents, concentrés autour d'un point dans l'espace des phases :

$$(1) \quad \begin{cases} i\varepsilon \partial_t \psi^\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta \psi^\varepsilon - V(x) \psi^\varepsilon = \kappa \varepsilon^\beta |\psi^\varepsilon|_{\mathbb{C}^2}^2 \psi^\varepsilon \\ \psi^\varepsilon(t_0, x) = \varepsilon^{-d/4} a \left(\frac{x - x(t_0)}{\sqrt{\varepsilon}} \right) e^{\frac{i}{\varepsilon}(S(t_0) + \xi(t_0) \cdot (x - x(t_0)))} \chi(x), \end{cases}$$

où $d \in \{1, 2, 3\}$, $\kappa \in \mathbf{R}$, $\beta = 1 + d/2$, $a \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, et $\chi(x)$ est un vecteur propre de $V(x)$, associé à une valeur propre $\lambda(x)$.

Le cas linéaire ($\kappa = 0$) est bien compris (voir par exemple [19], [20], et [17]).

Deux types de potentiels ont été regardés. Dans la première partie, [13], un théorème adiabatique est démontré dans le cas $d = 2, 3$, avec $\kappa \geq 0$; le potentiel matriciel considéré présente un trou spectral et est de type "longue portée".

On montre alors qu'un état cohérent, qui vit dans un espace propre donné de V au temps initial, reste (à ordre dominant) un état cohérent dans le même espace propre jusqu'à des temps de type $c \log \log \varepsilon^{-1}$. L'effet de la non-linéarité est visible sur l'équation d'enveloppe, solution d'une équation de Schrödinger non-linéaire classique, dont il faut connaître le comportement pour des grands temps.

Ce résultat est un analogue des résultats de Carles-Fermanian, initiés dans le cas scalaire et dans le cas matriciel pour $d = 1$, dans [5], [4]. En dimension d'espace supérieure à 2, la non-linéarité n'est plus L^2 -sous-critique, ce qui rend l'analyse de la propagation des états cohérents plus difficile.

La seconde partie de mes travaux, présentée dans [14], porte sur un système présentant des transitions non-adiabatiques. Cette fois le potentiel dépend du paramètre semi-classique et est explicite :

$$V(x) = V_\varepsilon(x) = \begin{pmatrix} x & c\sqrt{\varepsilon} \\ c\sqrt{\varepsilon} & -x \end{pmatrix},$$

où $x \in \mathbf{R}$ (cas unidimensionnel). Les valeurs propres de V_ε présentent un croisement évité au point $x = 0$: la distance entre elles est de l'ordre de $\sqrt{\varepsilon}$.

Dans cette situation, il n'y a plus de découplage adiabatique : des transitions non-négligeables entre les modes apparaissent; l'effet de la non-linéarité sur celles-ci n'est pas visible à ordre dominant, les probabilités de transition étant calculées à l'aide de la formule de Landau-Zener utilisée dans le cas linéaire, qui a été traité dans [9] pour des données plus explicites. Les auteurs de [9] propagent leur donnée jusqu'à des temps d'ordre 1. Dans ma thèse, l'approximation construite n'est valable que jusqu'à des temps d'ordre ε^α , où $1/3 < \alpha < 1/2$. La question de la propagation jusqu'à des temps d'ordre 1 est encore ouverte.

REFERENCES

1. A. Aftalion, X. Blanc, and F. Nier, *Lowest Landau level functional and Bargmann spaces for Bose-Einstein condensates*, J. Funct. Anal. **241** (2006), no. 2, 661–702.
2. A. Aftalion and F. Nier, *Adiabatic approximation for a two-level atom in a light beam*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse **Série 6 22** (2013), no. 1, 43–131.
3. M. Born and R. Oppenheimer, *Zur quantentheorie der molekeln*, Annalen der Physik **389** (1927), no. 20, 457–484.
4. R. Carles and C. Fermanian Kammerer, *A nonlinear adiabatic theorem for coherent states.*, Nonlinearity **24** (2011), no. 8, 2143–2164.
5. ———, *Nonlinear coherent states and Ehrenfest time for Schrödinger equation*, Comm. Math. Phys. **301** (2011), no. 2, 443–472.
6. R. Carles and H. Hajaiej, *Complementary study of the standing wave solutions of the gross-pitaevskii equation in dipolar quantum gases.*, preprint (2014).
7. J.-M. Combes, P. Duclos, and R. Seiler, *The born-oppenheimer approximation*, in : Rigorous Atomic and Molecular Physics, eds-G. Velo, A. Wightman **Plenum : New-York** (1981), 185–212.
8. G. A. Hagedorn, *A time dependent Born-Oppenheimer approximation*, Comm. Math. Phys. **77** (1980), no. 1, 1–19.
9. G. A. Hagedorn and A. Joye, *Landau-Zener transitions through small electronic eigenvalue gaps in the Born-Oppenheimer approximation*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **68** (1998), no. 1, 85–134.
10. D. S. Hall, M. R. Matthews, J. R. Ensher, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, *Dynamics of component separation in a binary mixture of Bose-Einstein condensates*, Phys. Rev. Lett. **81** (1998), 1539–1542.
11. D. S. Hall, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, *Measurements of relative phase in two-component Bose-Einstein condensates*, Phys. Rev. Lett. **81** (1998), 1543–1546.
12. ———, *Measurements of relative phase in two-component Bose-Einstein condensates [phys. rev. lett. 81, 1543 (1998)]*, Phys. Rev. Lett. **81** (1998), 4532–4532.
13. L. Hari, *Coherent states for systems of L^2 -supercritical nonlinear Schrödinger equations*, Comm. Partial Differential Equations **38** (2013), no. 3, 529–573.
14. ———, *Propagation of semiclassical wave packets through avoided eigenvalue crossings in nonlinear schrödinger equations*, preprint, accepted in JIMJ (2014).
15. M. Klein, A. Martinez, R. Seiler, and X. P. Wang, *On the Born-Oppenheimer expansion for polyatomic molecules*, Comm. Math. Phys. **143** (1992), no. 3, 607–639.
16. C. Lasser, *Conical crossings in molecular dynamics*, Ph.D. thesis, Technische Universität München, June 2004.
17. A. Martinez and V. Sordani, *Twisted pseudodifferential calculus and application to the quantum evolution of molecules*, Mem. Amer. Math. Soc. **200** (2009), no. 936, vi+82.
18. V. Rousse, *Approximation de born-oppenheimer en présence de (presque) croisement de surfaces d'énergie*, Ph.D. thesis, Université Joseph-Fourier - Grenoble I, June 2004.
19. H. Spohn and S. Teufel, *Adiabatic decoupling and time-dependent Born-Oppenheimer theory*, Comm. Math. Phys. **224** (2001), no. 1, 113–132, Dedicated to Joel L. Lebowitz. MR 1868994 (2002j:81287)
20. S. Teufel, *Adiabatic perturbation theory in quantum dynamics*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1821, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

FORMAL SOLUTIONS OF SINGULARLY-PERTURBED LINEAR DIFFERENTIAL SYSTEMS

Suzy S. Maddah*

XLIM UMR 7252; DMI

University of Limoges; CNRS

123, Avenue Albert Thomas, 87060 Limoges, France

suzy.maddah@etu.unilim.fr

Résumé - Given a singularly-perturbed linear differential system by the parameter ϵ (see (1)). We have proposed in [9], algorithms to treat the turning points of such a system and decouple it into a set of systems of lower dimensions for each of which the singularity's rank in ϵ has a minimal integer value. This talk, based on a joint work with Moulay A. Barkatou, builds up on the former work and complements so that a fundamental matrix of formal solutions can be computed. The algorithm is implemented in the computer algebra system Maple which is illustrated by an example in the talk.

Mots clés - Singularly-Perturbed Linear Differential Systems, Turning Points, Newton Polygon, Formal Solutions, Computer Algebra.

1 Introduction

Let K be a commutative field of characteristic zero equipped with a derivation δ , that is a map $\delta : K \rightarrow K$ satisfying

$$\delta(f + g) = \delta f + \delta g \text{ and } \delta(fg) = \delta(f)g + f\delta(g) \text{ for all } f, g \in K.$$

We denote by \mathcal{F} its field of constants, V a K -vector space of dimension n , and A an element in $K^{n \times n}$. Set $\Delta = \delta - A$, then Δ is a δ -differential operator acting on V , that is, a \mathcal{C} -linear endomorphism of V satisfying the Leibniz condition :

$$\forall f \in K, v \in V \quad \Delta(fv) = \delta(f)v + f\Delta(v).$$

Let \mathcal{F} be an arbitrary field of characteristic zero. Set K to be the field of fractions of $\mathcal{F}[[x, \epsilon]]$ equipped with $\delta = \epsilon \frac{d}{dx}$, where x is a complex variable and ϵ is a small parameter. Thereby, Δ is the differential operator associated to a singularly-perturbed linear differential system. Denoting by Y an unknown n -dimensional column vector, the former can be rewritten as

$$\epsilon \frac{dY}{dx} = A(x, \epsilon)Y = \epsilon^{-h} x^{-p} \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k(x) \epsilon^k \right) Y. \quad (1)$$

where h, p be integers.

Enrolled at a joint PhD program with the Lebanese University.

Such systems are traced back to the year 1817 and are exhibited in a myriad of problems within diverse disciplines including astronomy, hydrodynamic stability, and quantum physics. Their study encompasses a vast body of literature as well (see, e.g., [4, 7, 11, 10, 6] and references therein). However, the formal reduction, that is the algorithmic procedure that computes a change of basis w.r.t. which $A(x, \epsilon)$ has normal form facilitating the construction of formal solutions, is still open to investigation. This is the interest of this talk. Our approach is a generalization of [2]. We give a recursive algorithm which, at each step, decreases either h or the dimension n of the system.

2 Framework

Clearly, system (1) is a singular perturbation of the widely studied linear singular system of differential equations (see, e.g., [1, 5] and references therein). The latter is obtained by setting $\delta_x = x \frac{d}{dx}$ and $K_x = \mathcal{F}((x))$, the univariate field of formal Laurent power series. Hence Δ_x is associated to

$$x \frac{dY}{dx} = A(x)Y = x^{-p} \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k \right) Y. \quad (2)$$

Contrary to system (1), there exist efficient algorithms contributing to the formal reduction of system (2) (see, e.g. [1, 2, 3], [9, Section 3], and references therein).

The classical formal simplification of system (2) begins with the reduction of its leading coefficient matrix A_0 to its Jordan form. Hence, in addition to the usual difficulties encountered within the formal reduction itself, additional ones arise for system (1) since its leading coefficient matrix $A_0(x)$ is a matrix-valued function rather than a constant one. In particular, if it has multiple eigenvalues then they might coalesce (see, e.g., [11, Example, page 223]). In classical textbooks, points where the Jordan form of $A_0(x)$ is unstable, that is to say either the multiplicity of the eigenvalues or the degrees of the elementary divisors are not constant in a neighborhood of such points, are referred to as *turning points* (see, e.g., [12, page 57]). The behavior of solutions of differential systems around such points is far more complicated than that of system (2) around an *irregular singularity* (i.e. for which $p > 1$). In fact, the neighborhood of such a point is decomposed into a finite number of x -dependent neighborhoods in each of which the solution behaves quite differently though it may still be asymptotically accomplished (see, e.g., [6]). In particular, if $h \leq 0$ then the solution of system (1) can be sought upon presenting the solution as a power series in ϵ . The latter can then be inserted into (1) and the like powers of ϵ equated. This reduces the problem to solving recursively a set of non-homogeneous linear singular differential systems with coefficient entries lying in $\mathcal{F}((x))$, the first of which is system (2). Hence, the main difficulty consists in reducing system (1) to one with $h = 0$.

The methods proposed in the literature of system (1) either exclude *turning points* [4], add restrictions on the dimension of the system to $(n = 2)$ (see [11] and references therein), or are not algorithmic throughout. Moreover, the former methods make an essential use of the so-called Arnold-Wasow form. The research advanced profoundly in the last two decades making use of methods of modern algebra and topology. The former classical approach is substituted by efficient algorithms that act directly on the system. It was the hope of Wasow [11], in his 1985 treatise summing up contemporary research directions and results on system

(1), that techniques of system (2) be generalized to tackle the problems of system (1). This generalization is the subject of this talk.

Références

- [1] W. Balser (2000), *Formal Power Series and Linear Systems of Meromorphic Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, New York.
- [2] M. Barkatou (1995), An algorithm to compute the exponential part of a formal fundamental matrix solution of a linear differential system, *Journal of App. Alg. in Eng. Comm. and Comp.*, **8(1)** p.1-23, 1997.
- [3] M. Barkatou and E. Pfluegel (2012), ISOLDE : Integration of Systems of Ordinary Linear Differential Equations. Available at : <http://isolde.sourceforge.net/>
- [4] G. Chen (1990), *Solutions Formelles de Systemes d'Equations Differentielles Lineaires Ordinaires Homogenes*, PhD Thesis, Université Joseph Fourier. Grenoble.
- [5] Hsieh and Sibuya (1999), *Basic theory of Ordinary Differential Equations*.
- [6] M. Iwano and Y. Sibuya (1963), Reduction of the order of a linear ordinary differential equation containing a small parameter, In *Kodai Mathematical Seminar Reports*, **Vol. 15** No. 1 p. 1-28, Tokyo Institute of Technology, Department of Mathematics.
- [7] C. C. Lin (1966), The theory of hydrodynamic stability, *Cambridge Univ. Press*. Cambridge.
- [8] S.S. Maddah, M. Barkatou, and H. Abbas (2014), On the Reduction of Singularly-Perturbed Linear Differential Systems, *Proceedings of the 39th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, p. 320-327.
- [9] S.S. Maddah, M. Barkatou, and H. Abbas (2014), Formal Solutions of a Class of Pfaffian Systems in Two Variables, *Proceedings of the 39th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, p. 312-319.
- [10] J.A.M. McHugh (1971), An historical Survey of Ordinary Linear Differential Equations with a Large Parameter and Turning Points, *Archive for History of Exact Sciences*, **7(4)** p. 277-324.
- [11] W. Wasow (1985), *Linear Turning Point Theory*, Springer-Verlag.
- [12] W. Wasow (1979), *Topics in the Theory of Linear Ordinary Differential Equations Having Singularities with respect to a Parameter*, Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur, Strasbourg.

14ème Forum des Jeunes Mathématicien-ne-s, Paris

INÉGALITÉS DE CONCENTRATION POUR LES STATISTIQUES D'ORDRE

Maud THOMAS

Université Paris Diderot - LPMA
avenue de France, Paris, France
thomas@math.univ-paris-diderot.fr

Résumé - *Le but de cet exposé est de montrer comment obtenir des inégalités de concentration non-asymptotiques pour les statistiques d'ordre d'un échantillon de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.*

Les résultats de la théorie des valeurs extrêmes permettent de montrer que ces inégalités sont asymptotiquement tendues.

Lorsque la loi de l'échantillon possède un taux de hasard croissant, on montre que les statistiques d'ordre satisfont une inégalité exponentielle d'Efron-Stein, c'est-à-dire, une inégalité reliant le logarithme de la fonction génératrice des moments des statistiques d'ordre avec les moments exponentiels de l'estimée Efron-Stein de la variance.

Nous commencerons par rappeler certaines inégalités de concentration et introduire quelques notions de la théorie des valeurs extrêmes. Nous montrerons ensuite comment les appliquer pour obtenir des inégalités de concentration pour les statistiques d'ordre et nous vérifierons qu'elle sont tendues grâce à la théorie des valeurs extrêmes. Enfin, nous les appliquerons aux échantillons gaussiens.

Mots clés - **Statistiques d'ordre, inégalités de concentration, méthode entropique, Inégalité d'Efron-Stein**

Références

- [Boucheron and Thomas(2012)] S. Boucheron and M. Thomas. Concentration inequalities for order statistics. *Electron. Commun. Probab.*, 17 :1–12, 2012. ISSN 1083-589X. doi : 10.1214/ECP.v17-2210. URL <http://dx.doi.org/10.1214/ECP.v17-2210>.
- [Boucheron et al.(2012)Boucheron, Lugosi, and Massart] S. Boucheron, G. Lugosi, and P. Massart. *Concentration inequalities*. Oxford University Press, 2012.
- [de Haan and Ferreira(2006)] L. de Haan and A. Ferreira. *Extreme value theory*. Springer, 2006.

INÉGALITÉS DE CONCENTRATION POUR UN MODÈLE D'OCCUPATION AVEC NOMBRE INFINI D'URNES

Anna Ben-Hamou, en collaboration avec Stéphane Boucheron et Mesrob I.

Ohannessian

Paris-Diderot, LPMA

Paris, France

benhamou@math.univ-paris-diderot.fr

Résumé - Nous nous plaçons dans le modèle suivant : n boules sont lancées sur un ensemble infini d'urnes indexé par \mathbb{N} . Pour tout $j \in \mathbb{N}$, l'urne j a une probabilité p_j de recevoir une boule. Nous établissons des inégalités de concentration de type Bernstein pour diverses quantités : le nombre d'urnes contenant plus de r boules, et la masse manquante, c'est-à-dire la somme des probabilités des urnes vides. Nous montrons que si la distribution (p_j) vérifie une hypothèse de variation régulière, alors ces inégalités sont tendues, au sens où le facteur de variance capture bien l'ordre de grandeur de la variance effective.

Mots clés - modèle d'urnes, masse manquante, inégalités de concentration, variation régulière

1 Introduction

1.1 Problem Setting

Let U_1, U_2, \dots, U_n be i.i.d. observations from a fixed distribution $(p_j)_{j=1}^{\infty}$ over a discrete set of symbols $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. We consider each j in \mathbb{N}^* as a discrete *symbol* devoid of numerical significance. The terminology of 'bins and balls' comes from the analogy to n independent throws of balls over an infinity of bins, p_j being the probability of a ball falling into bin j , at any i -th throw. The sample size n may be fixed in advance; we call this the *Bernoulli scenario*. It may be randomly set by the duration of an experiment according to a Poisson distribution of mean n ; this gives rise to the *Poisson scenario*. More precisely, in the latter case we write it as N , a Poisson random variable independent of (U_i) and with expectation t . We index all Poisson-scenario quantities by t and write them with functional notations, instead of subscripts used for the fixed- n scheme.

For each $j, n \in \mathbb{N}^*$, let $X_{n,j} = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{U_i=j\}}$ be the number of times symbol j occurs in a sample of size n , and $X_j(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \mathbb{I}_{\{U_i=j\}}$ the Poissonian version. In questions of underrepresented data, the central objects are sets of symbols that are repeated a small number r of times. The central quantities are the *occupancy scores* $K_{n,r}$ [respectively $K_r(t)$ for the Poisson scenario], defined as the number of symbols that appear exactly r times in a sample of size n :

$$K_{n,r} = |\{j, X_{n,j} = r\}| = \sum_j \mathbb{I}_{\{X_{n,j}=r\}}.$$

The occupancy counts then combine to yield the cumulated occupancy counts $K_{n,\bar{r}}$ [respectively $K_{\bar{r}}(t)$] and the total number of distinct symbols in the sample, or the total number of occupied bins, often called the *coverage* and denoted by K_n [respectively $K(t)$] :

$$K_{n,\bar{r}} = |\{j, X_{n,j} \geq r\}| = \sum_j \mathbb{I}_{\{X_{n,j} \geq r\}} = \sum_{s \geq r} K_{n,s},$$

and

$$K_n = |\{j, X_{n,j} > 0\}| = \sum_j \mathbb{I}_{\{X_{n,j} > 0\}} = \sum_{r \geq 1} K_{n,r}.$$

In addition to the occupancy numbers and the number of distinct symbols, we will also address the *rare* (or small-count) *probabilities* $M_{n,r}$ [respectively $M_r(t)$], defined as the probability mass corresponding to all symbols that appear exactly r times :

$$M_{n,r} = \mathbb{P}(\{j, X_{n,j} = r\}) = \sum_j p_j \mathbb{I}_{\{X_{n,j} = r\}}.$$

In particular, $M_{n,0} = \sum_j p_j \mathbb{I}_{\{X_{n,j} = 0\}}$ is called the missing mass, and corresponds to the probability of all the unseen symbols.

1.2 Concentration

Our concentration results mostly take the form of bounds on the log-Laplace transform. Our terminology follows closely [BLM13]. We say that the random variable Z is sub-Gaussian with variance factor v if, for all $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\log \mathbb{E} e^{\lambda(Z - \mathbb{E}Z)} \leq \frac{v\lambda^2}{2}.$$

We say that a random variable Z is sub-gamma on the right tail with variance factor v and scale parameter c if

$$\log \mathbb{E} e^{\lambda(X - \mathbb{E}X)} \leq \frac{\lambda^2 v}{2(1 - c\lambda)} \text{ for every } \lambda \text{ such that } 0 < \lambda < 1/c.$$

These log-Laplace bounds then imply mostly Bennett-type inequalities, which result in sub-Gaussian concentration for the left tail, and Bernstein-type sub-gamma concentration for the right tail, that is, for $s > 0$ our inequalities have the form :

$$\mathbb{P}\{Z > \mathbb{E}[Z] + \sqrt{avs} + bs\} \leq ce^{-s},$$

and

$$\mathbb{P}\{Z < \mathbb{E}[Z] - \sqrt{avs}\} \leq ce^{-s},$$

where v is effectively the variance of Z and a , b , and c are explicit constants. We present such results first without making distributional assumptions, beyond the structure of those quantities themselves. These concentrations then specialize in various settings, such as that of regular variation.

1.3 Main results

For the cumulated occupancy counts, we establish a Bennett Inequality with two possible variance proxies, one given by the negative correlation of the Bernoulli summands in $K_{n,\bar{r}}$, and the other stemming from the Efron-Stein Inequality.

Théorème 1 (A Bennett Inequality for the cumulated occupant counts) *Let $r \geq 1$.*

$$\text{Var}(K_{n,\bar{r}}) \leq \min(r\mathbb{E}K_{n,r}, \mathbb{E}K_{n,\bar{r}}).$$

For all $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\log \mathbb{E}e^{\lambda(K_{n,\bar{r}} - \mathbb{E}K_{n,\bar{r}})} \leq \phi(\lambda) \min(r\mathbb{E}K_{n,r}, \mathbb{E}K_{n,\bar{r}}),$$

with $\phi : \lambda \mapsto e^\lambda - \lambda - 1$.

We also obtain distribution-free bounds on the log-Laplace transform of the missing mass, which result in sub-Gaussian concentration on the left tail, and sub-gamma concentration on the right tail. More precisely we show the following :

Théorème 2 (A Bernstein Inequality for the missing mass) *Let $v_n^- = 2\mathbb{E}K_2(n)/n^2$ and $v_n^+ = 2\mathbb{E}K_{\frac{1}{2}}(n)/n^2$. For all $\lambda \leq 0$,*

$$\log \mathbb{E}e^{\lambda(M_{n,0} - \mathbb{E}M_{n,0})} \leq v_n^- \frac{\lambda^2}{2},$$

and, for all $\lambda \geq 0$,

$$\log \mathbb{E}e^{\lambda(M_{n,0} - \mathbb{E}M_{n,0})} \leq v_n^+ \frac{\lambda^2}{2(1 - \lambda/n)}.$$

[MO03] and [BK13] point out that for each Bernoulli random variable Y_j , for all $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\log \mathbb{E}e^{\lambda(Y_j - \mathbb{E}Y_j)} \leq \frac{\lambda^2}{4C_{\text{LS}}(\mathbb{E}Y_j)},$$

where $C_{\text{LS}}(p) = \log(p/(1-p))/(1-2p)$ (or 2 if $p = 1/2$) is the optimal logarithmic Sobolev constant for Bernoulli random variables with success probability p (this sharp and non-trivial result has been proved independently by a number of people : [Hoe63], [KS98], [BK13]). From this observation, thanks to the negative association of the $(Y_j)_{j \in \mathbb{N}}$, it follows that the missing mass is sub-Gaussian with variance factor

$$v = \sum_j \frac{p_j^2}{2C_{\text{LS}}((1-p_j)^n)} \leq \sum_j \frac{p_j^2}{2\log((1-p_j)^{-n})} \leq \sum_j \frac{p_j^2}{2np_j} \leq \frac{1}{2n}.$$

This variance factor is usually larger than $2\mathbb{E}K_{\frac{1}{2}}(n)/n^2$.

Our variance factor $v_n^+ = 2\mathbb{E}K_{\frac{1}{2}}(n)/n^2$ for the right tail may however be larger than the true variance of $M_{n,0}$. This leads us to look for conditions ensuring that v_n^+ captures the right order for the variance.

Indeed, these results are distribution-free. In certain contexts, in particular for studying the right tail of the missing mass $M_{n,0}$ in a sharp way, one needs more control on the relative

behavior of expectations and variances. When the support of (p_j) is infinite, such control can be obtained by using a tail asymptotic stability condition, as in extreme value theory.

[Kar67] pioneered such a condition by assuming that the function $\bar{\nu} : (0, 1] \rightarrow \mathbb{N}$, defined by $\bar{\nu}(x) = |\{j \in \mathbb{N}^*, p_j \geq x\}|$ satisfies a regular variation assumption, namely $\bar{\nu}(1/n) \sim n^\alpha \ell(n)$ near $+\infty$, with $\alpha \in (0, 1]$ (see also [GHP⁺07, OD12]). Here ℓ is a slowly varying function at ∞ , i.e. for all x , $\ell(tx)/\ell(t) \rightarrow 1$ as $t \rightarrow \infty$. This condition allows us to compare the asymptotics of the various occupancy scores. In particular, in this framework $\mathbb{E}K_2(n)$ and $\mathbb{E}K_{\frac{1}{2}}(n)$ have the same order of growth, and, divided by n^2 they both are of the same order as the variance of the missing mass. Hence, the regular variation provides a framework in which our concentration inequalities are order-optimal.

To handle the case $\alpha = 0$, we move from *Karamata* to *de Haan* theory, and take $\bar{\nu}$ to have an extended regular variation property. This elegantly covers the case of sub-power-law heavy tails. Formally, we take $\bar{\nu}$ to satisfy the extended regular variation property at 0 : there exists a non-negative function a on \mathbb{R}_+ such that $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\bar{\nu}(1/zx) - \bar{\nu}(1/x)) / a(x)$ is a measurable function over all $z > 0$. The sub-power-law heavy tails then correspond to when $\alpha = 0$ and $a(x) \rightarrow \infty$. This implies $\mathbb{E}K_{n,1} \rightarrow \infty$, yet $\mathbb{E}K_{n,1} / \mathbb{E}K_n \rightarrow 0$.

This domain corresponds to light-tailed distributions which are still heavier than the geometric. In this case, we only manage to show the sub-gamma concentration of the missing mass for n large enough, that is, that there exists n_0 such that for all $n \geq n_0$, for $\lambda > 0$, we have $\log \mathbb{E}e^{\lambda(M_n - \mathbb{E}M_n)} \leq (v_n \lambda^2) / 2(1 - \lambda/n)$, with $v_n \asymp \text{Var}M_{n,0}$.

For lighter (sub-exponential) tails we cannot expect such concentration for the missing mass.

Références

- [BGI14] J. Bartroff, L. Goldstein, and Ü. Işlak. Bounded size biased couplings, log concave distributions and concentration of measure for occupancy models. *arXiv preprint arXiv :1402.6769*, 2014.
- [BGT89] Nicholas H Bingham, Charles M Goldie, and Jef L Teugels. *Regular variation*, volume 27. Cambridge university press, 1989.
- [BGY08] L.V. Bogachev, A.V. Gnedin, and Y.V. Yakubovich. On the variance of the number of occupied boxes. *Adv. in Appl. Math.*, 40(4) :401–432, 2008.
- [BK13] D. Berend and A. Kontorovich. On the concentration of the missing mass. *Electron. Commun. Probab.*, 18 :no. 3, 7, 2013.
- [BLM13] S. Boucheron, G. Lugosi, and P. Massart. *Concentration inequalities*. Oxford University Press, 2013.
- [dF06] L. de Haan and A. Ferreira. *Extreme value theory*. Springer-Verlag, 2006.
- [DR98] Devdatt Dubhashi and Desh Ranjan. Balls and bins : A study in negative dependence. *Random Structures and Algorithms*, 13(2) :99–124, 1998.
- [GHP⁺07] Alexander Gnedin, Ben Hansen, Jim Pitman, et al. Notes on the occupancy problem with infinitely many boxes : general asymptotics and power laws. *Probab. Surv.*, 4 :146–171, 2007.
- [Goo53] I. J. Good. The Population Frequencies of species and the estimation of population parameters. *Biometrika*, 40 :16–264, 1953.

- [Hoe63] W. Hoeffding. Probability inequalities for sums of bounded random variables. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 58 :13–30, 1963.
- [Kar67] S. Karlin. Central limit theorems for certain infinite urn schemes. *J. Math. Mech.*, 17 :373–401, 1967.
- [KS98] M. Kearns and L. Saul. Large deviation methods for approximate probabilistic inference. In *Proceedings of the Fourteenth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*, pages 311–319. Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1998.
- [MO03] D. McAllester and L.E. Ortiz. Concentration inequalities for the missing mass and for histogram rule error. *Journal of Machine Learning Research*, 4 :895–911, 2003.
- [OD12] Mesrob I Ohannessian and Munther A Dahleh. Rare Probability Estimation under Regularly Varying Heavy Tails. *Journal of Machine Learning Research-Proceedings Track*, 23 :21–1, 2012.

CALCUL EXACT DES COEFFICIENTS DE LA DÉCOMPOSITION HDMR POUR UNE FONCTION MULTI-LINÉAIRE

Manon Bondouy

Université de Toulouse

118 Route de Narbonne, Toulouse, France

manon.bondouy@airbus.com

Résumé - *High Dimensional Model Representation (HDMR) est un terme générique qui regroupe plusieurs méthodes distinctes basées sur le principe de la décomposition d'une fonction multi-variable donnée en une somme finie de fonctions élémentaires dépendant d'un nombre inférieur ou égal de variables. Cette décomposition introduite initialement par Sobol pour l'analyse de sensibilité trouve une autre application dans la réduction de modèles obtenue par troncature de cette décomposition. Nous proposons ici une méthode de détermination exacte des termes de la décomposition de Sobol dans le cas particulier de fonctions multi-linéaires par morceaux.*

Mots clés - HMDR, multi-linéaire

1 Contexte industriel

Dans l'industrie aéronautique, de nombreux modèles de l'avion sont basés sur des fonctions tabulées qui réalisent une interpolation multi-linéaire par morceaux entre des valeurs pré-calculées et stockées dans des tables.

La taille de ces tables peut être importante. De ce fait, il peut être nécessaire de les réduire en vue de les implanter dans les systèmes embarqués. C'est dans cette optique que nous nous intéressons au HDMR, dont le principe est rappelé dans la section suivante.

2 Introduction au HDMR

Soit Y une fonction quelconque de N variables d'entrée $\mathbf{X}=(X_1, \dots, X_N)$ sur un ensemble de définition défini par un produit cartésien d'intervalles $[a_1; b_1] \times [a_2; b_2] \times \dots \times [a_N; b_N]$. On décompose Y en une somme de fonctions appelées termes de Sobol de 0, 1, 2, \dots , N variables :

$$Y(X_1, \dots, X_N) = Z_0 + \sum_{i_1=1}^N Z_{i_1}(X_{i_1}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq N} Z_{i_1, i_2}(X_{i_1}, X_{i_2}) \\ + \dots + Z_{1, 2, \dots, N}(X_1, X_2, \dots, X_N).$$

L'ordre d'un terme quelconque de la décomposition correspond au nombre de variables dont il dépend : Z_0 est un terme d'ordre 0 car il dépend de 0 variable ; les termes $(Z_{i_1})_{1 \leq i_1 \leq N}$

dépendant d'une seule variable sont des termes d'ordre 1, que l'on appelle *effets principaux*, les termes $(Z_{i_1, i_2})_{1 \leq i_1 < i_2 \leq N}$ représentent les effets d'interaction d'ordre 2 ...

Le nombre de termes de la décomposition est 2^N . Pour que chacun de ces 2^N termes soit défini de façon unique, on choisit d'imposer des conditions d'orthogonalité qui se traduisent par les équations suivantes [2] :

$$\int Z_{i_1, i_2, \dots, i_k} dX_j = 0 \text{ pour } 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N, 1 \leq k \leq N, j \in \{i_1, i_2, \dots, i_k\}. \quad (1)$$

Le nombre de termes de Sobol d'un ordre donné est égal au nombre de combinaisons de m variables prises parmi N , c'est-à-dire $\binom{N}{m}$. Chacune de ces combinaisons est représentée par l'ensemble V_m^p des m indices correspondants, indexé par $p \in \{1, \dots, \binom{N}{m}\}$. Par exemple, pour un vecteur d'entrées de dimension 5, il existe 5 termes d'ordre 1 et 10 termes d'ordre 2, qui correspondent respectivement aux combinaisons possibles de 1 et de 2 variables prises parmi 5. On note \bar{V}_m^p son complémentaire à $\{1, \dots, N\}$.

On montre [1] que l'ensemble des conditions (1) permet de calculer les termes de la représentation de la façon suivante :

Terme d'ordre 0 :

$$Z_0 = \frac{1}{\prod_{t=1}^N (b_t - a_t)} \int \prod_{k=1}^N [a_k; b_k] Y(\mathbf{X}) \prod_{k=1}^N dX_k,$$

Termes d'ordre 1 : $\forall i_1 \in \{1, \dots, N\}$,

$$Z_0 + Z_{i_1}(X_{i_1}) = \frac{1}{\prod_{t \neq i_1} (b_t - a_t)} \int \prod_{k \neq i_1} [a_k; b_k] Y(\mathbf{X}) \prod_{k \neq i_1} dX_k,$$

Termes d'ordre 2 : $\forall i_1 \in \{1, \dots, N\}, \forall i_2 \in \{1, \dots, N\}$ et $i_1 < i_2$,

$$Z_0 + Z_{i_1}(X_{i_1}) + Z_{i_2}(X_{i_2}) + Z_{i_1, i_2}(X_{i_1}, X_{i_2}) = \frac{1}{\prod_{t \neq i_1, i_2} (b_t - a_t)} \int \prod_{k \neq i_1, i_2} [a_k; b_k] Y(\mathbf{X}) \prod_{k \neq i_1, i_2} dX_k.$$

De façon générale, pour exprimer les termes successifs du HDMR, on doit calculer les intégrales suivantes $\forall m \in \{1, \dots, N\}, \forall p \in \{1, \dots, \binom{N}{m}\}$:

$$I_m^p((X_i)_{i \in V_m^p}) = \frac{1}{\prod_{t \in \bar{V}_m^p} (b_t - a_t)} \int \prod_{k \in \bar{V}_m^p} [a_k; b_k] Y(\mathbf{X}) \prod_{k \in \bar{V}_m^p} dX_k.$$

Pour alléger l'écriture, on n'écrira plus par la suite les variables dont dépendent les différentes intégrales, c'est-à-dire : $I_m^p((X_i)_{i \in V_m^p}) = I_m^p$. Le HDMR est basé sur l'hypothèse que la contribution des différents termes de la décomposition décroît lorsque leur ordre augmente. On tronque donc la décomposition à un ordre $NMAX$, c'est-à-dire qu'on ne conserve que les termes faisant intervenir les effets corrélés entre au plus $NMAX$ variables. Par exemple pour

$NMAX = 1$, $Y(\mathbf{X})$ est approché par $Z_0 + \sum_{i=1}^N Z_i(X_i)$. On obtient ainsi une approximation de la fonction Y d'autant meilleure que $NMAX$ est élevé. Lorsque Y n'est pas connue de manière analytique, les intégrales I_m^p peuvent être approchées par des méthodes déterministes ou stochastiques. Nous allons montrer que dans le cas des fonctions multi-linéaires, le calcul des différentes intégrales I_m^p peut être réalisé de manière exacte.

3 Cas particulier des fonctions multi-linéaires

Supposons ici que Y est une fonction tabulée. Sa valeur est donnée explicitement aux points de coordonnées (X_1, X_2, \dots, X_N) tels que

$$X_1 \in \{X_{1,1}, \dots, X_{1,J_1}\}, X_2 \in \{X_{2,1}, \dots, X_{2,J_2}\}, \dots, X_N \in \{X_{N,1}, \dots, X_{N,J_N}\}$$

avec

$$X_{1,1} = a_1, X_{1,J_1} = b_1, X_{2,1} = a_2, X_{2,J_2} = b_2, \dots, X_{N,1} = a_N, X_{N,J_N} = b_N.$$

Le domaine de définition de Y est ainsi constitué d'une réunion de pavés élémentaires :

$$\Omega_q = [X_{1,j_1}; X_{1,j_1+1}] \times [X_{2,j_2}; X_{2,j_2+1}] \times \dots \times [X_{N,j_N}; X_{N,j_N+1}]$$

avec

$$j_1 \in \{1, \dots, J_1 - 1\}, j_2 \in \{1, \dots, J_2 - 1\}, \dots \text{ et } j_N \in \{1, \dots, J_N - 1\}.$$

Sur chacun de ces pavés, Y est construite par interpolation multi-linéaire. Sur le pavé Ω_q , on a :

$$Y_q(\mathbf{X}) = \sum_{k=0}^{2^N-1} \alpha_{k,q} \prod_{i=1}^N X_i^{\delta_{ik}} \text{ où } \delta_{ik} \text{ est le } i^{\text{ème}} \text{ chiffre de } k \text{ écrit en base 2.}$$

Pour un ordre $m \in \{1, \dots, N\}$ et pour une combinaison $p \in \{1, \dots, \binom{N}{m}\}$ donnés, son intégrale sur le pavé Ω_q s'écrit :

$$I_{m,q}^p = \int \prod_{l \in \bar{V}_m^p} [X_{l,j_l}; X_{l,j_l+1}] \sum_{k=0}^{2^N-1} \alpha_{k,q} \prod_{l_1 \in V_m^p} X_{l_1}^{\delta_{l_1 k}} \prod_{l_2 \in \bar{V}_m^p} X_{l_2}^{\delta_{l_2 k}} \prod_{l \in \bar{V}_m^p} dX_l.$$

qui vaut exactement :

$$I_{m,q}^p = \sum_{k=0}^{2^N-1} \alpha_{k,q} \prod_{l_1 \in V_m^p} X_{l_1}^{\delta_{l_1 k}} \prod_{l_2 \in \bar{V}_m^p} \Delta_{l_2, j_{l_2}} \mu_{l_2, j_{l_2}}^{\delta_{l_2 k}}$$

avec

$$\Delta_{i, j_i} = X_{i, j_i+1} - X_{i, j_i} \quad \text{et} \quad \mu_{i, j_i} = \frac{X_{i, j_i+1} + X_{i, j_i}}{2}.$$

On parcourt NQ pavés avec $NQ = \prod_{i=1}^N \max(1, J_i - 1)$. La valeur totale de l'intégrale est donc :

$$I_m^p = \frac{1}{\prod_{t \in \bar{V}_m^p} (b_t - a_t)} \sum_{q=1}^{NQ} I_{m,q}^p.$$

4 Conclusions

Le HDMR est une méthode efficace de réduction de modèles qui s'applique particulièrement bien aux fonctions tabulées. En l'absence d'information spécifique sur la fonction à approcher, le calcul de cette décomposition nécessite la mise en oeuvre de méthodes lourdes et entachées d'erreurs d'approximation. Dans le cas étudié ici d'une fonction multi-linéaire par morceaux, ces intégrales peuvent être calculées de manière exacte et rapide, ce qui accroît encore l'intérêt du HDMR.

Références

- [1] G. Li, S. W. Wang, H. Rabitz, S. Wang, and P. Jaffe. Global uncertainty assessments by high dimensional model representations (HDMR). Chemical Engineering Science, 57(21) :4445–4460, 2002.
- [2] Ilya M. Sobol. Theorems and examples on high dimensional model representation. Rel. Eng. & Sys. Safety, 79(2) :187–193, 2003.