Quelques exemples de recherche en mathématiques appliquées

Virginie Bonnaillie-Noël

IRMAR, CNRS, ENS Cachan Bretagne et Univ. Rennes 1

Femmes et Mathématiques
13 juin 2009

Plan

1. Les mathématiques dans notre quotidien

2. Quelques caractéristiques de la recherche en mathématiques

3. Deux exemples de recherche en mathématiques appliquées :
   - supraconductivité
   - effet de micro-défauts sur la rupture des structures

Citations

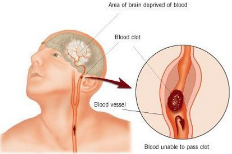
"Le progrès en sciences provient toujours d'une combinaison de pensées décousues et de pensées rigoureuses. . . cette combinaison est notre outil le plus précieux"
Gregory Bateson

"Les mathématiques sont un outil que l'esprit de l'homme ne cesse de construire et de perfectionner afin de comprendre le monde"
Jean-Michel Bony

Les mathématiques dans notre quotidien

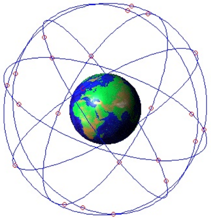
Les mathématiques interviennent de manière cachée dans la vie courante :

- comprendre, expliquer et prévoir les phénomènes *(météorologie, biologie, santé, finances)*
- développer de nouvelles technologies *(téléphonie mobile, nanotechnologies, médecine, astronomie)*
- assurer la sécurité et la confidentialité de transferts de données *(cartes à puces, paiements sur internet, communications)*



GPS, Géo-Positionnement par Satellite

- 24 satellites répartis sur 6 orbites
- chaque satellite envoie deux signaux radio : sa position et l'instant d'émission
- le récepteur, en surface terrestre, reçoit plusieurs signaux et calcule la latitude, la longitude et l'altitude



Aspects mathématiques :

- intersection de sphères
- évaluation de la vitesse des ondes radio en fonction de la densité atmosphérique

Téléphonie

Aspects mathématiques

- optimisation du réseau de câbles ou d'antennes (optimisation combinatoire)
- propagation d'ondes électromagnétiques

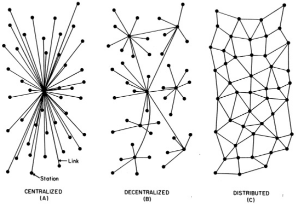


FIG. I — Centralized, Decentralized and Distributed Networks

Crypter des données

- envoyer un courrier électronique
- payer par carte bancaire

Aspects mathématiques :

- Code RSA (Rivest-Shamir-Adleman, 1977)
- Codes récents basés sur de la géométrie, des probabilités,...

Quelques caractéristiques de la recherche en mathématiques

Entrelacement entre recherche appliquée et fondamentale

Motivations

- répondre à une attente des autres sciences
- défi intellectuel
- élargir le champ des connaissances et des méthodes mathématiques

Relation à double sens

- une nouvelle théorie peut servir à résoudre un problème pratique
- les applications peuvent stimuler de nouvelles méthodes mathématiques, qui vont elles-mêmes s'appliquer dans des domaines variés

Comment “chercher” ?

- “Laver” le problème : comprendre ce qui est important et ce qui l’est moins, ce qui est pertinent ou pas.
  (pour la trajectoire d’un bolide : forme de la voiture, vitesse du vent. . .)

- Extraire un modèle simplifié mais viable en termes mathématiques :
  - assez simple pour savoir le résoudre,
  - assez complexe pour rendre compte de la réalité.

- Utiliser les outils informatiques pour faire les calculs, si besoin est, ou simuler le phénomène réel et prévoir les résultats.

- Lire des articles de revues mathématiques pour connaître et assimiler les résultats déjà acquis.
- Participer des séminaires, groupes de travail et conférences.

Comment aborder un problème ?

$$
\begin{array}{ccc}
 & \boxed{\text{Phénomène physique}} & \\
 & \downarrow & \\
 & \boxed{\text{Modélisation mathématique (E. D. P.)}} & \\
\swarrow & & \searrow \\
\boxed{\text{Résolution numérique}} & & \boxed{\text{Étude qualitative}} \\
\searrow & & \swarrow \\
 & \boxed{\text{Prévisions + exploitation des résultats}} &
\end{array}
$$

La rigueur mathématique

Quelque soit son domaine, le mathématicien ne se contente pas de calculer, il démontre !

Ex : montrer l'existence et l'unicité de la solution d'un problème.

Évident devant la réalité physique mais

$$\text{modèle} \neq \text{réalité}$$

Ce résultat

- garantit que le problème est bien posé et valide le modèle
- donne parfois des indications sur la solution

Généralement, on ne sait pas calculer la solution. On a alors recours à des approximations (que l'on essaie de quantifier) ou des simulations numériques.

Deux exemples de recherche en mathématiques appliquées

- supraconductivité

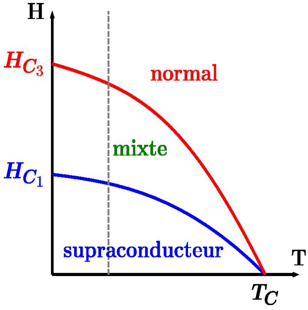
- effet de micro-défauts sur la rupture des structures

Supraconductivité

Phénomène découvert en 1911...

... par un étudiant peu attentif

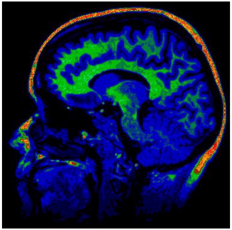
- propriété relative à certains matériaux
- à très basse température (153K au mieux)
- résistance électrique nulle
- expulsion du champ magnétique extérieur
  effet Meissner



Applications

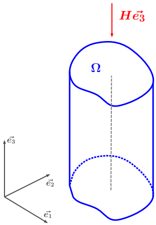
- Lévitation magnétique : trains à sustentation électromagnétique
  Transrapid à Shanghai, MagLev au Japon, projets allemands
- Imagerie médicale : IRM, RMN





Théorie de Ginzburg-Landau (1950)

- *description macroscopique*
- *valable près de la température critique*
- *basée sur une transition de second ordre*



potentiel de référence $\mathcal{A}_0 = \frac{1}{2}(-x_2, x_1)$, $\mathrm{rot}\,\mathcal{A}_0 = \vec{e_3}$

caractéristique du matériau κ

potentiel magnétique induit $H\mathcal{A}$

paramètre d'ordre ψ

$|\psi|^2 \propto$ *densité des électrons supraconducteurs*

Énergie du matériau :

$$\mathcal{E}_{\kappa,H}[\psi,\mathcal{A}] = \int_\Omega \left\{ |(\nabla - i\kappa H\mathcal{A})\psi|^2 + \frac{\kappa^2}{2}(|\psi|^2 - 1)^2 + \kappa^2 H^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\mathrm{rot}\,(\mathcal{A} - \mathcal{A}_0)|^2 \right\}$$

But : comprendre l'influence de Ω sur le comportement des minimiseurs

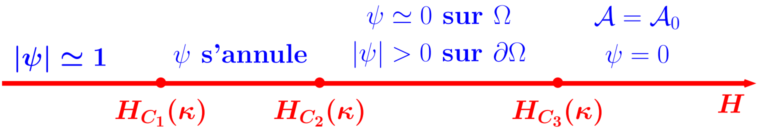
Quelques résultats généraux

- Pour tout $\kappa, H > 0$, la fonctionnelle $\mathcal{E}_{\kappa,H}$ a un minimiseur
- Pour κ fixé et H assez grand, l'unique solution est $(\psi, \mathcal{A}) = (0, \mathcal{A}_0)$

  $\Rightarrow$ *la supraconductivité est détruite* [Giorgi-Phillips]

Champs critiques pour κ grand

$(\psi, \mathcal{A})$ minimiseur de $\mathcal{E}_{\kappa,H}$



Champ(s) critique(s) H_{C_3}

Plusieurs définitions possibles :

$$\underline{H}_{C_3}(\kappa)=\inf\{H>0 : (0,\mathcal{A}_0) \text{ est un minimiseur de } \mathcal{E}_{\kappa,H}\}$$

$$\overline{H}_{C_3}(\kappa)=\inf\{H>0 : (0,\mathcal{A}_0) \text{ est l'unique minimiseur de } \mathcal{E}_{\kappa,H'} \text{ pour tout } H'>H\}$$

But :
- asymptotique des champs critiques
- estimations de la localisation de la supraconductivité

Références : Bernoff–Sternberg, Bonnaillie-Noël–Fournais, Fournais–Helffer, Helffer–Morame, Helffer–Pan, Jadallah, Lu–Pan, Pan, del Pino–Felmer–Sternberg, …

Conditions d'optimalité

- Minimiseurs pour $\mathcal{E}_{\kappa,H}$ = solutions des équations d'Euler

$$\begin{cases} -(\nabla - i\kappa H\mathcal{A})^2\psi = \kappa^2(1-|\psi|^2)\psi & \text{dans } \Omega \\ \mathrm{rot}^{\,2}\mathcal{A} = \left\{-\frac{i}{2\kappa H}(\overline{\psi}\nabla\psi - \psi\nabla\overline{\psi}) - |\psi|^2\mathcal{A}\right\}1_\Omega & \text{dans } \mathbb{R}^2 \\ (\nabla - i\kappa H\mathcal{A})\psi\cdot\nu = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \mathrm{rot}\,(\mathcal{A}-\mathcal{A}_0) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

- Linéarisation autour de l'état normal $(0, \mathcal{A}_0)$

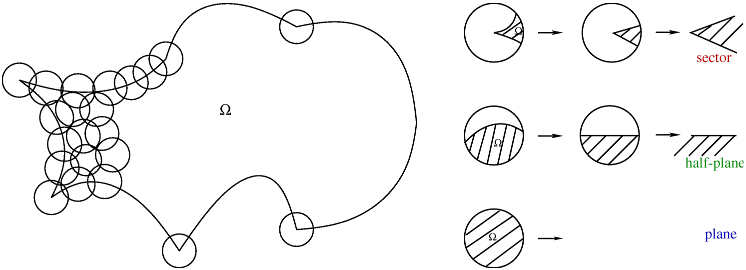
$$\begin{cases} -(\nabla - i\kappa H\mathcal{A}_0)^2\psi = \kappa^2\psi & \text{dans } \Omega \\ (\nabla - i\kappa H\mathcal{A}_0)\psi\cdot\nu = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

- Changement de paramètre : $h = \frac{1}{\kappa H}$

$$\begin{cases} -(h\nabla - i\mathcal{A}_0)^2\psi = \frac{1}{H^2}\psi & \text{dans } \Omega \\ -(h\nabla - i\mathcal{A}_0)^2\psi\cdot\nu = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

But : déterminer le comportement des modes propres $(\mu_{h,n}, u_{h,n})$ de l'opérateur de Schrödinger $-(h\nabla - i\mathcal{A}_0)^2$ quand $h \to 0$

Opérateurs modèles



$\mathcal{A}_0(\mathsf{X}) = \frac{1}{2}(-\mathsf{X}_2, \mathsf{X}_1)$: potentiel magnétique à champ constant

$-(\nabla - i\mathcal{A}_0)^2$ sur le plan, le demi-plan et les secteurs

$$-(\nabla - i\mathcal{A}_0)^2 = -\Delta + i(\mathsf{X}_1\partial_{\mathsf{X}_2} - \mathsf{X}_2\partial_{\mathsf{X}_1}) + \frac{1}{4}(\mathsf{X}_1^2 + \mathsf{X}_2^2)$$

Plan et demi-plan

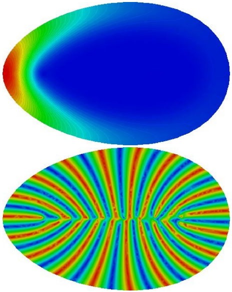
Proposition.

1. La plus petite valeur propre de $-(\nabla - i\mathcal{A}_0)^2$ sur $\mathbb{R}^2$ vaut **1**
   [Landau]

2. Le bas du spectre de la réalisation de Neumann de $-(\nabla - i\mathcal{A}_0)^2$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ vaut $\Theta_0 \simeq 0.59$
   [Dauge-Helffer, 1993 ; Bolley-Helffer, 1993]

Applications aux domaines réguliers

$n = 1$



- $\mu_{h,1} = \Theta_0 h + o(h)$ quand $h \to 0$
- localisation de $u_{h,1}$ aux points de courbure maximale quand $h \to 0$

n quelconque

- asymptotique de $\mu_{h,n}$
- estimation de la décroissance de $u_{h,n}$

Problème non linéaire

- détermination du champ critique $H_{C_3}(\kappa)$

$$H_{C_3}(\kappa) = \underline{H}_{C_3}(\kappa) = \overline{H}_{C_3}(\kappa) = \frac{\kappa}{\Theta_0} + \frac{C_1 k_{\max}}{\Theta_0^{3/2}} + \mathcal{O}(\kappa^{-1/2}) \text{ quand } \kappa \to +\infty$$

- localisation des électrons supraconducteurs aux points de courbure maximale.

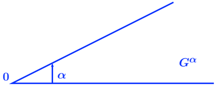
Domaines à coins

Et si la courbure maximale $k_{\max}$ tend vers l'infini...

- *Nouvelle asymptotique des champs critiques ?*
- *Comportement de ψ ?*

Étude des secteurs de $\mathbb{R}^2$

$$G^\alpha = \{\mathsf{X} \in \mathbb{R}^2, \mathsf{X}_1 > 0, 0 < \mathsf{X}_2 < \mathsf{X}_1 \tan\alpha\}$$



Q^α : $-(\nabla - i\mathcal{A}_0)^2$ sur G^α + Neumann

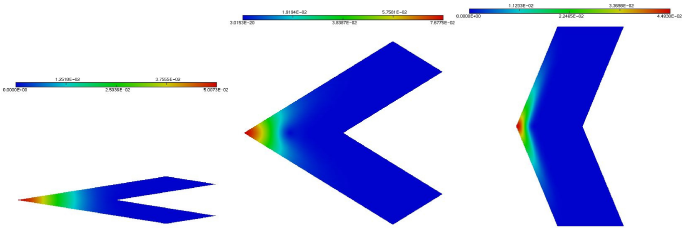
Question : Comportement de Q^α selon α ?

1. Bas du spectre
   - $\mu_1(\alpha) \leq \Theta_0$ pour tout $\alpha \in (0, 2\pi)$
   - Pour tout $\alpha \in (0, \pi/2]$, $\mu_1(\alpha) < \Theta_0$
   - $\alpha \mapsto \alpha\mu_1(\alpha)$ est croissante, $\alpha \mapsto \mu_1(\alpha)/\alpha$ est décroissante

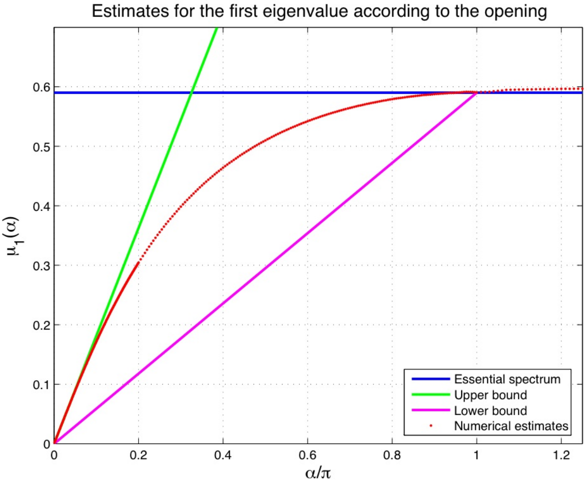
   K_α : nombre de valeurs propres $< \Theta_0$
2. Décroissance des fonctions propres
   $\alpha > 0$, $0 < k \leq K_\alpha$ et Ψ_k^α une fonction propre normalisée pour $\mu_k(\alpha)$. Alors

$$|\Psi_k^\alpha(\mathsf{X})| \sim C\mathrm{e}^{-\sqrt{\Theta_0 - \mu_k(\alpha)}|\mathsf{X}|}$$

Modules de la première fonction propre pour différents angles



Estimations numériques du bas du spectre



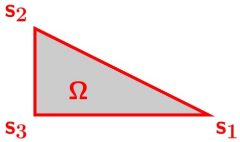
Conjecture : μ_1 croît de $(0, \pi]$ vers $(0, \Theta_0]$, vaut Θ_0 sur $[\pi, 2\pi)$

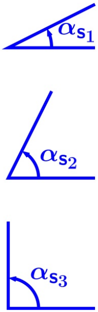
Opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant dans un domaine polygonal

(avec M. Dauge, IRMAR)

$$\boxed{\mathcal{A} = \mathcal{A}_0}$$

Ω	polygone convexe
Σ	ensemble des sommets s de
α_{s}	angle en s
$G^{\alpha_{\mathsf{s}}}$	secteur de $\mathbb{R}^2$ d'ouverture α





Construction de quasi-modes

Soit $\mathsf{s} \in \Sigma$ et $k \geq 1$ tels que $\mu_k(\alpha_{\mathsf{s}}) < \Theta_0$

$\Psi_k^{\alpha_{\mathsf{s}}}$ une fonction propre normalisée de $Q^{\alpha_{\mathsf{s}}}$ sur $G^{\alpha_{\mathsf{s}}}$ pour $\mu_k(\alpha_s)$

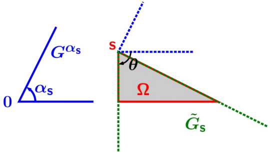
Dilatation

$X = \dfrac{x}{\sqrt{h}}$ pour relier $Q^{\alpha_{\mathsf{s}}} = -(\nabla - i\mathcal{A}_0)^2$ et $P_h = -(h\nabla - i\mathcal{A}_0)^2$

$x \longmapsto \Psi_k^{\alpha_s}\left(\dfrac{x}{\sqrt{h}}\right)$ fonction propre de P_h sur $G^{\alpha_{\mathsf{s}}}$ associée à $h\mu_k(\alpha_{\mathsf{s}})$

Translation et rotation

pour envoyer G^{α_s} sur $\widetilde{G}_s$ qui coïncide avec Ω autour de s



$$
\begin{array}{ccc}
\Psi_k^{\alpha_s}\left(\frac{x}{\sqrt{h}}\right) & \rightsquigarrow & \Psi_k^{\alpha_s}\left(\frac{\mathcal{R}_s(x-s)}{\sqrt{h}}\right) \\
\mathcal{A}_0(x) & \rightsquigarrow & \mathcal{A}_0\left(\frac{\mathcal{R}_s(x-s)}{\sqrt{h}}\right) \quad \neq \mathcal{A}_0(x)
\end{array}
$$

Changement de jauge :

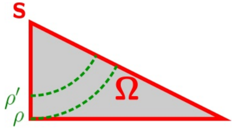
$$(h\nabla - i\mathcal{A}_0)\left(\mathrm{e}^{\frac{i\Phi}{h}} u\right) = \mathrm{e}^{\frac{i\Phi}{h}}(h\nabla - i(\mathcal{A}_0 - \nabla\Phi))u$$

$\widetilde{\psi}_{h,s,k}(x) = \frac{1}{\sqrt{h}} \exp\left(\frac{i}{2h} x \wedge s\right) \Psi_k^{\alpha_s}\left(\frac{\mathcal{R}_s(x-s)}{\sqrt{h}}\right)$ fonction propre de P_h sur $\widetilde{G}_s$

Troncature

Pour chaque sommet $\mathsf{s} \in \Sigma$, on note ρ_{s}
la distance aux autres sommets :

$$\rho_{\mathsf{s}} = \mathrm{dist}(\mathsf{s}, \Sigma \setminus \{\mathsf{s}\})$$



Fonction de troncature :

$$\chi_{\mathsf{s}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin B(\mathsf{s}, \rho_{\mathsf{s}}) \\ 1 & \text{si} \quad x \in B(\mathsf{s}, \rho') \text{ avec } \rho' < \rho_{\mathsf{s}} \end{cases}$$

Quasi-mode défini sur Ω

$$x \longmapsto \psi_{h,\mathsf{s},k}(x) = \chi_{\mathsf{s}}(x)\, \widetilde{\psi}_{h,\mathsf{s},k}(x)$$

Propriétés des quasi-modes

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe C_ε tel que

Norme

$$\left|1 - ||\psi_{h,\mathsf{s},k}||^2\right| \leq C_\varepsilon \,\mathrm{e}^{-\frac{2\rho'\sqrt{\Theta_0 - \mu_k(\alpha_\mathsf{s})} - \varepsilon}{\sqrt{h}}}$$

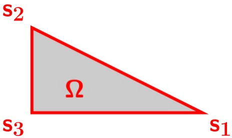
Quotient de Rayleigh

$$\left|\frac{\|(h\nabla - i\mathcal{A}_0)\psi_{h,\mathsf{s},k}\|^2}{\|\psi_{h,\mathsf{s},k}\|^2} - h\mu_k(\alpha_\mathsf{s})\right| \leq C_\varepsilon \,\mathrm{e}^{-\frac{2\rho'\sqrt{\Theta_0 - \mu_k(\alpha_\mathsf{s})} - \varepsilon}{\sqrt{h}}}$$

Approximation de l'équation du mode propre

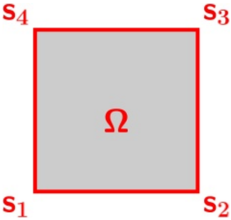
$$||P_h\psi_{h,\mathsf{s},k} - h\mu_k(\alpha_\mathsf{s})\psi_{h,\mathsf{s},k}|| \leq C_\varepsilon \,\mathrm{e}^{-\frac{\rho'\sqrt{\Theta_0 - \mu_k(\alpha_\mathsf{s})} - \varepsilon}{\sqrt{h}}}$$

Exemples



$$\lambda_1 = \mu_1(\alpha_{s_1}) < \lambda_2 = \mu_1(\alpha_{s_2}) < \lambda_3 = \mu_1(\alpha_{s_3})$$

$$\frac{\mu_{h,1}}{h} \sim \mu_1(\alpha_{s_1}), \quad \frac{\mu_{h,2}}{h} \sim \mu_1(\alpha_{s_2}), \quad \frac{\mu_{h,3}}{h} \sim \mu_1(\alpha_{s_3})$$



$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \mu_1(\tfrac{\pi}{2})$$

$$\frac{\mu_{h,k}}{h} \sim \mu_1(\tfrac{\pi}{2}), \qquad k = 1, \ldots, 4$$

Estimations tubulaires des valeurs propres

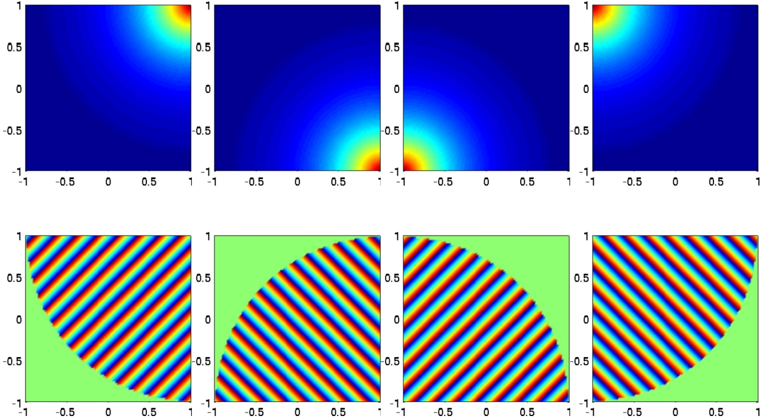
- $\mu_{h,n}$ la n-ème valeur propre de P_h répétée selon la multiplicité
- λ_n la n-ème valeur propre de $\bigoplus_{s\in\Sigma} Q^{\alpha_s}$ répétée selon la multiplicité
- K_Ω nombre de valeurs propres $\lambda_n < \Theta_0$
- Soit $n \leq K_\Omega$,
  $\Sigma_n = \left\{\mathsf{s} \in \Sigma,\ \ \lambda_n \text{ est une valeur propre de } Q^{\alpha_\mathsf{s}}\right\}$
- $r(\lambda_n) = \min_{\mathsf{s}\in\Sigma_n} d(\mathsf{s}, \Sigma \setminus \{\mathsf{s}\})$

Théorème. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe C_ε t. q.

$$|\mu_{h,n} - h\lambda_n| \leq C_\varepsilon \mathrm{e}^{-\frac{r(\lambda_n)\sqrt{\Theta_0-\lambda_n}-\varepsilon}{\sqrt{h}}}, \quad \forall n \leq K_\Omega$$

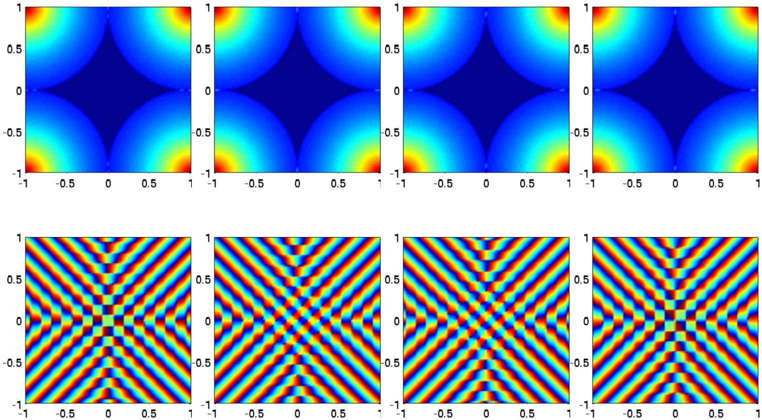
Qu'en est-il des vecteurs propres ?

Exemple du carré



Quasi-modes Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3, Ψ_4

Combinaisons linéaires $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix}$



$\Longrightarrow$ Regroupement par niveau d'énergie

Simulations numériques

(avec M. Dauge, D. Martin et G. Vial, IRMAR)

Quasi-mode :

$$\widetilde{\psi}_{h,\mathsf{s},k}(x) = \frac{1}{\sqrt{h}} \exp\left(\frac{i}{2h} x \wedge \mathsf{s}\right) \Psi_k^{\alpha_{\mathsf{s}}}\left(\frac{\mathcal{R}_{\mathsf{s}}(x-\mathsf{s})}{\sqrt{h}}\right) \chi_{\mathsf{s}}(x)$$

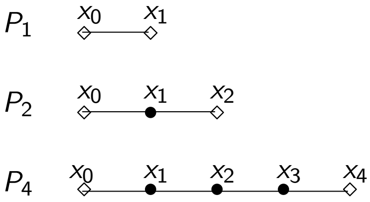
Structure 2 échelles pour les fonctions propres :

1. une couche au coin à l'échelle $\sqrt{h}$,
2. un terme oscillant à l'échelle h.

Calcul des modes propres avec la librairie d'éléments finis MÉLINA

Quelques mots sur les méthodes numériques

Approximation numérique en $1D$

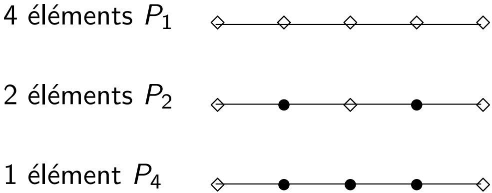


polynôme de degré 1 $\quad P(x_j) = f(x_j)$

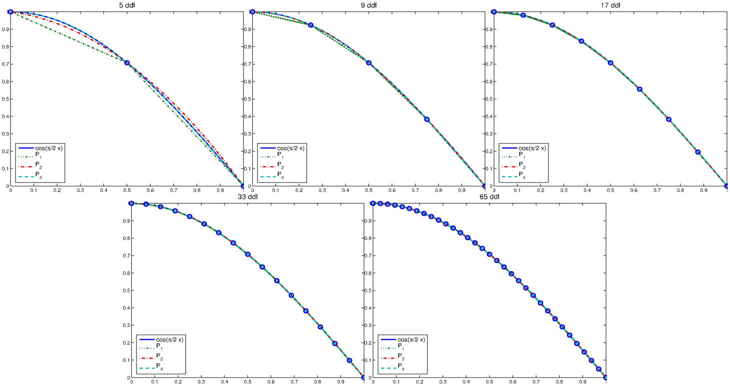
polynôme de degré 2 $\quad P(x_j) = f(x_j)$

polynôme de degré 4 $\quad P(x_j) = f(x_j)$

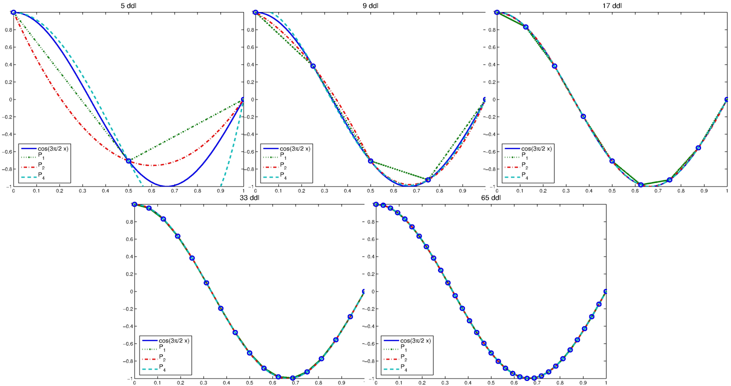
Quelle est la meilleure stratégie pour le même nombre de degrés de liberté ?



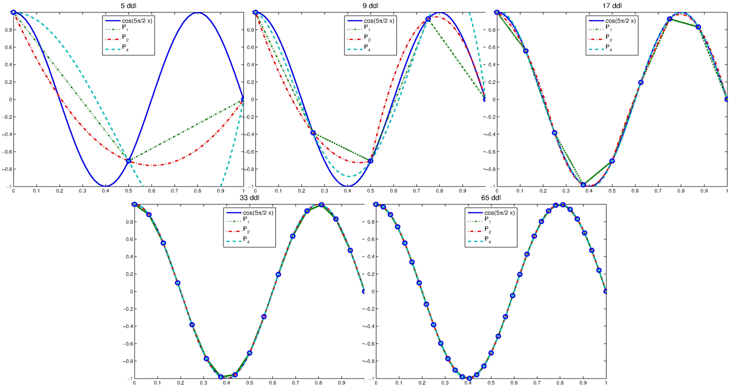
Approximation de fonctions oscillantes avec 5, 9, 17, 33 et 65 ddl



Approximation de $x \mapsto \cos(\frac{\pi}{2}x)$

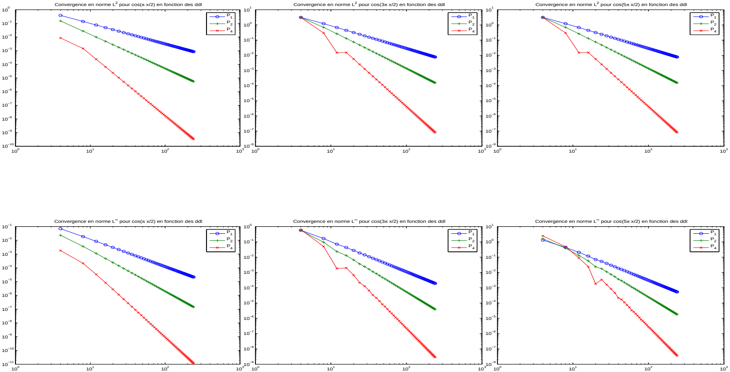


Approximation de $x \mapsto \cos(\frac{3\pi}{2}x)$



Approximation de $x \mapsto \cos(\frac{5\pi}{2}x)$

Convergence en norme L^2 et L^∞



$x \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ $\qquad$ $x \mapsto \cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right)$ $\qquad$ $x \mapsto \cos\left(\frac{5\pi}{2}x\right)$

Méthode des éléments finis

- Problème continu : on cherche (λ, u) tel que

$$\int_\Omega (h\nabla - i\mathcal{A}_0)u \cdot \overline{(h\nabla - i\mathcal{A}_0)v}\, dx = \lambda \int_\Omega u\overline{v}dx, \quad \forall v \in \mathcal{V}$$

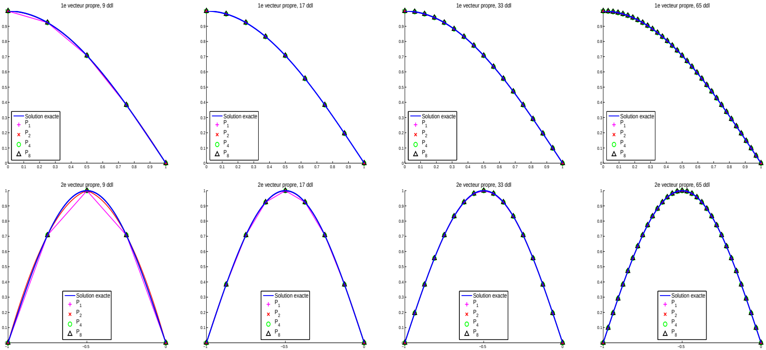
- Espace d'approximation $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$: on cherche (λ_h, u_h) tel que

$$\int_\Omega (h\nabla - i\mathcal{A}_0)u_h \cdot \overline{(h\nabla - i\mathcal{A}_0)v_h}\, dx = \lambda \int_\Omega u_h\overline{v_h}dx, \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h$$

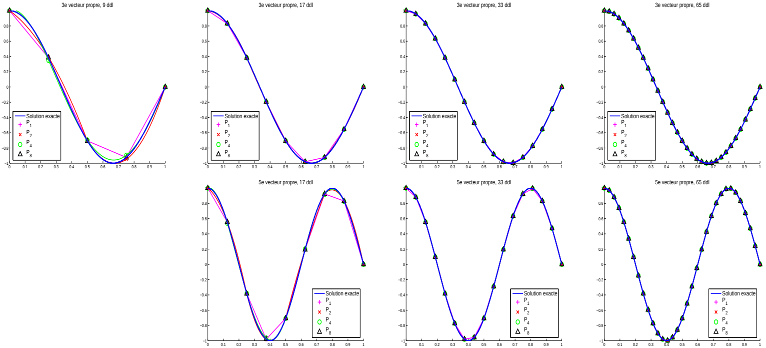
- Écriture matricielle : on cherche $(\lambda_h, U_h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ tel que

$$AU_h = \lambda_h M U_h$$

Calcul des fonctions propres du Laplacien



Vecteurs propres 1 et 2 pour 9, 17, 33 et 65 ddl

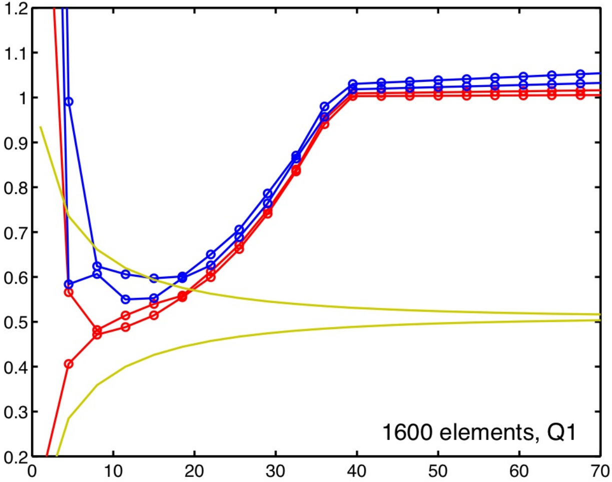


Vecteurs propres 3 et 5 pour 9, 17, 33 et 65 ddl

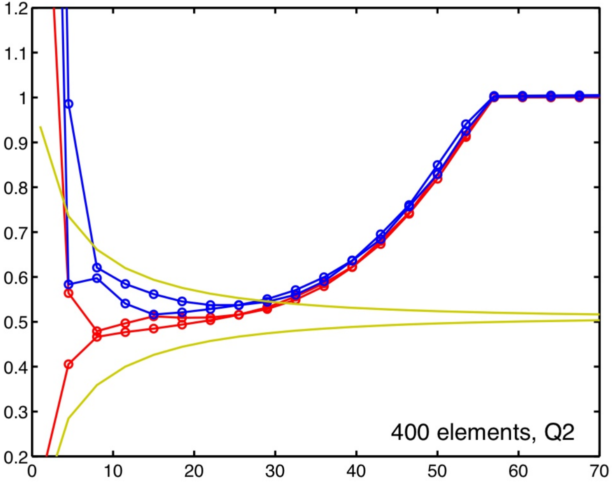
Calculs des valeurs propres de $-(h\nabla - i\mathcal{A}_0)^2$ sur un carré

Influence du degré d'approximation

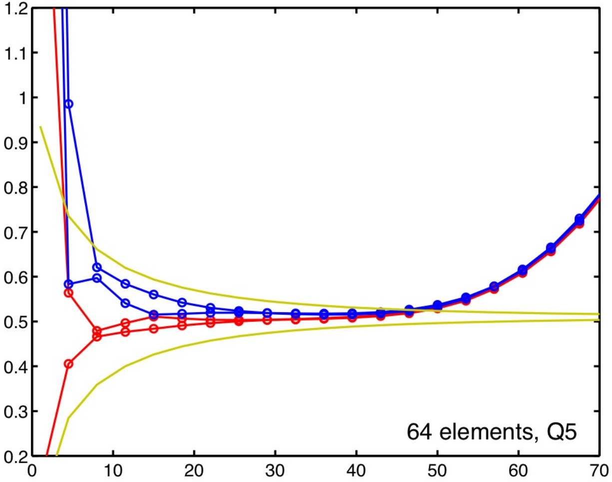
$h^{-1}\mu_{h,n}$ versus h^{-1}



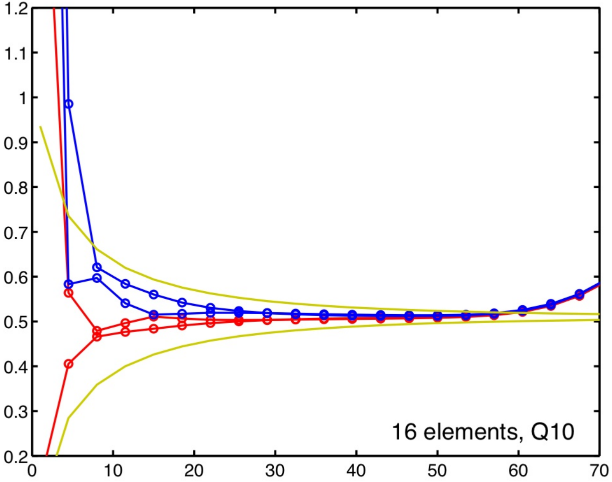
$h^{-1}\mu_{h,n}$ versus h^{-1} pour le même nombre de ddl



$h^{-1}\mu_{h,n}$ versus h^{-1} pour le même nombre de ddl

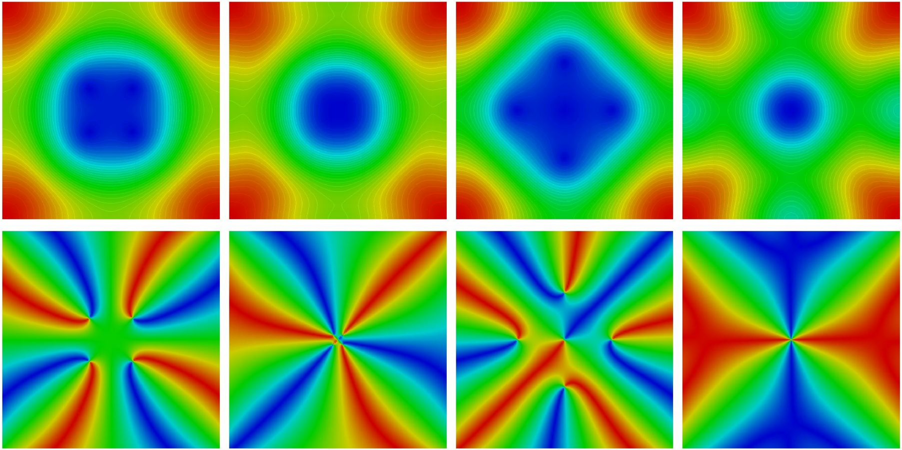


$h^{-1}\mu_{h,n}$ versus h^{-1} pour le même nombre de ddl

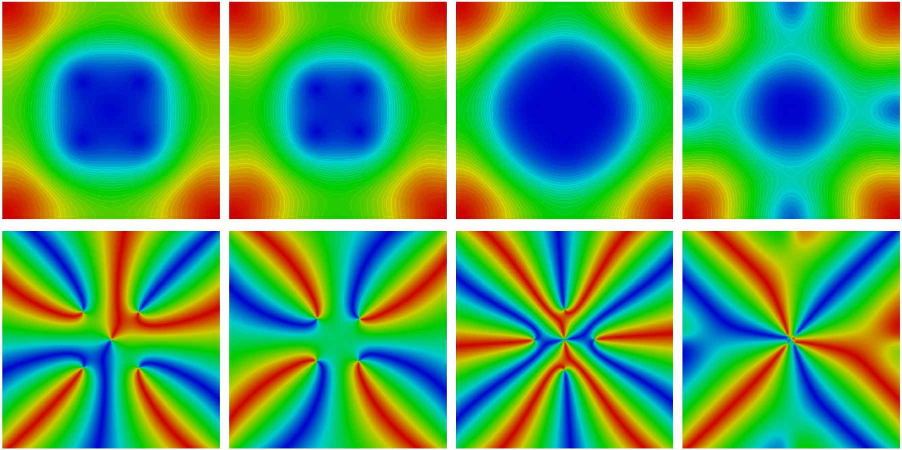


Carré

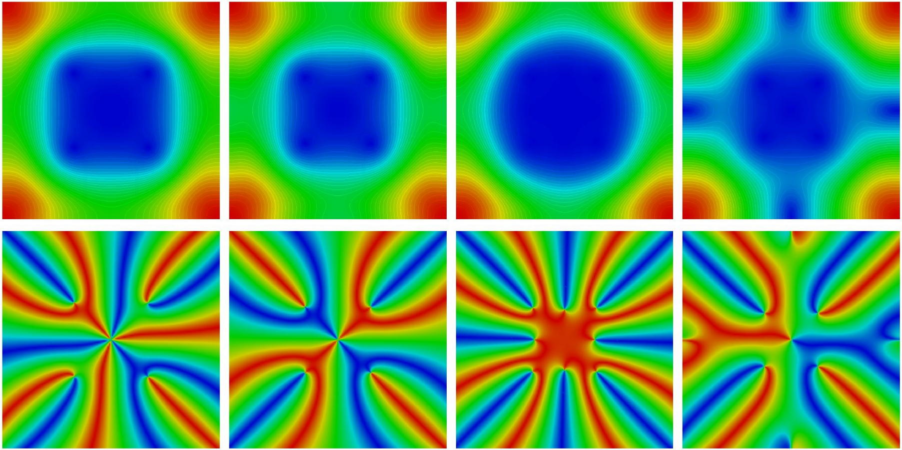
Modules et phases des fonctions propres 1-4, $h = 0.1$



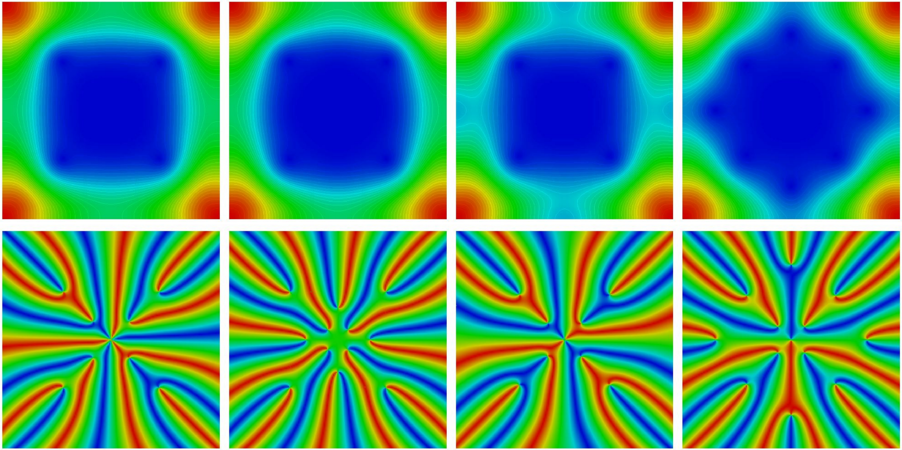
Modules et phases des fonctions propres 1-4, $h = 0.08$



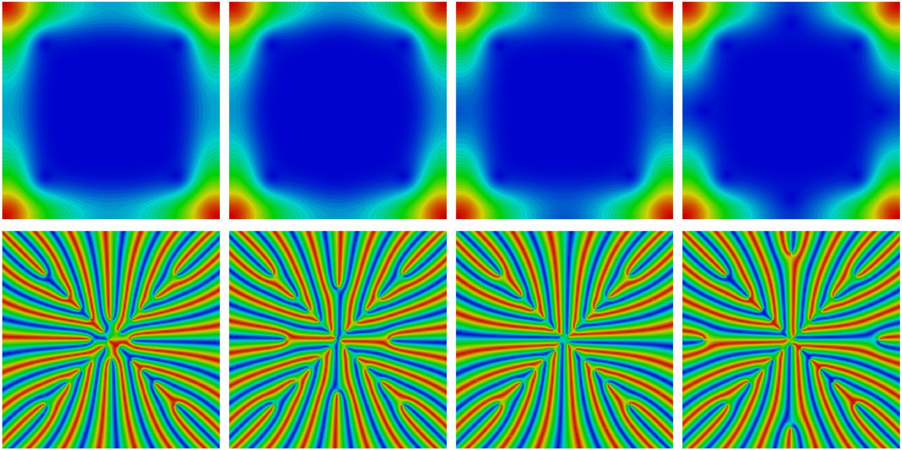
Modules et phases des fonctions propres 1-4, $h = 0.06$

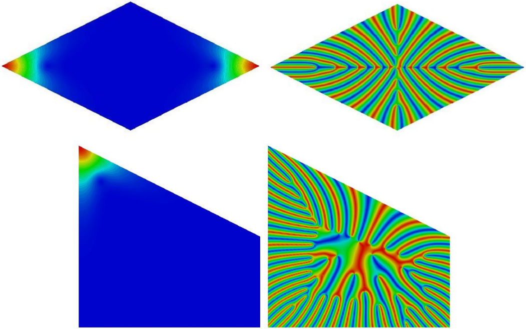


Modules et phases des fonctions propres 1-4, $h = 0.04$



Modules et phases des fonctions propres 1-4, $h = 0.02$





Résultat
Lorsque l'on abaisse l'intensité du champ appliqué, les électrons supraconducteurs apparaissent d'abord dans les coins de plus petit angle puis les autres sommets, puis le bord du domaine et enfin l'intérieur.

Effet de micro-défauts sur la rupture des structures

Contexte

- Description du comportement jusqu'à rupture de structures complexes
- Prise en compte de l'effet de défauts : initiation et propagation de fissures
  Défauts du chargement, du matériau et défauts géométriques

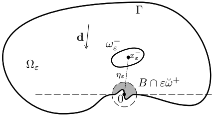
Objectif :

Prédire le comportement jusqu'à rupture en prenant en considération

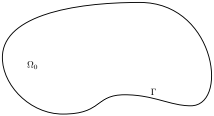
- l'influence de défauts géométriques de surface
- la présence de zones de localisation

sans description fine de la géométrie

Outils mathématiques : analyse à deux échelles



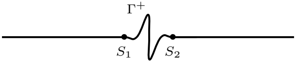
Échelle de la structure



Solution non perturbée : $u_0(x)$

Échelle de la perturbation

$H_\infty = \lim_{\varepsilon\to 0} \Omega_\varepsilon/\varepsilon$

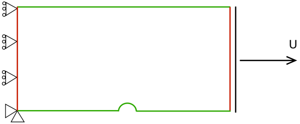


Correcteur ou profil : $V(\frac{x}{\varepsilon})$

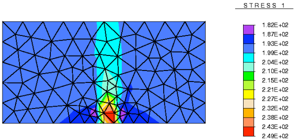
Approximation au premier ordre de la solution :

$$u_\varepsilon(x) \simeq u_0(x) + \varepsilon V(\tfrac{x}{\varepsilon}).$$

Barre en traction



Début de traction



Fin de traction